Кировское областное государственное образовательное автономное учреждение среднего профессионального образования

"Вятский электромашиностроительный техникум"

Пособие по изучению темы:

**«Тригонометрические уравнения»**

Киров

2014 г.

Пособие печатается по решению предметно- цикловой комиссии естественно- научных дисциплин.

Автор - Лопатина Наталья Владимировна

Пособие предназначено для самостоятельного изучения темы: «Тригонометрические уравнения» студентами очного отделения КОГОАУ СПО ВЭМТ.

Содержание

1. Простейшие тригонометрические уравнения........................................... 4-12

1.1 Арккосинус. Решение уравнения cosx=b..................................................4-5

1.2 Арксинус. Решение уравнения sinx=b......................................................6-8

1.3 Арктангенс. Решение уравнения tgx=b.....................................................8-10

1.4 Арккотангенс. Решение уравнения ctgx=b..............................................10-12

2. Тригонометрические уравнения.................................................................12-16

2.1 Уравнения, приводимые к квадратным...................................................12-13

2.2 Однородные уравнения первой степени..................................................13-14

2.3 Однородные уравнения второй степени..................................................14-15

2.4 Уравнения, решаемые разложением на множители...............................15-16

3. Контрольная работа по теме........................................................................16

4. Справочный материал..................................................................................17-18

***Раздел 1. Простейшие тригонометрические уравнения.***

**1.1 Арккосинус. Решение уравнения cosx = b**.

*Арккосинусом числа b называется такое число х, косинус которого равен b.*

*arсcos (-b)=π- arсcosb*

*Пример. 1) arсcos 1=0*

*Воспользуемся таблицей значений тригонометрических функций. В строке «****cosα****» найдем значение 1 и посмотрим вверху таблицы соответствующий угол в радианах.*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ***α* *(град)*** |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| ***(рад)*** | ***0*** |  |  |  |  |  |  |  |  |
| ***sin α*** | ***0*** |  |  |  | ***1*** |  |  |  | ***0*** |
| ***cosα*** |  |  |  |  | ***0*** |  |  |  | ***-1*** |
| ***tgα*** | ***0*** |  | ***1*** |  | ***-*** |  | ***-1*** |  | ***0*** |
| ***ctgα*** | ***-*** |  | ***1*** |  | ***0*** |  | ***-1*** |  | ***-*** |

*2) arсcos=*

*3)arсcos(- )= π- arсcos=π- = =*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| * Задания для самостоятельной работы.   Заполните таблицу.   |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | |  |  |  |  | -1 | 0 | 2 | | **arccos b** |  |  |  |  |  |  | |
|  |

*Решение уравнения* ***cosx = b****.*

*Если* ***b,*** *то уравнение имеет бесконечно много корней, которые находятся по обобщенной формуле****:x =±arсcosb +2где k.***

*Если* ***b,*** *то уравнение не имеет корней.*

* Вопросы для самопроверки

|  |
| --- |
| 1. Каково будет решениеуравнения cosx = b при ‌b ‌ > 1? |
| 1. При каком значении b уравнение cosx = b имеетрешение? |
| Какой формулойвыражается это решение? |
| 1. В каком промежутке находится arccosb ? |
| В каком промежуткенаходится значение b? |
| 1. Каким будет решениеуравнения cosx = 1? |
| 1. Каким будет решениеуравнения cosx = -1? |
| 1. Каким будет решениеуравнения cosx = 0? |
| 1. Чему равняется arccos( - b)? |

Примеры решения тригонометрических уравнений.

|  |  |
| --- | --- |
| ***Пример1.***  Решить уравнение ***cosx= .***  b=  x = ±arсcos +2где k  x = +2где k  Ответ: x = +2где k | ***Пример2.***  Решить уравнение 2***cosx+1=0.***  2cosx +1=0  2cosx= 1  cosx=  b=  x = ±arсcos +2где k  x = )+2где k  x = +2где k  Ответ: x = +2где k |
| ***Пример3.***  Решить уравнение ***cos(5х****)****= .***  b=  5х = ±arсcos +2где k  5х= +2где k  5х= +2где k׀ :5  х= +где k  Ответ: где k | ***Пример4.***  Решить уравнение ***cos) = .***  b=  = π+2где k  = +2где k  = +2где k׀ ∙5  х= +10где k  Ответ: х= +10где k |

* Задания для самостоятельной работы.

