## Методы решения тригонометрических уравнений

Тригонометрические уравнения занимают одно из центральных мест в курсе математики средней школы, как по содержанию учебного материала, так и по способам учебно-познавательной деятельности, которые могут и должны быть сформированы при их изучении и применены к решению большого числа задач теоретического и прикладного характера.

Следует заметить, что решение тригонометрических уравнений создаёт предпосылки для систематизации знаний учащихся, связанных со всем учебным материалом по тригонометрии (например, свойства тригонометрических функций, приёмы преобразования тригонометрических выражений и т.д.) и даёт возможность установить действенные связи с изученным материалом по алгебре (уравнения, равносильность уравнений, тождественные преобразования алгебраических выражений и т.д.).

Считается, что практически все тригонометрические уравнения сводятся к простейшим. Рассмотрим методы, которые наиболее часто используются при решении тригонометрических уравнений:

1. равенство одноименных тригонометрических функций;
2. способ замены (сведение к алгебраическим уравнениям);
3. разложение на множители;
4. однородные уравнения;
5. преобразование суммы тригонометрических функций в произведение и преобразования произведения в сумму;
6. использование формул понижения степени;
7. введение вспомогательного аргумента;
8. графический метод.

### 4.1. Равенство одноименных тригонометрических функций

1. Два угла имеют равные синусы тогда и только тогда, когда они отличаются друг от друга на четное число полупериодов, или в сумме составляют нечетное число полупериодов :

 (5)

1. Два угла имеют равные косинусы тогда и только тогда, когда и в сумме, и в разности они дают четное число полупериодов :

 где *.* (6)

1. Два угла имеют равные тангенсы (котангенсы) тогда и только тогда, когда одновременно выполняются следующие условия: тангенс (котангенс) каждого из углов существует, углы отличаются друг от друга на целое число полупериодов [3]:

 где *.* (7)

 где *.* (8)

**Пример 5.** Решите уравнения

1. ;

**Решение.** По формуле (5) имеем:

**Ответ:***,.*

1. .

**Решение.** Согласно формуле (6)

**Ответ:** Так как множество решений является подмножеством решений то все решения данного уравнения можно написать как *.*

### 4.2. Способ замены (сведение к алгебраическому уравнению)

В данном параграфе рассмотрим уравнения, сводимые к одной и той же функции относительно одного и того же неизвестного выражения, входящего только под знак функции.

Тригонометрические уравнения , , уже сведены к алгебраическим. Действительно, если заменить , , и , получим алгебраические уравнения: , , , . Решив каждое из них, найдем , , и .

Уравнения , , не являются по виду алгебраическими, но их можно свести к алгебраическим с помощью применения тригонометрических тождеств из §2: , , [3].

**Пример 6.** Решите уравнения

1. ;

**Решение.** Сначала преобразуем исходное уравнение с помощью применения тригонометрических тождеств:

,

.

Введем новую неизвестную .

. (8)

Поскольку область значения функции – отрезок , то решим уравнение (8) на множестве. Это множество можно еще больше сузить, если принять во внимание область допустимых значений уравнения:

.

Учитывая, что , получаем

.

Чтобы решить уравнение (8) избавимся от дроби в правой части:

.

Теперь возведем обе части уравнения в квадрат

*,*

.

На множестве проделанные преобразования равносильны. В последнем уравнении введем еще одну замену :

,

,

.

Возвращаясь к переменной , имеем:

,

,

.

Корень , что не удовлетворяет условию . Так что исходное уравнение равносильно уравнению

*,*

*.*

**Ответ:** .

1. ;

**Решение.** В данном примере воспользуемся формулой сложения , формулой двойного аргумента и основным тригонометрическим тождеством .

.

Сведем полученное уравнение к алгебраическому виду с помощью замены :

. (9)

Однако, эти преобразования можно применять только, если мы можем гарантировать существование . Рассмотрим два случая:

1. существует, то есть ;
2. не существует, то есть .

В первом случае дело сводится к решению уравнения (9):

По теореме Виета находим корни первого уравнения:

.

Возвращаясь к неизвестной , мы имеем:

.

Во втором случае проводить преобразования, описанные выше нельзя. Выяснить подходят ли корни можно подставив этот корень в исходное уравнение:

,

,

,

Так что все проверяемые значения являются корнями исходного уравнения.

**Ответ:**.

1. .

**Решение.** Заменим выражения и в левой части уравнения на и соответственно. В правой части заменим произведение :

*.*

Введем новые переменные: , :

,

,

.

Последнее уравнение является квадратным относительно :

.

Его дискриминант равен , так что оно имеет два корня: , .

