**Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение**

**Новосибирской области**

**«Новосибирский авиастроительный лицей»**

**Преподаватель:** Рахова Татьяна Семеновна

**Предмет**: математика

**Тема программы:** Числовые и буквенные выражения

**Тема урока**: Действия над комплексными числами в алгебраической форме

**Тип урока**: изучение нового материала

**Цель урока:** изучение основных действий над комплексными числами в алгебраической форме

**Задачи урока:**

* **Предметные:**раскрытие содержания действий над комплексными числами в алгебраической форме; обеспечение овладения всеми студентами умения выполнять действия сложения, вычитания, умножения, деления и возведение в степень комплексных чисел.
* **Метапредметные:** развитие навыков преобразования выражений, развитие мышления в процессе выполнения заданий, умения анализировать, сравнивать, обобщать, делать выводы, работать в группе, в паре.
* **Личностные:**воспитание у  студентов способности подходить к изучаемым проблемам с позиции исследователя;  воспитание умения высказывать свою точку зрения, слушать ответы других, принимать участие в диалоге; формирование способности к позитивному сотрудничеству.

**Оснащение урока:**  доска, информационные листы (ИЛ № 1, ИЛ № 2, ИЛ № 3, ИЛ № 4, ИЛ № 5), задания для выполнения на уроке, проектор, задания для домашней работы, презентация.

**Технологическая карта урока** *«Действия над комплексными числами в алгебраической форме»*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Этапы занятия** | **Время этапа** | **Методические особенности и краткие указания по проведению этапов занятия** | **примечания** |
| **1.Организационный этап** | 2 | Приветствие, проверка готовности студентов к занятию, проверка отсутствующих. | Журнал посещаемости |
| **2. Этап актуализации** | 8 | Воспроизвести и зафиксировать знания, достаточные для изучения нового: понятие комплексного числа, мнимая единица, действительная и мнимая части комплексного числа, алгебраическая форма комплексного числа, сопряженное число – общегрупповое обсуждение. | Проекционный материал. |
| **3.**  **Мотивационный этап** Постановка цели и задач урока. Мотивация учебной деятельности | 5 | Предложить студентам выполнить задания на сложение, вычитание, умножение и деление комплексных чисел и подумать над вопросом о правилах действий с комплексными числами. В коммуникативной форме сформулировать конкретную цель будущих учебных действий, устраняющих причину возникшего затруднения (то есть сформулировать, какие знания нужно приобрести и чему научиться).Попросить студентов предложить и согласовать тему урока. | Слайд с заданиями на действия с комплексными числами. |
| **4.Изучение нового материала** |  |  | Информационные листы.  |
| 4.1.Изучение новой информации: действия над комплексными числами | 10 | Разбить группу на 5 подгрупп. Раздать информационные листы и сопровождающие материалы. Организовать работу по изучению информационных листов:Группа № 1 – сложение;Группа № 2 – вычитание;Группа № 3 – умножение;Группа № 4 – деление;Группа № 5 – возведение в степень.Задать вопросы группам на понимание темы. | ИЛ№№1,2,3,4,5Оценочный лист. Технология «Эксперты» (в примечании) |
| 4.2.Обучение студентами членов других групп своим знаниям по действиям, изученным в своей группе. | 25 | Переформировать группы так, чтобы в каждую новую группу попали по 1 человеку от каждой прежней группы. Каждый член новой группы объясняет своим новым коллегам свою часть темы, основы которой он изучил в составе предыдущей группы и отвечает на заданные вопросы.  | Технология «Эксперты» |
| **5.Закрепление изученного материала** |  |  |  |
| 5.1**.** этап первичного закрепления  | 10 | Организовать работу студентов в парах. Выдать несколько типовых заданий. Предложить сверить свои варианты с ответами. | Презентация, типовые задания, эталоны с критериями оценивания |
| 5.2. этап самостоятельной работы с взаимопроверкой по эталону | 10 | Организовать индивидуальное самостоятельное выполнение студентами дополнительных типовых заданий по новой теме. Организовать взаимопроверку в парах с использованием эталона. | Типовые задания, эталоны, оценочный лист |
| **6.Этап включения в систему знаний и умений**Общегрупповое закрепление | 10 | Совместно с педагогом выявить и зафиксировать границы применимости нового знания.Организовать совместное выполнение заданий повышенной сложности, в которых новый способ действий связывается с ранее изученным. Занести результаты в оценочный лист. | Задания |
| **7. Этап рефлексии** | 5 | Организуется рефлексия и самооценка учениками собственной учебной деятельности на уроке.Студенты соотносят цель и результаты своей учебной деятельности и фиксируют степень их соответствия. Заполнить оценочные листы, подвести итоги занятия. | Слайд, где указаны варианты предложений, которые надо закончить (выбрать 2-3):-сегодня я узнал...- было трудно…- я понял, что…- я научился…- я смог…- было интересно узнать, что…- меня удивило…- мне захотелось…  |
| **8.Задание на дом** | 2 | Запись задания на дом. |  |