Решите уравнения.

|  |  |
| --- | --- |
| 1)cosx =  2) cosx =  3) 2cosx-10=0  4) cos=0 | 5) cos4x= 1  6)cos(2х)=  7)cos) =  8)2cos()= |

**1.2 Арксинус. Решение уравнения sinx = b**.

*Арксинусом числа b называется такое число х, косинус которого равен b.*

*arсsin (-b)=- arсsinb*

*Пример. 1) arсsin 1=*

*Воспользуемся таблицей значений тригонометрических функций. В строке «****sinα****» найдем значение 1 и посмотрим вверху таблицы соответствующий угол в радианах.*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ***α* *(град)*** |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| ***(рад)*** | ***0*** |  |  |  |  |  |  |  |  |
| ***sin α*** | ***0*** |  |  |  | ***1*** |  |  |  | ***0*** |
| ***cosα*** | ***1*** |  |  |  | ***0*** |  |  |  | ***-1*** |
| ***tgα*** | ***0*** |  | ***1*** |  | ***-*** |  | ***-1*** |  | ***0*** |
| ***ctgα*** | ***-*** |  | ***1*** |  | ***0*** |  | ***-1*** |  | ***-*** |

*2) arсsin=*

*3) arсsin(-)= - arсcos = -*

|  |
| --- |
| * Задания для самостоятельной работы. |

Заполните таблицу.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  | 1 | 1.5 | 0 |
| **arcsin b** |  |  |  |  |  |  |

*Решение уравнения* ***sinx = b****.*

*Если* ***b,*** *то уравнение имеет бесконечно много корней, которые находятся по обобщенной формуле****:x =arсsinb +гдеk.***

*Если* ***b,*** *то уравнение не имеет корней.*

* Вопросы для самопроверки

|  |
| --- |
| 1. Каково будет решениеуравнения sinx = b при ‌b ‌ > 1 |
| 1. При каком значении b уравнение sinx = b имеетрешение? |
| Какой формулойвыражается это решение? |
| 1. В каком промежутке находится arcsinb ? |
| В каком промежуткенаходится значение b? |
| 1. Каким будет решениеуравнения sinx = 1? |
| 1. Каким будет решениеуравнения sinx = -1? |
| 1. Каким будет решениеуравнения sinx = 0? |

Примеры решения тригонометрических уравнений.

|  |  |
| --- | --- |
| ***Пример1.***  Решить уравнение ***sinx= .***  b=  x = +где k  x = +где k  Ответ: x = +где k | ***Пример2.***  Решить уравнение 2***sinx+1=0.***  2sinx +1=0  2sinx= 1  sinx =  b=  x = arcsin +гдеk  x = )+где k  x = +где k  Ответ: x = +где k |
| ***Пример3.***  Решить уравнение ***sin(3х****)****= .***  b=  3х = +где k  3х= +где k  3х= +где k׀ :3  х= +где k  Ответ: х= +где k | ***Пример4.***  Решить уравнение ***sin) = .***  b=  = +где k  = +2где k  = 2где k׀ ∙2  х= 4где k  Ответ: х= 4где k |

* Задания для самостоятельной работы.

Решите уравнения.

|  |  |
| --- | --- |
| 1)sinx =  2) sinx =  3) 2sinx-5=0  4) sin=0 | 5) sin3x= 1  6)sin(7х)=  7)sin) =  8)2sin()= |

**1.3 Арктангенс. Решение уравнения tgx = b**.

*Арктангенсом числа действительного числа b называется такое число х, тангенс которого равен b.*

*arсtg (-b)=- arсtgb*

*Пример. 1) arсtg 1=*

*Воспользуемся таблицей значений тригонометрических функций. В строке «****tgα****» найдем значение 1 и посмотрим вверху таблицы соответствующий угол в радианах.*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ***α* *(град)*** |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| ***(рад)*** | ***0*** |  |  |  |  |  |  |  |  |
| ***sin α*** | ***0*** |  |  |  | ***1*** |  |  |  | ***0*** |
| ***cosα*** | ***1*** |  |  |  | ***0*** |  |  |  | ***-1*** |
| ***tgα*** | ***0*** |  | ***1*** |  | ***-*** |  | ***-1*** |  | ***0*** |
| ***ctgα*** | ***-*** |  | ***1*** |  | ***0*** |  | ***-1*** |  | ***-*** |