Соответственное исходное уравнение распадается на два уравнения:

Первое уравнение легко решается методом оценок, так как его левая часть не превосходит , а , оно не имеет корней.

Для решения второго уравнения воспользуемся формулой тройного аргумента :

*.*

Снова воспользуемся заменой :

,

.

Чтобы избавиться от иррационального коэффициента, введем новую неизвестную . Для нее последнее уравнение примет вид:

,

,

*.*

Возвращаясь к неизвестной , мы получим два уравнения:

Поскольку , то второе уравнение не имеет корней. Решим первое уравнение:

*.*

**Ответ:**.

### 4.3. Разложение на множители

Метод разложения на множители заключается в следующем: если

,

то всякое решение уравнения

 (10)

является решением совокупности уравнений

 (11)

Обратное утверждение не всегда верно, так как не всякое решение совокупности уравнений (11) является решением уравнения (10). Это можно объяснить тем, что решения отдельных уравнений (11) могут не входить в область определения функции .

При решении тригонометрического уравнения методом разложения на множители после нахождения корней должна быть сделана проверка, чтобы исключить лишние корни. Либо можно найти область допустимых значений исходного уравнения и выбирать только те корни, которые входят в найденную область допустимых значений.

При решении уравнений этого параграфа нужно пользоваться всеми известными способами разложения на множители алгебраических выражений: вынесение за скобки общего множителя, группировка, применения формул сокращенного умножения и деления и т. д [1].

**Пример 7.** Решите уравнения

1. ;

**Решение.** Вынесем за скобки

*,*

*,*

*,*

*.*

Затем переходим к совокупности

Решением первого уравнения являются числа , . Для решения второго уравнения сделаем замену , тогда . Откуда

Тогда второе уравнение примет вид:

,

.

Решая полученное уравнение, находим

, .

Сделаем обратную замену

Используя формулы приведения и формулу суммы тригонометрических функций, преобразуем левую часть уравнений:

.

Тогда совокупность перепишется в виде

Первое уравнение совокупности не имеет корней, так как . Решением второго уравнения будет:

.

**Ответ:**, .

1. .

**Решение.** Перенесем все в левую часть и сгруппируем:

.

Используя формулы из IV и VI групп тождеств (§2), получаем:

Общий множитель выносим за скобку:

Получим совокупность двух уравнений:

Решением первого уравнения являются числа:

*.*

Левую часть второго уравнения можно снова разложить на множители. Для этого сначала, используя формулу приведения, преобразуем в синус: . В итоге получим:

,

.

Полученное уравнение перепишем в виде совокупности:

Решая первое уравнение, получим:

*.*

Решением второго уравнения являются числа

.

**Ответ:**.

### 4.4. Однородные уравнения

Тригонометрическое уравнение вида

, (12)

где – данные числа, а – натуральное число, называется однородным уравнением относительно функций и . Сумма показателей степеней при и у всех членов такого уравнения одинакова. Эта сума называется степенью однородного уравнения.

Уравнения , , называют однородными уравнениями -ой, -ой, -ей степени соответственно.

Делением на (или на ), где – это степень однородного уравнения, уравнение приводится к алгебраическому относительно (или ):

или

,

при этом область определения уравнения сужается на значения (или на ), .

Умножение на тригонометрическую единицу , где , можно привести к однородному некоторые уравнения, не являющиеся однородными. Так к уравнению вида (12) сводится уравнение

*.*

Для этого нужно умножить на тригонометрическую единицу:

, где

Рассмотрим уравнение

. (13)

Разделив уравнение (13) на , получим:

. (14)

При (13) и (14) равносильны, так как . Если же то из уравнения (13) видно, что и , что невозможно, так как теряет смысл тождество . Из уравнения (14) определяем значения , а затем находим соответствующие значения . При значения не существуют на множестве действительных чисел, а потому уравнение (14), а значит, и уравнение (13) решений не имеют.

Уравнение

. (15)

в таком виде не является однородным, но его можно привести к однородному, умножив его правую часть на :

,

то есть

*,*

. (16)

При уравнения (15) и (16) равносильны. Из уравнения (16) находим , а затем соответствующие значения [15].

**Пример 8.** Решите уравнения

1. ;

**Решение.** Это уравнение может быть сведено к однородному путем следующих замен: , и умножением правой части на тригонометрическую единицу .

,

.

Разделим полученное уравнение на :

.

Решим это уравнение как квадратное относительно . Дискриминант , тогда , .

Откуда,

, ;

,

**Ответ:**.

1. .

**Решение.** Это уравнение является однородным относительно функций и .

Пусть . Тогда получаем:

,

то есть квадратное уравнение относительно :

.