**ИЛ № 1**

Сложение комплексных чисел

 *Определение*. Суммой комплексных чисел *z1 = a1 + b1 i* и *z2 = a2 + b2 i* называется комплексное число *z*, действительная часть которого равна сумме действительных частей *z1* и *z2*, а мнимая часть - сумме мнимых частей чисел *z1* и *z2* , то есть *z = (a1 + a2) + (b1 + b2) i*.

 Числа *z1* и *z2* называются слагаемыми.

 Сложение комплексных чисел обладает следующими свойствами:

1º. Коммутативность: *z1 + z2 = z2 + z1*.

2º. Ассоциативность: *(z1 + z2) + z3 = z1 + (z2 + z3).*

3º. Комплексное число *– a – bi* называется противоположным комплексному числу *z = a + bi*. Комплексное число, противоположное комплексному числу *z*, обозначается *-z*. Сумма комплексных чисел *z* и *-z* равна нулю: *z + (-z) = 0*

Пример 1. Выполните сложение *(3 – i) + (-1 + 2i)*.

 *(3 – i) + (-1 + 2i) = (3 + (-1)) + (-1 + 2) i = 2 + 1i* = *2 + i.*

Проверьте себя, найдите сумму $z\_{1} $+ $z\_{2}$, если:

 z1=-4+2i, z2=0.5+0,1i;

z1=-3-5i, z2=-0.3+0.2i.

**ИЛ № 2**

Вычитание комплексных чисел

Вычитание.

 *Определение.* Вычесть из комплексного числа *z1* комплексное число *z2*, значит найти такое комплексное число *z,* что *z + z2 = z1*.

*Теорема*. Разность комплексных чисел существует и притом единственна.

Пример 2. Выполните вычитание *(4 – 2i) - (-3 + 2i)*.

 *(4 – 2i) - (-3 + 2i) = (4 - (-3)) + (-2 - 2) i = 7 – 4i*.

Проверьте себя, найдите разность $z\_{1}$ - $z\_{2}$, если

z1=-3-5i, z2=-0.3-0.2i,

z1=-4+2i, z2=-0.5-0,1i.

**ИЛ № 3**

Умножение комплексных чисел

 *Определение*. Произведением комплексных чисел *z1=a1+ b1 i* и *z2=a2+b2 i* называется комплексное число *z*, определяемое равенством:

*z = (a1a2 – b1b2) + (a1b2 + a2b1) i*.

 Числа *z1* и *z2* называются сомножителями.

 Умножение комплексных чисел обладает следующими свойствами:

1º. Коммутативность: *z1z2 = z2z1*.

2º. Ассоциативность: *(z1z2)z3 = z1(z2z3)*

3º. Дистрибутивность умножения относительно сложения:

 *(z1 + z2) z3 = z1z3 + z2z3*.

4º. *z ·  = (a + bi) (a – bi) = a2 + b2* - действительное число.

 На практике умножение комплексных чисел производят по правилу умножения суммы на сумму и выделения действительной и мнимой части.

 В следующем примере рассмотрим умножение комплексных чисел двумя способами: по правилу и умножением суммы на сумму.

Пример 3. Выполните умножение *(2 + 3i) (5 – 7i)*.

1 способ. *(2 + 3i) (5 – 7i) = (2⋅ 5 – 3⋅ (- 7)) + (2⋅ (- 7) + 3⋅ 5)i =*

 *= (10 + 21) + (- 14 + 15)i = 31 + i*.