*2) arсtg=*

*3) arсtg(-)= - arсtg= -*

|  |
| --- |
| * Задания для самостоятельной работы. |

Заполните таблицу.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | **-** | 1 | -1 | 0 | 2 |
| **arctgb** |  |  |  |  |  |  |

*Решение уравнения* ***tgx = b****.*

*Решение данного уравнения находят по обобщенной формуле:*

***x = arctgb +гдеk***

|  |
| --- |
| * Вопросы для самопроверки |
| 1. При каком значении b уравнение tgx = b имеет решение? |
| Какой формулойвыражается это решение? |
| 1. В каком промежутке находится arctgb ? |
| В каком промежуткенаходится значение b? |
| 1. Каким будет решение уравнения tgx = 1? |
| 1. Каким будет решение уравнения tgx = -1? |
| 1. Каким будет решение уравнения tgx = 0? |

Примеры решения тригонометрических уравнений.

|  |  |
| --- | --- |
| ***Пример1.***  Решить уравнение ***tgx= .***  x = +где k  x = +где k  Ответ: x = +где k | ***Пример2.***  Решить уравнение ***tgx+3=0.***  tgx =-3  tgx =  tgx=  x = +где k  x = +где k  Ответ: x = +где k |
| ***Пример3.***  Решить уравнение ***tg(4х****)****= 0.***  4х =arctg 0+где k  4х= 0 +где k  4х= 0+где k׀ :4  х= +где k  Ответ: х= +где k | ***Пример4.***  Решить уравнение ***tg) = .***  = arctg(-1)+где k  = +где k  = +где k  = где k  = где k׀ ∙2  x=где k  Ответ:x=где k |

* Задания для самостоятельной работы.

Решите уравнения.

|  |  |
| --- | --- |
| 1)tgx =  2) tgx =  3) 2tgx+7=0  4) tg=0 | 5) tg(-4x)= 1  6)tg(5х)=  7)tg) =  8)tg()= |

**1.4 Арккотангенс. Решение уравнения ctgx = b**.

*Арккотангенсом числа действительного числа b называется такое число х, котангенс которого равен b.*

*arссtg (-b)=- arсtgb*

*Пример. 1) arссtg 1=*

*Воспользуемся таблицей значений тригонометрических функций. В строке «c****tgα****» найдем значение 1 и посмотрим вверху таблицы соответствующий угол в радианах.*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ***α* *(град)*** |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| ***(рад)*** | ***0*** |  |  |  |  |  |  |  |  |
| ***sin α*** | ***0*** |  |  |  | ***1*** |  |  |  | ***0*** |
| ***cosα*** | ***1*** |  |  |  | ***0*** |  |  |  | ***-1*** |
| ***tgα*** | ***0*** |  | ***1*** |  | ***-*** |  | ***-1*** |  | ***0*** |
| ***ctgα*** | ***-*** |  | ***1*** |  | ***0*** |  | ***-1*** |  | ***-*** |

*2) arссtg=*

*3) arссtg(-)= π- arсtg=π - ==*

|  |
| --- |
| * Задания для самостоятельной работы. |

Заполните таблицу.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | **-** | -1 | 1 | 1.5 | 0 |
| **arcctg b** |  |  |  |  |  |  |

*Решение уравнения* ***сtgx = b****.*

*Решение данного уравнения находят по обобщенной формуле:*

***x = arсctgb +гдеk***

|  |
| --- |
| * Вопросы для самопроверки |
| 1. При каком значении b уравнение ctgx = b имеет решение? |
| Какой формулойвыражается это решение? |
| 1. В каком промежутке находится arcctgb ? |
| В каком промежуткенаходится значение b? |
| 1. Каким будет решение уравнения ctgx = 1? |
| 1. Каким будет решение уравнения ctgx = -1? |
| 1. Каким будет решение уравнения ctgx = 0? |

Примеры решения тригонометрических уравнений.

|  |  |
| --- | --- |
| ***Пример1.***  Решить уравнение c***tgx= .***  x = +где k  x = +где k  Ответ: x = +где k | ***Пример2.***  Решить уравнение ***tgx+3=0.***  ctgx =-3  ctgx =  ctgx=  x = +где k  x = +где k  x = +где k  Ответ: x = +где k |
| ***Пример3.***  Решить уравнение c***tg(2х****)****= 0.***  2х =arcctg 0+где k  2х= +где k  2х= +где k  2х= где k  2х= где k ׀ :2  х= +где k  х= +где k  Ответ: х= +где k | ***Пример4.***  Решить уравнение c***tg) = .***  = arcctg(-1)+где k  = +где k  = +где k  = +где k  = где k  = где k׀ ∙3  x=где k  Ответ:x=где k |

* Задания для самостоятельной работы.

