Математика не для ЕГЭ

Е. К. Белый

Египетский счет

Учебное пособие для учащихся средних школ

Петрозаводск
Издательство ПетрГУ
2017

УДК 519.813.7
ББК 22.1я92
Б439

Рецензенты:
С. С. Платонов, доктор физико-математических наук, профессор кафедры геометрии и топологии ПетрГУ;
Е. С. Коккарева, преподаватель I категории ГАПОУ РК «Индустриальный колледж»

Белый, Евгений Константинович.
Б439 Египетский счет : учебное пособие для учащихся средних школ / Е. К. Белый. – Петрозаводск : Издательство ПетрГУ, 2017. – 34, [2] с. – (Математика не для ЕГЭ).
ISBN 978-5-8021-2295-2

В книге в форме рассказа разобран ряд задач на последовательное удвоение чисел. Учебное пособие адресовано учащимся и учителям средней школы, а также всем тем, кто интересуется математикой.

ISBN 978-5-8021-2295-2

УДК 519.813.7
ББК 22.1я92

Содержание

Простеганные ветрами и сбоку, и в упор,
Приятели из памяти встают:
Разбойными корветами, вернувшимися в порт,
Покуривают трубочки "Салют!"
Юрий Визбор

Предисловие

$\boxed{\Rightarrow 6}$ *Дорогой читатель! Эта книга посвящена задачам, связанным с последовательным удвоением чисел, и ее можно рассматривать как приложение к опубликованному ранее учебному пособию «Прогрессии» [1]. Материал построен так, что пищу для размышления может найти и младший, и старший школьник. Надеемся, книга окажется полезной также учителям при подготовке занятий по темам «Прогрессии» и «Системы счисления».*

В первом параграфе вы познакомитесь с египетским счетом. Такой способ счета впервые упоминается в папирусе Ренда, датируемом примерно 1 800 г. до н. э. [2, с. 17-24], [3, с. 17-23], [5, с. 19-21]. Поскольку египетский счет позволяет обучить любого человека делению и умножению, минуя мучительную стадию заучивания таблицы умножения, он был широко распространен в Европе вплоть до начала XX в. Интересно, что в зарубежной литературе египетский *счет иногда называли «способом умножения чисел, применяемым русскими крестьянами» [4, с. 195-199]. Может создаться впечатление, что египетский счет в наше время неактуален. Однако он способствует развитию культуры устного счета и уже потому заслуживает внимания.*

В книге мы затронули проблему оптимального набора гирь, вспомнили древнюю легенду об изобретателе шахмат, совершили экскурсию в египетский лабиринт и разобрали популярную среди азартных игроков стратегию мартингейла. Задачи изложены в форме рассказа о пиратах, действие которого разворачивается в одной из таверн Порт-Ройала конца XVII века незадолго до того, как самый грешный город земли поглотила морская пучина. Каждая задача снабжена комментариями. Не надо только рассчитывать, что будет понятно все и сразу. Это даже хорошо, если останется место для тайны.

Автор выражает благодарность всем, кто проявил интерес к серии. Любые замечания и предложения вы можете, как и ранее, направлять по адресу: **belyi@petrsu.ru**.

Евгений Белый

Апрель 2017

§ 1. Египетский счет

$\boxed{4 \Leftrightarrow 13}$ На захваченном судне пираты нашли 13 коробов, в каждом из которых хранилось по 125 золотых дукатов. Решено было разделить сокровища поровну между 22 членами команды. Надо заметить, пиратам часто приходилось прибавлять и отнимать. Капитан Большой Сэм учил, что отнимать всегда лучше у других, а прибавлять – себе. С умножением морским разбойникам просто не везло. Все нелегким трудом добытые деньги на берегу уходили, как вода между пальцев. Поэтому умножать было в общем нечего и некогда. Ну а деление часто заканчивалось большой потасовкой. Вот и сейчас: можно было бы раздать монеты по одной по кругу. Но что, если добыча не делится на 22 равные части и кто-то получит на 1 дукат больше. В таком случае ссоры не избежать. А каждый моряк знает: ссоры на корабле допускать нельзя! И тогда Большой Сэм объявил: «Кто из вас сможет, не перекладывая монеты, сказать, сколько причитается каждому, тому достанется, помимо его доли, остаток от деления». Пираты задумались. И только юнга Элвин, порывшись в своем сундуке, извлек огрызок карандаша и клочок бумаги. Немного почиркав карандашом, он сообщил, что всего в коробах 1 625 монет, каждому следует отсчитать 73, а оставшиеся

19 отдать ему. Видавшие виды морские волки поначалу не поверили, но когда все получили по 73 дуката, о чудо, на дне последнего короба осталось ровно 19 монет. Капитан взял оставленную на пустой бочке бумагу и увидел загадочные столбики цифр:

взять 13 раз по 125

13	125	
$\boxed{1}$	125	1 000
2	250	500
$\boxed{4}$	500	125
$\boxed{8}$	1 000	1 625

разделить на 22

	1 625	1 408
1	$\boxed{22}$	176
2	44	1 584
4	88	22
8	$\boxed{176}$	1 606
16	352	
32	704	$1 + 8 + 64 = 73$
64	$\boxed{1\ 408}$	$1\ 625 - 1\ 606 = 19$

Все знали, Элвин – самый грамотный пират. За его плечами почти два класса младшей школы. И все-таки как он, не зная таблицы умножения, справился с такой сложной задачей? Капитан сунул бумагу в карман камзола, решив разобраться на досуге, и вскоре забыл про нее. Вспомнил только через пару недель на Ямайке в гавани Кингстон-Харбор по пути в таверну Старого Боба.