2 способ. *(2 + 3i) (5 – 7i) = 2⋅ 5 + 2⋅ (- 7i) + 3i⋅ 5 + 3i⋅ (- 7i) =*

 *= 10 – 14i + 15i + 21 = 31 + i*.

Проверьте себя, выполните умножение, если

z1=-4+2i, z2=-0.5-0,1i,

z1=-3-5i, z2=-0.3-0.2i

**ИЛ № 4**

Деление комплексных чисел

*Определение*. Разделить комплексное число *z1* на комплексное число *z2*, значит найти такое комплексное число *z*, что *z · z2 = z1*.

*Теорема.* Частное комплексных чисел существует и единственно, если *z2 ≠ 0 + 0i*.

На практике частное комплексных чисел находят путем умножения числителя и знаменателя на число, сопряженное знаменателю.

Пусть *z1 = a1 + b1i*, *z2 = a2 + b2i*, тогда 

 + .

В следующем примере выполним деление по формуле и правилу умножения на число, сопряженное знаменателю.

Пример 4. Найти частное .

1 способ. .

2 способ. .

Проверьте себя, выполнив деление $z\_{1}$ на $z\_{2}$ , если

z1=-3-5i, z2=-0.3-0.2i,

z1=-4+2i, z2=-0.5-0,1i.

**ИЛ № 5**

Возведение комплексных чисел в целую положительную степень

а) Степени мнимой единицы.

Пользуясь равенством *i2 = -1*, легко определить любую целую положительную степень мнимой единицы. Имеем:

*i3 = i2 i = -i,*

*i4 = i2 i2 = 1,*

*i5 = i4 i = i,*

*i6 = i4 i2 = -1,*

*i7 = i5 i2 = -i,*

*i8 = i6 i2 = 1* и т. д.

 Это показывает, что значения степени *in*, где *n* – целое положительное число, периодически повторяется при увеличении показателя на *4* .

 Поэтому, чтобы возвести число  *i* в целую положительную степень, надо показатель степени разделить на *4* и возвести *i* в степень, показатель которой равен остатку от деления.

Пример 5. Вычислите: *(i 36 + i 17) · i 23*.

*i 36 = (i 4) 9 = 1 9 = 1,*

*i 17 = i 4⋅ 4+1 = (i 4)4⋅ i = 1 · i = i.*

*i 23 = i 4⋅ 5+3 = (i 4)5⋅ i3 = 1 · i3 = - i.*

*(i 36 + i 17) · i 23 = (1 + i) (- i) = - i + 1= 1 – i.*

б) Возведение комплексного числа в целую положительную степень производится по правилу возведения двучлена в соответствующую степень, так как оно представляет собой частный случай умножения одинаковых комплексных сомножителей.

Пример 6. Вычислите: *(4 + 2i) 3*

*(4 + 2i) 3 = 4 3 + 3⋅ 42⋅ 2i + 3⋅ 4⋅ (2i)2 + (2i)3 = 64 + 96i – 48 – 8i = 16 + 88i.*

Проверьте себя, вычислите:

$(5+3i)^{2}$; $(-4+2i)^{3}$.

***Задания для выполнения на уроке***

**Тренировочные упражнения.**

Выполняются учащимися в парах за рабочими местами

1. Сложить комплексные числа:

    ![\[1)(4 + 5i) + (12 - 7i);\]]()

    ![\[2)( - 3 - 2i) + (15 + 6i);\]]()

    ![\[3)(7 + 8i) + (11 - 8i);\]]()

    ![\[4)( - 9 - i) + (5 + i);\]]()

    ![\[5)23 + ( - 2 + 4i).\]]()

1. Выполнить вычитание комплексных чисел:

    ![\[1)(5 + 9i) - (3 + 24i);\]]()

    ![\[2)( - 4 + 16i) - (11 - 8i);\]]()

    ![\[3)(\frac{3}{8} - \frac{5}{{12}}i) - ( - \frac{1}{6} + \frac{2}{9}i);\]]()

    ![\[4)(43 + 7i) - (43 - 2i);\]]()

    ![\[5)8 - (5 + 3i).\]]()

1. Найти произведение комплексных чисел, записанных в алгебраической форме:

    ![\[1){z_1} = 7 + 3i;{z_2} = 5 - 8i;\]]()

    ![\[2){z_1} =  - 10 - 4i;{z_2} = 8 + i;\]]()

    ![\[3){z_1} = 12;{z_2} = 6 + 2i;\]]()

    ![\[4){z_1} = 9i;{z_2} =  - 10i;\]]()

1. Найти частное комплексных чисел:

    ![\[1){z_1} = 2 + 5i;{z_2} = 3 - 2i;\]]()

    ![\[2){z_1} = 23 + i;{z_2} = 2 + i;\]]()

    ![\[3){z_1} = 8i;{z_2} = 5i;\]]()

    ![\[4){z_1} = 2 + 7i;{z_2} = 10.\]]()

1. Выполнить действия (возведите в степень):

а) (2 + 3*i*)2;

б) (3 – 5*i*)2;

в) (5 + 3*i*)3.

**Самостоятельная работа**

Выполните действия с комплексными числами:

1. *(2 + 5i) + (4 + 2i);*
2. *(5 +9i) – (7 – 6i);*
3. *(3 + 2i) \* (4 + 2i);*
4. $\frac{6+5i}{3-7i}$
5. $( 2+3i)^{2}$

Ответы:

1. *6 + 7i;*
2. *-2 + 15i;*
3. *8 + 14i;*
4. $- \frac{20}{58}+\frac{57}{58}i$*;*
5. *– 5 + 12i.*

|  |
| --- |
|  **Этап включения в систему знаний и умений**Общегрупповое решение под руководством педагога. |

1. Выполните действия.

а) ;

б) ;

в) .

2. Решите уравнения.

а) *x2 + 6x + 12 = 0*;

б) *y3 – 12y + 16 = 0*.

**Домашнее задание:**

1-8. Произведите сложение и вычитание комплексных чисел:

1) (3 + 5*i*) + (7 – 2*i*).
2) (6 + 2*i*) + (5 + 3*i*).
3) (– 2 + 3*i*) + (7 – 2*i*).
4) (5 – 4*i*) + (6 + 2*i*).
5) (3 – 2*i*) + (5 + *i*).
6) (4 + 2*i*) + (– 3 + 2*i*).
7) (– 5 + 2*i*) + (5 + 2*i*).
8) (– 3 – 5*i*) + (7 – 2*i*).

9-16. Произведите умножение комплексных чисел:

9) (2 + 3*i*)(5 – 7*i*).
10) (6 + 4*i*)(5 + 2*i*).
11) (3 – 2*i*)(7 – *i*).
12) (– 2 + 3*i*)(3 + 5*i*).
13) (1 –*i*)(1 + *i*).
14) (3 + 2*i*)(1 + *i*).
15) (6 + 4*i*)3*i*.
16) (2 – 3i)(– 5i).

17-24. Выполните действия:

17) (3 + 5*i*)2.
18) (2 – 7*i*)2.
19) (6 + *i*)2.
20) (1 – 5*i*)2.
21) (3 + 2*i*)3.
22) (3 – 2*i*)3.
23) (4 + 2*i*)3.
24) (5 – *i*)3.

25-30. Выполните действия:

25) (3 + 2*i*)(3 – 2*i*).
26) (5 + *i*)(5 – *i*).
27) (1 – 3*i*)(1 + 3*i*).
28) (7 – 6*i*)(7 + 6*i*).
29) (*a* + *bi*)(*a* – *bi*).
30) (*m* – *ni*)(*m* + *ni*).

***Эталоны ответов***

1. Сложить комплексные числа:

Решение:

Чтобы сложить два комплексных числа в алгебраической форме, надо отдельно сложить действительные части этих чисел, отдельно — коэффициенты при мнимых частях.