Действительных решений это уравнение не имеет, так как дискриминант .

Рассмотрим случай, когда . Из исходного уравнения следует, что и . Следовательно, решением данного уравнения служат любые пары чисел:

 где .

**Ответ:**.

### 4.5. Преобразованием суммы выражений в произведение и произведения в сумму

Использование формул групп VI и VII §2 позволяет упростить тригонометрическое выражение, преобразовав сумму функций в произведение и произведение функций в сумму.

**Пример 9.** Решите уравнения

1. ;

**Решение.** Запишем уравнение в виде:

*,*

и преобразуем обе его части в произведение:

Перенесем все в левую часть:

Далее:

Преобразуем произведение в сумму тригонометрических функций:

Используя формулу двойного аргумента, получим:

Обозначим :

*.*

Решая полученное квадратное уравнение, находим , . Делаем обратную замену:

**Ответ:**.

1. ;

**Решение.** Применяя формулу суммы синусов и формулу косинуса двойного угла, получим:

Далее используем формулы приведения и формулу суммы тригонометрических функций:

Получили совокупность из двух уравнений:

Решая первое уравнение, находим

Преобразуем второе уравнение с помощью формулы разности синусов:

Снова получили совокупность:

Решением первого уравнения являются числа:

а решением второго:

**Ответ:**.

1. .

**Решение.** Умножаем обе части уравнения на 2 и, применяя формулу произведения тригонометрических функций, преобразуем данное уравнение:

**Ответ:**.

### 4.6. Введение вспомогательного аргумента

Рассмотрим уравнение

. (17)

Разделим левую и правую часть уравнения (17) на :

Так как

то существует угол такой, что:

Воспользовавшись этими равенствами, запишем уравнение в виде:

Если , то есть , то уравнение имеет решение

Если , то есть , то уравнение решений не имеет [1].

**Пример 10.** Решите уравнения

1. ;

**Решение.** Подсчитаем число и разделим левую и правую часть уравнения на это число: .

Учитывая, что , получим:

Применим к левой части уравнения формулу косинуса суммы двух углов, а к правой – формулу разности синусов двух углов:

Так как , то

Первое уравнение совокупности имеет решение:

А второе:

**Ответ:**.

**Решение.** Подсчитаем число .

Учитывая, что , получим:

**Ответ:**.

### 4.7. Графический метод

Как известно из курса алгебры, графический метод решения уравнения заключается в отыскании точек пересечения геометрических мест, заданных уравнениями. В школе графическая иллюстрация решения тригонометрических уравнений имеет значение тем, что наглядно показывает учащимся смысл получаемых решений: множества решений, отсутствия решений и т. п.

**Пример 11.**Найти все значения , удовлетворяющие уравнению

.

**Решение.**Решим исходное уравнение, не обращая внимания на требование :

.

Поскольку , а , исходное уравнение равносильно уравнению .

Вместо того, чтобы решать уравнение в общем виде, а затем отбирать корни, попадающие на отрезок , будем сразу находить нужные корни, решая графически наше уравнение на заданном отрезке. Для этого нужно нарисовать график функции и провести горизонтальную прямую (рис. 5).



***Рис. 5*** *Графики функций и*

Абсциссы точек пересечения прямой и синусоиды будут корнями уравнения . Точка пересечения этой прямой и «центральной» дуги синусоиды (дуги, соответствующей
) дает . Поскольку , из графика ясно, что на отрезок попадут только три точки: , , .

**Ответ:** , ,

.

**Пример 12.**На отрезке найдите все значения , удовлетворяющие уравнению

.

**Решение***.* Выражение под знаком радикала в правой части уравнения равно . Поэтому исходное уравнение можно переписать в виде: , где . Отсюда ясно, что оно равносильно неравенству

.

Для его решения преобразуем линейную комбинацию и в левой части с помощью метода дополнительного аргумента:

,

,

,

Решим его графически. График функции получается из стандартного графика сдвигом вдоль оси влево на . Но удобнее ввести неизвестную . Для нее наше неравенство примет вид:

 . (18)

Поэтому можно обойтись без всяких преобразований графиков. Единственное, что нужно сделать, – преобразовать заданный диапазон изменения неизвестной , , в соответствующий диапазон изменения неизвестной : .

Теперь задачу решения неравенства (18) можно сформулировать следующим образом: найти все точки из промежутка на оси , для которых соответствующие точки косинусоиды (т.е. точки ) лежат выше (нестрого) оси абсцисс. Рис. 6 дает ответ задачи: .

**

***Рис. 6*** *Графическое решение неравенства*

Поскольку , для исходной задачи имеем: .

**Ответ:**.