Большое тропическое солнце уже готовилось нырнуть в море. Жизнь казалась, как никогда, прекрасной. Еще бы! Врасплох, почти без боя, располагая только небольшим быстроходным шлюпом с пятью пушками, взял трехмачтового «купца», на свою беду пополнявшего в его акватории запасы пресной воды. Взял молниеносно, когда большая часть неудачников беспечно прохлаждалась на берегу. Сэм шагал по знакомым улицам Порт-Ройала в шелковой рубашке с кружевными манжетами, в широких атласных штанах до колен, в пестром жилете из лучшей парчи поверх рубашки и старом камзоле, без которого он просто себя не представлял. Шагал, поглаживая до блеска начищенный эфес короткой абордажной сабли. Голову его украшала только вошедшая в моду черная треуголка. Изредка капитан улыбался встречным мулаткам, с интересом разглядывавшим его. Тут он и вспомнил о бумаге и сразу решил показать ее Бобу.

Откуда появился на острове этот Боб и чем промышлял раньше, никто не знает. Сам Боб никогда об этом не говорил, а расспрашивать было не в местных обычаях. Как бы то ни было, слыл он на острове человеком ученым. Говорят, даже книги читал. В многочисленных заведениях Порт-Ройала день и ночь освобождала свои карманы от тяжелых монет самая разношерстная публика: голландцы, португальцы, немцы, французы, испанцы, ирландцы... Однако накануне гавань покинули сразу три больших корвета, и сейчас у Боба было на удивление пусто. Заказав бокал знаменитого ямайского рома, Большой Сэм жестом пригласил хозяина за стол и, поведав ему свою историю, вытащил из кармана мятую бумагу: «Что здесь нацарапал этот шкет?» Боб поручил свои обязанности помощнику и сходил за очками. В очках Сэм прежде никогда его не видел. Впрочем, в то время «очкарик» на Ямайке был такой же экзотикой, как нильский крокодил на Бейкер-стрит.

– Да это же египетский счет!

Изучив содержимое записки, Боб сделался разговорчивым:

– (1) В первой таблице найдено произведение 13 на 125. 13 – меньший сомножитель, разложим именно его по степеням 2. Это чтобы меньше строк в таблице было. Запишем 13 в заголовке первой колонки, а 125 – второй.

(2) В первой строке запишем «1 125».

(3) Далее в каждой строке содержимое предыдущей

удваивается. Запись во второй строке: «2 250» означает, что 2 раза по 125 будет 250.

(4) В третьей: «4 500» – 4 раза по 125 будет 500.

(5) В четвертой: «8 1 000» – 8 раз по 125 будет 1 000.

На этом месте заполнение таблицы прервем, поскольку следующее удвоение даст в первом столбце число, большее 13. Обведем рамочкой число 8 и начнем движение по первому столбцу вверх. Поскольку $8 + 4 < 13$, обведем рамочкой и 4. А вот $8+4+2 > 13$. Соответствующую строку пропустим. Последним обведем число 1. Сумма чисел в рамочках: $1 + 4 + 8 = 13$. Осталось сложить числа из второго столбца, соответствующие отмеченным числам первого. Заметь, действия умножения нигде здесь нет.

– Разве удвоение не есть умножение?

– Умножение на 2 то же, что сложение числа с самим собой. В Европе сейчас удвоение считается отдельной арифметической операцией и так будет еще лет двести...

На этом месте хозяин осекся, как человек, сболтнувший лишнего, но обычно наблюдательный капитан ничего не заметил.

– Таким образом, – продолжал Боб, – вам досталось $12 \cdot 125 = 1\ 625$ дукатов, которые надо разделить между 22 корсарами. Ниже такая же таблица для деления:

(1) В заголовке справа – 1 625. Левый столбец пуст.

(2) В первой строке пишем 1 и 22.

(3) И далее опять в каждой строке пишем удвоенные значения предыдущей.