    ![\[1)(4 + 5i) + (12 - 7i) = (4 + 12) + (5 - 7)i = 16 - 2i;\]]()

    ![\[2)( - 3 - 2i) + (15 + 6i) = ( - 3 + 15) + ( - 2 + 6i);\]]()

    ![\[3)(7 + 8i) + (11 - 8i) = (7 + 11) + (8 - 8)i = 18;\]]()

    ![\[4)( - 9 - i) + (5 + i) = ( - 9 + 5) + ( - 1 + 1)i =  - 4;\]]()

    ![\[5)23 + ( - 2 + 4i) = (23 - 2) + (0 + 4)i = 21 + 4i.\]]()

1. Выполнить вычитание комплексных чисел:

Решение:

Чтобы вычесть комплексные числа, отдельно вычитаем действительные части уменьшаемого и вычитаемого, отдельно — коэффициенты при мнимой части:

    ![\[1)(5 + 9i) - (3 + 24i) = (5 - 3) + (9 - 24)i = 2 - 15i;\]]()

    ![\[2)( - 4 + 16i) - (11 - 8i) = ( - 4 - 11) + (16 + 8)i =  - 15 + 24i;\]]()

    ![\[3)(\frac{3}{8} - \frac{5}{{12}}i) - ( - \frac{1}{6} + \frac{2}{9}i) = \]]()

    ![\[ = (\frac{{{3^{\backslash 3}}}}{8} + \frac{{{1^{\backslash 4}}}}{6}) + ( - \frac{{{5^{\backslash 3}}}}{{12}} - \frac{{{2^{\backslash 4}}}}{9})i = \frac{{13}}{{24}} - \frac{{23}}{{36}}i;\]]()

    ![\[4)(43 + 7i) - (43 - 2i) = (43 - 43) + (7 + 2)i = 9i;\]]()

    ![\[5)8 - (5 + 3i) = (8 - 5) + (0 - 3)i = 3 - 3i.\]]()

1. Найти произведение комплексных чисел, записанных в алгебраической форме:

Решение:

Перемножаем комплексные числа, как обыкновенные многочлены:

    ![\[1)(7 + 3i) \cdot (5 - 8i) = 7 \cdot 5 + 7 \cdot ( - 8i) + 3i \cdot 5 + 3i \cdot ( - 8i) = \]]()

приводим подобные слагаемые и заменяем i² на -1:

    ![\[ = 35 - 56i + 15i - 24{i^2} = 35 - 41i - 24 \cdot ( - 1) = \]]()

    ![\[ = 35 - 41i + 24 = 59 - 41i;\]]()

    ![\[2)( - 10 - 4i) \cdot (8 + i) =  - 80 - 10i - 32i - 4{i^2} = \]]()

    ![\[ =  - 80 - 42i + 4 =  - 76 - 42i;\]]()

    ![\[3)12 \cdot (6 + 2i) = 72 + 24i;\]]()

    ![\[4)9i \cdot ( - 10i) =  - 90{i^2} = 90.\]]()

1. Найти частное комплексных чисел:

Решение:

1) Чтобы выполнить деление комплексных чисел, записанных в алгебраической форме, и делимое, и делитель умножаем на число, комплексно-сопряженное делителю (вариант: и числитель, и знаменатель умножаем на число, сопряженное знаменателю):

    ![\[\frac{{{z_1}}}{{{z_2}}} = \frac{{2 + 5i}}{{3 - 2i}} = \frac{{(2 + 5i)(3 + 2i)}}{{(3 - 2i)(3 + 2i)}} = \frac{{2 \cdot 3 + 2 \cdot 2i + 5i \cdot 3 + 5i \cdot 2i}}{{{3^2} + {2^2}}} = \]]()

1. [Умножение комплексных чисел](http://www.matematika.uznateshe.ru/umnozhenie-kompleksnyx-chisel/) выполняем как умножение многочленов.

i² заменяем на -1.

    ![\[ = \frac{{6 + 4i + 15i + 10{i^2}}}{{13}} = \frac{{6 + 19i - 10}}{{13}} = \frac{{ - 4 + 19i}}{{13}} =  - \frac{4}{{13}} + \frac{{19}}{{13}}i;\]]()

    ![\[2)\frac{{{z_1}}}{{{z_2}}} = \frac{{23 + i}}{{2 + i}} = \frac{{(23 + i)(2 - i)}}{{(2 + i)(2 - i)}} = \frac{{46 - 23i + 2i - {i^2}}}{{{2^2} + {1^2}}} = \]]()

    ![\[ = \frac{{46 - 21i + 1}}{5} = \frac{{47 - 21i}}{5} = \frac{{47}}{5} - \frac{{21}}{5}i;\]]()