Решите уравнения.

|  |  |
| --- | --- |
| 1)ctgx =  2) ctgx =  3) 2ctgx+1=0  4) ctg=0 | 5) ctg(-5x)= 1  6)ctg(4х)=  7)***c***tg) =  8)tg()= |

***Раздел 2. Тригонометрические уравнения.***

***2.1* Уравнения, приводимые к квадратным**

***Пример 1.***

***2sin2x + 3sinx -2=0***

Это квадратное уравнение относительно sinx.

Введём новую переменную у = sinx.

Тогда уравнение примет вид:

2у2 + 3у -2=0

Это квадратное уравнение относительно у.

D = 32 - 4∙2∙(-2) = 9 + 16 = 25.

у1 =, у2 =-2.

а) у1 =, т.е. sinx =, х = (-1)n.+πn, nZ.

б) у2 =-2, т.е. sinx = -2, нет корней.

Ответ: х = (-1)n.+πn, nZ.

Задания для самостоятельной работы

Решите уравнения.

1. 6sin2x - 5sinx+1=0.
2. 8sin²x – 6sinx-5 =0.

***Пример 2.***

***6sin2x – 5cosx +5=0***

Заменяя sin2x = 1-cos2x, получим

6· (1-cos2 x)-5cosx+5 =0

6 – 6cos2 x-5cosx+5 =0

- 6cos2x-5cosx+11 =0

Разделим каждое слагаемое уравнения на (-1).

6cos2x + 5cosx-11=0

Получили квадратное уравнение относительно cosx.

Пусть у = cosx, тогда уравнение принимает вид:

6у2 + 5у – 11= 0,

у1= 1, у2 = -.

а) cosx = 1, х1= 2πn, nZ.

б) cosx= -, нет корней.

Ответ: х= 2πn, nZ.

* Задания для самостоятельной работы

Решите уравнения.

1. 8cos2x + 6sinx – 3=0.
2. 2sin2x – 5cosx – 5=0.

***Пример 3.***

***tgx + 3ctgx = 4***

Заменяя ctgx=, получим tgx + = 4,

Умножим каждое слагаемое на tgx:

tg2x - 4 tgx + 3=0, ОДЗ: х≠+ πn, n∈Z.

Это квадратное уравнение относительно tgx.

Пусть tgx = у, тогда

у2- 4у + 3=0,

у1= 3, у2= 1.

а) tgx = 3, х1= arctg3 + πn, n∈Z.

б) tgx = 1, х2 =  + πn, n∈Z.

Ответ: х1= arctg3 + πn, n∈Z,

х2 =  + πn, n∈Z.

* Задания для самостоятельной работы

Решите уравнения.

1. tgx – 4сtgx = 3.
2. tgx - 2сtgx + 1= 0.

**2.2 Однородные тригонометрические уравнения.**

**2.2.1. Однородные тригонометрические уравнения первой степени.**

***Пример 1.***

***sinx - 2cosx = 0***

В однородных уравнениях первой степени каждое слагаемое 1-ой степени.

Делим обе части на cosx,

cosx≠0 (иначе и sinx =0, что невозможно, так как sin2x + cos2x = 1).

Получим

= 0

tgx – 2 =0

tgx = 2

х = arctg2 + πn, n∈Z.

Ответ:

х= arctg2 + πn, n∈Z.

* Задания для самостоятельной работы

Решите уравнения.

1. sinx+3cosx = 0.
2. cosx = sinx.

**2.2.2. Однородные тригонометрические уравнения второй степени.**

***Пример 1.***

***sin2x*** *-* ***5sinx·cosx +6cos 2x =0***

В однородных уравнениях второй степени каждое слагаемое 2-ой степени. Решаем делением обеих частей на cos2x≠0 (или sin2x≠0).

Разделим обе части на cos2x,

cosx≠0 (иначе и sinx =0, что невозможно, так какsin2x + cos2x =1)

Получим 

0,

tg2x - 5 tgx+ 6=0,

Пусть tgx = у, у2 – 5у + 6=0,

у1= 2, у2 =3.

а) tgx =2, х1= arctg2 + πn, n∈Z.