(4) В последней строке: 64 и 1 408. На этом остановимся, поскольку удвоенное 1 408 превысит 1 625. Обведем 1 408 и начнем движение вверх по столбцу. $1\ 408 + 704 > 1\ 625$, также $1\ 408 + 352 > 1\ 625$, но $1\ 408 + 176 < 1\ 625$. Обведем рамочкой 176. Правее запишем:

$$\begin{array}{r} 1\ 408 \\ 176 \\ \hline 1\ 584 \end{array}$$

Обведем рамкой 176 и поднимемся выше: $1\ 584{+}88 > 1\ 625$, $1\ 584 + 44 > 1\ 625$, но $1\ 584 + 22 < 1\ 625$. Опишем рамку и вокруг 22. Выкладки приняли вид

$$\begin{array}{r} 1\ 408 \\ 22 \\ \hline 1\ 584 \\ 22 \\ \hline 1\ 606 \end{array}$$

Если бы дукатов было ровно 1 606, не видать твоему шкету вознаграждения, но их 1 625. Значит, юнга получил в награду $1\ 625 - 1\ 606 = 19$ монет. А какова доля каждого корсара? Чтобы узнать ее, надо сложить числа в левой колонке, соответствующие отмеченным числам из правой: $1+8+64=73$. Это и есть египетский счет.

Боб отодвинул листок.

– И всего делов, – промычал Сэм после очередного глотка рома. – А наш юный друг Элвин из-за этой чертовой таблицы бросил школу и ушел в пираты.

– Подумаешь таблица! В десятичной системе! Вот в Древнем Вавилоне была 60-ричная система. Представь, какая там была таблица. Помню, однажды...

Боб погрузился в воспоминания.

– Однако эта египетская штука будет полезна и джентельменам, зубрящим таблицу, – продолжил капитан, извлекая из кармана размером с лимон кусок мела, которым накануне начищал эфес сабли. – Например, я не помню, сколько будет 6×9, 8×7 и 6×5.

Сэм быстро набросал решение на поверхности дощатого стола:

$$
\begin{array}{cc}
6 & 9 \\ \hline
1 & 9 \\
\boxed{2} & 18 \\
\boxed{4} & 36 \\ \hline
 & 54
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{cc}
7 & 8 \\ \hline
\boxed{1} & 8 \\
\boxed{2} & 16 \\
\boxed{4} & 32 \\ \hline
 & 56
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{cc}
5 & 6 \\ \hline
\boxed{1} & 6 \\
2 & 12 \\
\boxed{4} & 24 \\ \hline
 & 30
\end{array}
$$

– Быстро ты схватываешь, – одобрительно кивнул Боб.

Сэм скромно пожал плечами: мол, работа такая.

– Только во втором случае проще три раза удвоить число 7: $7 \to 14 \to 28 \to 56$.
– Все это верно – не отставал Сэм, – при одном условии: если любое число можно заменить суммой степеней двоек.
– И единицы, – уточнил хриплый голос.

§ 2. Гири Толстяка Додо

$\boxed{6 \Leftrightarrow 14}$ Сэм поднял голову и увидел старого знакомого торговца, Толстяка Додо, у которого часто закупал провиант для дальних походов. Торговец был немолодым, общительным и, говорят, где-то в глубине души даже очень порядочным человеком.
– У меня 7 гирь, – сходу включился в разговор Додо, – весом: 1, 2, 4, 8, 16, 32 и 64 фунта. И не сойти мне с этого места, сколько лет веду здесь дело, их всегда хватало, чтобы взвесить любой груз от 1 до 127 фунтов. При этом ни одна гиря не оказалась лишней.
Додо без церемоний рухнул на скамью рядом с Бобом.
– Это потому, что ты всегда ставишь груз на левую чашу весов, а гири на правую, – заметил Боб. – Так, чтобы взвесить товар от 1 до 4 фунтов, тебе нужны три гири: 1, 2 и 4 фунта. Но хватило бы двух: 1 и 3 фунта.
– А если товар весит 2 фунта? – возразил капитан.

– Тогда надо поставить 3-фунтовую гирю на правую чашу весов, а на левую фунтовую. А для грузов от 1 до 121 фунта хватит пяти гирь весом 1, 3, 9, 27 и 81.

– Однако это уже другая задача, – запротестовал Сэм. – Мы отклонились от курса.

– Капитан прав, – охотно согласился Боб и весело воскликнул: « Кто поможет бедным странникам вернуться на верный путь, получит два бокала рома за счет заведения!»

– Позвольте мне, сэр.

Из-за соседнего стола поднялся матрос Бен. Только сейчас капитан заметил: вокруг спорщиков собралась уже вся команда и с интересом следила за ходом беседы. Вот почему в заведении было тихо, как в костеле в будний день.

§ 3. Рассказ матроса Бена

$\boxed{13 \Leftrightarrow 17}$ – Лет десять назад, когда я имел честь служить матросом королевского флота, наш фрегат поправлял такелаж в Бомбее. Тогда был я еще молод и нечужд благородных порывов. И потому однажды, возвращаясь из таверны на корабль, заступился за мелкого торговца, у которого несправедливо пытались отнять товар два здоровенных португальца. Меня как раз то и задело, что два здоровяка насели на одного тщедушного индуса. Да и напомнил о себе выпитый ром. Не буду утомлять вас, джентльмены, подробностями. Все знают, каков я в бою. И вот, благодарный торговец подарил мне роскошную клетчатую доску и набор фигур из слоновой кости для древней индийской игры. Как узнал потом, игру эту у нас называют шахматами. Также индус научил меня правилам игры и рассказал легенду о ее изобретателе...