    ![\[3)\frac{{{z_1}}}{{{z_2}}} = \frac{{8i}}{{5i}} = \frac{{8i \cdot ( - 5i)}}{{5i \cdot ( - 5i)}} = \frac{{ - 40{i^2}}}{{25}} = \frac{{40}}{{25}} = \frac{8}{5};\]]()

    ![\[4)\frac{{{z_1}}}{{{z_2}}} = \frac{{2 + 7i}}{{10}} = \frac{{(2 + 7i) \cdot 10}}{{10 \cdot 10}} = \frac{{20 + 70i}}{{100}} = \]]()

    ![\[ = \frac{{20}}{{100}} + \frac{{70}}{{100}}i = \frac{1}{5} + \frac{7}{{10}}i.\]]()

1. Выполнить действия (возведите в степень):

Решение:

а) (2 + 3*i*)2 = 4 + 2×2×3*i* + 9*i*2 = 4 + 12*i* – 9 = – 5 + 12*i*;

б) (3 – 5*i*)2 = 9 – 2×3×5*i* + 25*i*2 = 9 – 30*i* – 25 = – 16 – 30*i*;

в) (5 + 3*i*)3 = 125 + 3×25×3*i* + 3×5×9*i*2 + 27*i*3;

так как *i*2 = – 1, а *i*3 = – *i*, то получим (5 + 3*i*)3 = 125 + 225*i* – 135 – 27*i* = – 10 + 198*i*.

**Оценочный лист**

Студента \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Этапы оценивания | Метод оценивания | Баллы |
| Повторение | Поставить 1 балл за каждый правильный ответ. |  |
| Работа по изучению информационного листа | Оценку выставляет группа (0 – 5 баллов). |  |
| Объяснение изученного материала | Оценку выставляет группа, которой объяснялся новый материал (1 – 5 баллов). |  |
| Этап первичного закрепления | Поставить 1 балл за каждый правильный ответ. |  |
| Самостоятельная работа | Оценку выставляет сосед по парте. 1 балл за каждое правильное решение.  |  |
| Выполнение заданий повышенной сложности. | Баллы объявляет преподаватель |  |
| Итого баллов |  |

Перевод баллов в оценки

24 – 30 баллов – «3»

31 – 38 баллов – «4»

39 – 46 баллов – «5»

***Рефлексия***

Выберите 2 – 3 предложения и закончите их:

-сегодня я узнал...

- на уроке для меня было важно…

- было трудно…

- на уроке мне было сложно…

- на уроке у меня получилось…

- я понял, что…

- я научился…

- я смог…

- теперь я умею…

- было интересно узнать, что…

- меня удивило…

- мне захотелось…

**Приложение**

**Технология «Эксперты»**

Технология реализуется там, где необходимо изучить или обобщить большой по объёму материал, где существует возможность разделить тему на отдельно взятые блоки.

**Алгоритм:**

- Учебный материал, который необходимо усвоить делим на смысловые части;

- Учебную группу делим на малые группы по количеству частей материала;

- Каждая малая группа получает задание – изучить содержание одной из предлагаемых частей материала;

- После чтения члены группы обсуждают содержание материала, сообща решают типовые задания;

- Затем идет переформирование групп и образование новых так, чтобы в каждую новую группу попали по 1 человеку от каждой первичной группы.

- Каждый член новой группы объясняет своим новым коллегам свою часть темы, основы которой он изучил в составе предыдущей группы и отвечает на возникающие вопросы. Таким образом, в новой группе рассматривается и проговаривается материал всей темы;

- За все действия выставляются баллы в оценочный лист.

**Результаты**

1. Студенты получают возможность глубоко разобраться в материале, работая в малой группе;
2. Каждый участник активно и интенсивно работает в малой группе, является и учеником и учителем;
3. Тщательно прорабатывается материал.

**Достоинство технологии:**

- Достаточно хорошее освоение материала;

- Каждый студент является участником обучения в общении;

- У студентов воспитывается способность подходить к изучаемым проблемам с позиции исследователя;

- Воспитывается умение высказывать свою точку зрения, слушать других, принимать участие в диалоге;

- Возрастает личная ответственность за результат;

- Формируются способности к позитивному сотрудничеству;

- Появляется возможность получит высокий балл.