б) tgx =3, х2= arctg3 + πn, n∈Z.

Ответ: х1= arctg2 + πn, n∈Z.

х2= arctg3 + πn, n∈Z.

* Задания для самостоятельной работы

Решите уравнения.

1. 3sin 2x - 4sinx·cosx + cos 2x = 0.
2. 5 cos 2x + 4sinx·cosx - cos 2x = 0.

***Пример 2.***

***22cos2x + 8sinx·cosx = 7***

Представим 7=7·1= 7·( sin2x + cos2x), получим однородное уравнение

2-ой степени.

Разделим обе части на cos2x,

cosx≠0 (иначе и sinx =0, что невозможно, так какsin2x + cos2x =1)

Получим 7tg2x - 8tgx – 15 = 0.

Пусть tgx = у, 7у2 – 8у – 15=0,

у1= -1, у2 = .

а) tgx = -1, х1= -  + πn, n∈Z.

б) tgx = , х2= arctg + πn, n∈Z.

Ответ: х1= -  + πn, n∈Z;

х2= arctg + πn, n∈Z.

* Задания для самостоятельной работы

Решите уравнения.

1. 6sin2x + 4sinx·cosx = 1.
2. 4sin2x – sin2x = 3.

**2.3 Уравнения, решаемые вынесением общего множителя за скобки.**

***Пример1.***

***sin2x+2sinx=0***

Вынесем sinxза скобки, получаем

sinx(sinx + 2)=0

sinx=0 илиsinx + 2=0

x = ksinx = -2 корней нет, так какb = -2

Ответ:x = k

***Пример2.***

**cos2x – 3sin2x = 0**

Заменяя sin2x = 2sinx·cosx, получим

cos2x - 3·2sinx·cosx =0.

Вынесем множитель cosx за скобки:

cosx(cosx – 6sinx) = 0.

а) cosx = 0, х = 2πn, n∈Z,

или

б) cosx - 6sinx= 0 – однородное уравнение 1-ой степени.

Делим обе части на cosx,

cosx≠0 (иначе и sinx =0, что невозможно, так как sin2x + cos2x = 1).

Получим 1-6tgx =0, tgx = ,

х = arctg + πn, n∈Z.

Ответ: х1 =2πn, n∈Z,

х2= arctg + πn, n∈Z

* Задания для самостоятельной работы

Решите уравнения.

1) 6tg2x + 4tgx = 0.

2) 5sin2x – sin2x = 0.

***Раздел 3.***

**3.1 Контрольная работа по теме: "Тригонометрические уравнения".**

1. Решите уравнение:

а) sin 4x =

б) cos =

в) 2tgх – 2 = 0

2. Решите уравнение и найдите сумму его корней, принадлежащих промежутку: ctg (3x + ) = ; [-;π]

3. Решите уравнение:

а) 4sin² x – 5sinx + 1=0

б) 2sin²x- 5sinx cosx + 7cos²x=1

в) sin² x +sinxcosx =0

***Раздел 4.Справочный материал.***

***Таблица значений тригонометрических функций***

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | ***0*** |  |  |  |  |  |  |  |  |
| ***sin α*** | ***0*** |  |  |  | ***1*** |  |  |  | ***0*** |
| ***cosα*** |  |  |  |  | ***0*** |  |  |  | ***-1*** |
| ***tgα*** | ***0*** |  | ***1*** |  | ***-*** |  | ***-1*** |  | ***0*** |
| ***ctgα*** | ***-*** |  | ***1*** |  | ***0*** |  | ***-1*** |  | ***-*** |

***Основные тригонометрические тождества***

***tg***

***tg ctg***

***1+1+***

***Формулы двойного аргумента***

***sin2= 2sincos***

***cos2= =***

***tg2***

***Тригонометрические уравнения***

|  |  |
| --- | --- |
| ***cosx = b , b***  ***x =±arсcosb +2где k*** | ***Частные случаи***  ***cosx =0, x = k***  ***cosx =1, x = 2где k***  ***cosx =1, x =2где k*** |
| ***sin x = b , b***  ***x = arсsin b +где k*** | ***Частные случаи***  ***sinx =0, x = k***  ***sinx =1, x = +2где k***  ***sinx =1, x = 2где k*** |
| ***tg x = b , b***  ***x = arctg b +где k*** | ***сtg x =b , b***  ***x = arcctg b +где k*** |