– Однако, какое отношение это имеет к нашему разговору? – хмуро произнес Большой Сэм.

– Самое прямое, джентльмены. Новая игра так понравилась местному царю, что он приказал немедленно доставить изобретателя к себе и спросил, какую награду тот хочет получить.

– Заплати одно пшеничное зерно за первую клетку, два – за вторую, четыре – за третью... И так далее: количество зерен, причитающихся за каждую следующую клетку, должно удваиваться..

– Ты получишь награду за все 64 клетки, – перебил изобретателя разгневанный столь ничтожной просьбой царь. Он прогнал невежу и приказал казначею отсчитать затребованное число зерен. За обедом царь между прочим поинтересовался, исполнен ли его приказ.

– Еще нет, – потупился казначей. – Награда оказалась слишком велика...

– Ничего не хочу знать! Награда должна быть выплачена сполна! – разгневался царь.

Казначей поспешно удалился. Наутро, дрожа от страха, он вновь предстал перед властелином и сообщил, что для выплаты награды не хватит зерна, хранящегося во всех амбарах царя, всего государства и даже всей земли.

– Вот такое число, – закончил рассказ Бен.

– 18 квинтиллионов 446 квадриллионов 744 триллиона 73 миллиарда 709 миллионов 551 тысяча 615 зерен, – как заклинание пробормотал себе под нос Боб и налил матросу два бокала ямайского рома.

– Не соблаговолят ли джентльмены выслушать и мою историю, – с поклоном обратился к собеседникам доселе молчавший корабельный кок Рахим. – Она не менее, чем предыдущая, заслуживает двух бокалов хорошего рома.

– Если других мнений нет, сначала послушаем, – предложил Боб. – А потом, поскольку ром мой, я и решу, заслуживает или нет.

Возражений не последовало, и, таким образом, все внимание переключилось на обычно незаметного Рахима.

§ 4. Тайна жрецов

$\boxed{14 \Leftrightarrow 19}$ – Детство мое прошло в прекрасном оазисе Эль-Файюля, который наши предки называли «городом гадов». На востоке Эль-Файюль отделяют от Нила пески Ливийской пустыни и гряды холмов. В 4 милях южнее простираются величественные развалины Хавара, примыкающие к незавершенной пирамиде. Не раз приходилось мне слышать рассказы о скрытом здесь подземном Лабиринте, хранящем несметные сокровища жрецов, тайны давно исчезнувших народов и ключи от будущего.

– Почему же ты сидишь сейчас на скамье в этой чертовой таверне, а не на золотом сундуке? И не в шелках, а в лохмотьях? – с иронией заметил Сэм.

– Если путь к богатству так легок, задолго до меня нашлись бы люди, для которых бедность страшнее гнева могущественных богов. Сначала надо пройти Лабиринт.

– И до сих пор никто не прошел?

– Вот об этом я и хотел рассказать. Дорогу к сокровищам знали только посвященные жрецы. Жрец заходил в тоннель с четками – толстым шнуром с нанизанными на него черными и белыми бусинами. По ходу движения тоннель время от времени раздваивался, и тогда жрец перекидывал одну бусину. Если бусина была белая, жрец сворачивал налево, если черная – направо. Последняя бусина указывала тоннель, в конце которого и находилась заветная комната. А бусин в четках было не меньше, чем на шее у смуглой подружки Бена.

По таверне прокатился одобрительный смех.

– Говорят, были смельчаки, нашедшие вход в Лабиринт, но ни один из них не вернулся...

– Значит, число путей на каждой развилке удваивается и твои предки нарыли столько нор, сколько зерен обещано за мою доску. А их случайно не кротами звали?! – запальчиво перебил кока Бен.

– Маршрутов может быть и больше, сколь угодно много. Не путай схему Лабиринта с маршрутом, – осадил матроса Сэм. – Тоннель может выводить на уже пройденные пути. И кружить по ним можно вечно. Продолжай, Рахим.

– Итак, – Рахим выстроил на столе цепочку из золотых и серебряных монет: «○ ● ○ ● ●», – читаем: «налево», «направо», «налево», «направо», «направо».

– Жрец должен вернуться. Значит, на обратном пути он будет перебирать бусины в порядке: «● ● ○ ● ○». Но теперь черная бусина значит «налево», а белая «направо», – добавил Боб, наливая Рахиму два бокала. – Однако, если так пойдет и дальше, вы разорите мое заведение.

§ 5. Мартингейл

$\boxed{17 \Leftrightarrow 21}$ – Прошу внимания, джентльмены.

К столу приблизился Толстяк Билл, иногда азартный игрок, но во все остальное время образцовый боцман.

– Раз уж зашел такой ученый спор, не развеете вы заодно и мои сомнения? Этот прохиндей Элвин предложил мне игру в кости на довольно странных условиях. Он называет ставку. Я бросаю кость. Если выпадет от 1 до 5 очков – он платит мне сумму ставки. Если выпадет 6 – я плачу ему двойную ставку.

– Если я не ослышался, – Додо снисходительно посмотрел на боцмана, – в пяти из шести случаев Элвин платит одну ставку Биллу, а в одном из шести – Билл платит две ставки Элвину. Значит, на каждые две ставки, которые отдает Билл, приходится 5 ставок, которые Билл получает. В среднем каждые шесть бросков кости делают Билла на 3 ставки богаче. И в чем здесь сомнения?

– Так-то оно так, – рассудительный боцман почесал затылок. – Но полагаю, шкед предложил игру не ради того, чтобы облагодетельствовать старину Билла.

– Билл прав! Элвин не так прост! – Боб даже подпрыгнул от удовольствия. – Если бы Элвин делал каждый раз одинаковые ставки, например по дукату, то все было бы в точности так, как сказал Додо: дукаты постепенно перетекали бы из кармана юнги в карман боцмана. Но если юнга начнет с 1 дуката и после каждого проигрыша будет удваивать ставку, дождавшись выигрыша, он всегда будет иметь 1 дукат чистого дохода. К примеру, пусть выигрыш выпадет Элвину на седьмом бросании кости, он проиграет $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 63$ дуката, но выигает 64. Эту стратегию игроки называют «мартингейл».

– А если выигрыш долго не наступит?

– Тогда вспомним рассказ Бена. Впрочем, чем больше череда проигышей, тем менее она вероятна. Главное, чтобы у Элвина хватило денег на все удвоения.

Боб поднялся из-за стола.

– Увы, друзья, меня ждут дела. А жаль, давно не был свидетелем такой увлекательной беседы.

– Итак, круг замкнулся. Начали с юнги, им и закончили.

Большой Сэм обвел взглядом команду.

– Джентльмены. Я тоже должен покинуть вас. Надеюсь вы не будете скучать. И не забудьте, в понедельник утром поднимаем паруса!

Комментарии, вопросы и задачи

Египетский счет

$\boxed{19 \Leftrightarrow 23}$ 1) Результат деления из задачи этого параграфа можно представить в виде

$$1\ 625 : 22 = 73\frac{19}{22}.$$

2) Деление можно было продолжить следующим образом:

$1\ 625 : 22$

	1 625	1 408
1	$\boxed{22}$	176
2	44	1 584
4	88	22
8	$\boxed{176}$	1 606
16	352	11
32	704	1 617
64	$\boxed{1\ 408}$	5.5
$\frac{1}{2}$	$\boxed{11}$	1 622.5
$\frac{1}{4}$	$\boxed{5.5}$	
$\frac{1}{8}$	2.75	

Тогда $1\ 625 : 22 \approx 64 + 8 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 73.75$.

Расчет на калькуляторе даст: $1\ 625 : 22 \approx 73.8636$.

3) Хотя древние египтяне обращались с дробными числами несколько иначе, египетский счет вполне годится и для нахождения произведений десятичных дробей:

$$21.72 \times 22.1 = 221 \times 2.172.$$

221	2.172	
$\boxed{1}$	2.172	278.016
2	4.344	139.008
$\boxed{4}$	8.688	34.752
$\boxed{8}$	17.376	17.376
$\boxed{16}$	34.752	8.688
32	69.504	2.172
$\boxed{64}$	139.008	480.012
$\boxed{128}$	278.016	

Таким образом, $21.72 \times 22.1 = 480.012$.

В левом столбце таблицы число 221 разложено по степеням 2, т. е. $221 = 1 + 4 + 8 + 16 + 64 + 128$, что равносильно его представлению в двоичной системе:

$$221_{10} = 2^7 + 2^6 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^0 = 11\ 011\ 101_2.$$

Аналогично можно выполнить и операцию деления одной десятичной дроби на другую.

4) Попробуйте выполнить умножение и деление одних и тех же чисел сначала привычным методом «в столбик», затем, применив египетский счет. Сравните величины времени, затраченного на вычисления по каждому методу.

Гири Толстяка Додо

$\boxed{21 \Leftrightarrow 25}$ 1) Если в вашем распоряжении имеется набор гирь $\{1, 2, 4, 8, 16, \ldots\}$, любое целое значение веса можно однозначно задать их комбинацией. Достаточно записать значение веса в двоичной системе и за каждую единичку поставить гирю веса, равного весу ее разряда. При этом все гири будут стоять на чаше, уравновешивающей груз.
2) Если разрешено ставить гири на обе чаши весов, задачу лучше описывает другая математическая модель. Разложим число, равное весу груза, в троичную систему счисления. Как мы знаем из теории, такое разложение единственно. Запись n-разрядного числа в троичной системе имеет вид $a_{n-1}3^{n-1} + a_{n-2}3^{n-2} + \ldots + a_1 3 + a_0$, где $a_i \in \{0, 1, 2\}$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Теперь перейдем к троичной записи со множеством цифр $\{0, 1, -1\}$. В любом месте записи $2 \cdot 3^i$ можно заменить на $-3^i + 3^{i+1}$. Заметим также, что $3^i + 3^i = 2 \cdot 3^i = -3^i + 3^{i+1}$. Договоримся в записи числа цифру -1 обозначать $\overline{1}$. Тогда $2 = 1\overline{1}$, $22 = 1\overline{1}2 = 10\overline{1}$.

Например, $142_{10} = 12\ 021_3 = 12\ 1\overline{1}1_3 = 2\overline{1}\ 1\overline{1}1_3 = 1\overline{1}\overline{1}\ 1\overline{1}1_3$. Таким образом, чтобы взвесить груз в 142 фунта, надо на свободную чашу весов поставить гири весом 243, 9 и 1, а на чашу с грузом (отрицательный вес) 81, 27 и 3. Задача подробно разобрана в книге Депмана [4, с. 37–38].

3) Взвесьте грузы массой 9, 10, 21 и 27, используя сначала первый, а затем второй из рассмотренных наборов гирь.

4) В Советском Союзе находились в обращении бумажные купюры достоинством в 1, 3, 5, 10, 25 и 50 рублей. Вопрос: какой набор из 5 купюр лучше обеспечит платежи без сдачи в сумме от 1 до 49 рублей: $\{1,\ 3\ ,5,\ 10,\ 25\}$ или $\{1,\ 2\ ,4,\ 8,\ 16\}$? Оказывается, ответ не так уж очевиден. На этот раз мы разрешим иметь каждую купюру в любом количестве, как и должно быть в жизни. Существовавший набор обеспечивал выплату без сдачи не более чем 4 купюрами любой суммы, кроме 42, 44, 47 и 49 руб. А набор из степеней 2 позволяет 4 купюрами выдать любую сумму, кроме 31, 39, 43, 45, 45 и 47 руб. Но главное преимущество существовавшего набора в том, что он лучше обслуживал суммы, кратные 10. Однако, как сказал бы сейчас Большой Сэм, мы отклонились от курса.

Рассказ матроса Бена

$\boxed{23 \Leftrightarrow 26}$ 1) Шахматы появились примерно 3 тыс. лет назад в Индии. Существует несколько вариантов легенды об их изобретателе, которые расходятся в деталях: кто был правитель, кем был изобретатель и какие были зерна? Эти расхождения не затрагивают сути легенды.

2) Вес одного пшеничного зерна равен 0.065 грамма. Тогда вес 18 446 744 073 709 551 615 зерен составит около 1 200 миллиардов тонн.

3) Аналогичная задача родом из Древнего Рима. Цезарь спросил храброго полководца, вернувшегося в Рим после кровопролитных сражений, какую награду за службу тот хотел бы получить. Полководец запросил слишком большую сумму, с которой Цезарю не хотелось расставаться. И тогда он предложил воину забрать награду в казначействе самому следующим образом: в первый день для него будет отлита золотая монета весом в 1 грамм, во второй – 2 грамма. Далее каждый день – вдвое больше, чем в предыдущий. И продолжаться так будет до тех пор, пока полководец может сам уносить монеты. Полководец обрадовался. Но оказалось, что уже 17-я монета весила 65.536 кг и, скорее всего, она стала последней, которую герой мог вынести самостоятельно, ибо следующая монета

весила уже 131.072 кг. В таком случае полководец вынес всего 131.071 кг золота.

Тайна жрецов

$\boxed{25 \Leftrightarrow 28}$ 1) Систему точек и линий (ребер), соединяющих некоторые пары точек, в математике называют «графом», а сами точки – «вершинами графа». Если существует путь, соединяющий любые две вершины графа, граф называют связным. Простым циклом называют путь (маршрут), начальная и конечная точки которого совпадают, а ребра, по которым проходит путь, ни разу не повторяются. Связный граф без простых циклов называют «деревом» (рис. 1а).

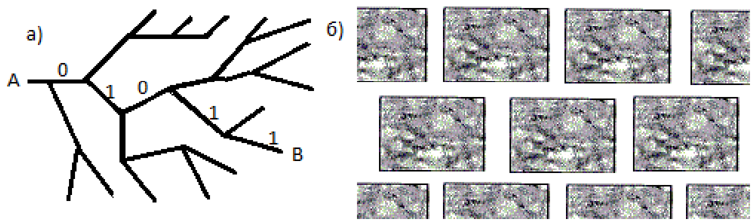

Рис. 1. Лабиринт

2) Маршруты движения между «кирпичиками» (рис. 1б) принадлежат некоторому графу с циклами.

3) Если в наборе «○●○●●» белые бусины обозначить нулем,

а левые – единицей, маршрут можно записать в виде 01011 (см. рис. 1а). Тогда для записи обратного пути надо сначала записать двоичный код в обратном порядке: 11010, а затем инвертировать его: 00101. Тогда 0 по-прежнему будет означать поворот «налево», а 1 – «направо».

4) Всегда ли можно обойти все вершины «дерева» за конечное время? Разумеется, мы говорим о конечном графе. Всегда. Для этого можно применить, например, следующую простую стратегию: при обходе все время держаться рукой за левую стенку тоннеля.

5) Пусть в каждой точке разветвления тоннель делится на n тоннелей. Тогда маршрут можно представить цепочкой $a_1a_2a_3\ldots a_m$, где m – количество ребер графа, которые предстоит пройти, $a_i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, каждая цифра a_i указывает номер тоннеля при отсчете слева, на который надо свернуть, $i = 1, 2, \ldots, m$. Как найти последовательность цифр, определяющую обратный путь? Записав последовательность $\{a_i\}$ в обратном порядке и заменив все цифры их дополнениями до $n-1$, мы получим последовательность $b_1b_2b_3\ldots b_m$, в которой $b_i = n - a_{m-i}$. Например, если $n = 6$, исходную цепочку 20511245 мы для описания маршрута обратного пути заменим на цепочку 01344053.

6) Последовательность нулей и единичек иногда называют «битовой цепочкой». Можно ли посредством битовой

цепочки однозначно задать маршрут в произвольном графе, т. е. графе, из любой вершины которого может выходить произвольное, в общем случае разное число ребер? Если можно, то как на основании этой цепочки описать обратный путь?

Мартингейл

$\boxed{26 \Leftrightarrow 30}$ 1) Стратегию, основанную на последовательном удвоении ставки, с середины XVIII в. стали называть «мартингейлом». Легенда об изобретателе шахмат иллюстрирует тот факт, что мартингейл «по карману» только состоятельному игроку. Однако на свете встречаются обладатели огромных состояний. Такой клиент может разорить заведение. Именно поэтому в 20-х годах прошлого столетия игорный дом Монте-Карло запретил удвоение ставки более 12 раз подряд. Альберту Эйнштейну приписывают утверждение: «Рулетку может одолеть игрок с несметным капиталом в игре, длящейся вечность». Таким образом, успех юнги Элвина неочевиден.

2) Знакомому с теорией вероятностей читателю предлагаем следующую задачу. Некто испытывает удачу в многократно повторяющейся игре, в которой вероятность выигрыша равна 0.1. То есть при одном испытании игрок

располагает всего одним из десяти шансов на выигрыш. Какова вероятность того, что выигрыш наступит не далее чем на 13-й попытке? Если вероятность выигрыша при одном испытании $p = 0.1$, вероятность проигрыша равна $q = 1 - p = 0.9$. Вероятность проиграть 13 раз подряд $q^{13} \approx 0.254$. Тогда вероятность выигрыша хотя бы в одном из 13 испытаний $1 - q^{13} \approx 0.746$. Значит, игру, в которой вероятность не на нашей стороне, иногда можно заменить более сложной игрой, в которой вероятность уже на нашей стороне. Однако человек с небольшим состоянием может разориться и там, где вероятность на его стороне.

3) Обозначим проигрыш цифрой 0, а выигрыш 1, тогда любая реализация игры из предыдущего пункта описывается одной из цепочек бит:

$$1, 01, 001, \ldots, \overbrace{0\ldots0}^{k \text{ раз}}1, \ldots$$

Найти математическое ожидание выигрыша в этой игре, если после каждого проигрыша игрок удваивает ставку, а выигрыш равен двум ставкам.

Вместо эпилога

$\boxed{28 \Leftrightarrow 34}$ «Почему снова пираты?! Неужели нет настоящих героев?!» – воскликнет придирчивый читатель. Но кто в детстве не играл в пиратов? И уже потому хочется заступиться за морских разбойников. **В XVII в. понятия «пират» и «мореплаватель» были почти тождественны**. Купцы при случае непрочь были поживиться грабежом, а пираты нередко поступали на службу в королевский флот. Губернаторы английских и французских островов Вест-Индии выдавали за вознаграждение грамоту, в которой указывалось, на какие корабли и колонии имеет право нападать ее обладатель и в каком порту должен сбывать краденое. На островах Тортуга и Гаити пираты отдавали 10 % добычи французскому губернатору, а с Ямайки $\frac{1}{10}$ доля добычи поступала верховному лорд-адмиралу Англии и $\frac{1}{15}$ – королю. Здесь прославился Порт-Ройал, располагавшийся на западном конце длинной и узкой косы Палисадос, южной границы гавани Кингстон. Основанное испанцами в 1518 г. как Кагуэй, при англичанах это поселение стало столицей Ямайки и одновременно столицей пиратов Карибского моря, а также крупным центром работорговли. Благодаря изобилию питейных заведений и всевозможных притонов, Порт-Ройал заслужил титул «пиратского Вавилона». Но 7 июня 1692 года после сильнейшего землетрясения, сопровождавшегося цунами,

$\frac{2}{3}$ города ушло под воду. Погибло более 5 тысяч человек. В гавани затонуло 50 кораблей. После этого колониальная администрация перенесла столицу Ямайки в небольшую деревушку Кингстон на противоположном берегу залива.

А что представлял собой королевский флот? На службе с матросами обращались, как со скотом. Часть экипажей составляли люди, силой захваченные на берегу, которых держали на положении рабов. На время пребывания корабля в порту их закрывали в трюме. Положение пиратов было лучше. Все важные вопросы они решали на общем собрании. В частности, избирали и снимали с должности капитана. В случае увечья (потеря руки, ноги) пират получал разовую компенсацию, которая позволяла ему начать на берегу свое дело.

Лучше ли жилось в Европе? В течение века здесь шли изнурительные войны, общее количество убитых и раненых в которых превысило 2 млн человек: войны против Франции с участием Австрии, Испании, Голландии, Швеции, Дании, Англии, Савойи и Бранденбурга; войны Турции с Россией, Австрией, Венгрией, Польшей и Венецией. При этом во Франции на дуэлях гибло дворян еще больше, чем на войнах. Пока воевали короли, неустанно трудилась святая инквизиция, которая в этот славный век отправила на костры более 100 тыс. одних только ведьм. Добавим и геноцид коренного населения в колониях, рабство. А какие козни в свободное от угнетения крестьян время строили друг другу феодалы?! В общем, время было такое! Так что вы хотите от пиратов?

И тогда же был заложен фундамент современной науки. В Швейцарии на XVII век приходится творчество одного из разработчиков математического анализа Иоганна Бернулли, трудится над основами теории вероятностей Якоб Бернулли, Иоганн Ран совершенствует математическую символику. В Италии занимается проблемами предела, площади и суммирования «бесконечных рядов» католический священник Пьетро Менголи, Рафаэль Бомбелли вводит комплексные числа и разрабатывает базовые правила действия с ними. В Германии Иоганн Кеплер открывает законы движения небесных тел Солнечной системы; философ, логик, математик, механик, физик, юрист, историк, дипломат, изобретатель и языковед, основатель и первый президент Берлинской Академии наук Готфрид Вильгельм Лейбниц закладывает идеи машинного моделирования функций человеческого мозга, формулирует один из важнейших вариационных принципов физики – принцип наименьшего действия, исследует вопрос о возникновении российской правящей династии, создает теорию исторического происхождения языков и их классификацию. В Англии Исаак Ньютон разрабатывает классическую механику, открывает закон всемирного тяготения, дифференциальное и интегральное исчисление, между делом управляя Королевским монетным двором; Уильям Отрод и Эдмунд Унгейт изобретают первые варианты логарифмической линейки; Томас Хэрриот составляет карту Луны, описывает солнечные пятна; Генрих Бригс создает таблицу десятичных логарифмов; англиканский священник Джон Валлис трудится над основами математического анализа. Нидерландский изобретатель Корнемус Якобсон Дреббель строит первую в мире действующую подводную лодку; Антони ван Левенгук наблюдает посредством созданного им микроскопа бактерии. Во Франции философ, математик и боевой офицер Рене Декарт вводит прямоугольную систему координат, определяет понятие «количество движения» и открывает закон его сохранения; Альберт Жирар впервые дает объяснение отрицательным корням уравнений, приводит в систему плоскую и сферическую тригонометрию. В Дании Олаф Ремер находит близкое к истинному значение скорости света.

Ну а как обстояли дела в России? В XVII веке мудрый Алексей Тишайший мирно взял под свою руку Сибирь и Дальний Восток. Успехи царя Алексея закрепил его сын Петр Первый, который создал российскую науку, промышленность, регулярную армию и флот. Но это уже история другого века.

Теперь каждый школьник знает Ньютона и Декарта, но мало кто назовет имена правивших в их время монархов.

30 ⇐

Список литературы

[1] Белый, Е. К. Прогрессии / Е. К. Белый. – Петрозаводск : Изд-во ПетрГУ, 2016. – 132 с.

[2] Ван дер Варден, Б. Л. Пробуждающаяся наука. Математика Древнего Египта, Вавилона и Греции / Б. Л. Ван дер Варден. – Москва : Государственное издательство физико-математической литературы, 1968. – 202 с.

[3] Выгодский, М. Я. Арифметика и алгебра в древнем мире / М. Я. Выгодский. – Москва : Наука, 1967. – 368 с.

[4] Депман, И. Я. История арифметики / И. Я. Депман. – Москва : Просвещение, 1965. – 416 с.

[5] Рыбников, К. А. История математики : в 2 т. Т. 1. / К. А. Рыбников. – Москва : Изд-во МГУ, 1960. – 192 с.

Учебное издание

Белый Евгений Константинович

Математика не для ЕГЭ

Египетский счет

Учебное пособие для учащихся средних школ

Редактор *Е. Е. Порывакина*

Оформление обложки *Е. Ю. Тихоновой*

Компьютерная верстка *Е. К. Белого*

Подписано в печать 20.04.17. Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная. Уч.-изд. л. 1,6. Тираж 200 экз. Изд. № 45

Отпечатано в типографии Издательства ПетрГУ
185910, г. Петрозаводск, пр. Ленина, 33