<u>РАЗБОР ЗАДАЧ</u>
2012 – 2013

7-8 классы

Задача 1 (1 балл)

1. При каком значении a выражение $x^2+\frac{a^2}{x^2}-4\left(x+\frac{a}{x}\right)+10$ является полным квадратом?

Решение. Добавим и вычтем $2a$. Перейдем к переменной $t=x+\frac{a}{x}$: $t^2+4t+10-2a$. Это выражение является полным квадратом тогда, когда $10-2a$ является квадратом 2.
Ответ: 3.

2. При каком значении a выражение $x^2+\frac{a^2}{x^2}+6\left(x-\frac{a}{x}\right)+11$ является полным квадратом?

Решение. Вычтем и добавим $2a$. Перейдем к переменной $t=x-\frac{a}{x}$: $t^2+6t+11+2a$. Это выражение является полным квадратом тогда, когда $11+2a$ является квадратом - 3.
Ответ: - 1.

3. При каком значении a выражение $x^2+\frac{a^2}{x^2}-10\left(x+\frac{a}{x}\right)+13$ является полным квадратом?

Решение. Добавим и вычтем $2a$. Перейдем к переменной $t=x+\frac{a}{x}$: $t^2-10t+13-2a$. Это выражение является полным квадратом тогда, когда $13-2a$ является квадратом 5.
Ответ: - 6.

4. При каком значении a выражение $x^2+\frac{a^2}{x^2}+8\left(x-\frac{a}{x}\right)-8$ является полным квадратом?

Решение. Вычтем и добавим $2a$. Перейдем к переменной $t=x-\frac{a}{x}$: $t^2+8t-8+2a$. Это выражение является полным квадратом тогда, когда $-8+2a$ является квадратом - 4.
Ответ: 12.

Задача 2 (1 балл)

1. В треугольнике ABC острый угол между биссектрисами AN и CM равен 55°. Найдите угол при вершине B. Ответ запишите в градусах.
Решение. Пусть $\angle A=a; \angle B=b; \angle C=g$. Пусть точка O - точка пересечения биссектрис. По теореме о внешнем угле треугольника $\frac{a+g}{2}=55^\circ$. Решая это уравнение совместно с уравнением $a+b+g=180^\circ$, получаем $b=70^\circ$.
Ответ: 70

2. В треугольнике ABC острый угол между биссектрисами AN и CM равен 35°. Найдите угол при вершине B. Ответ запишите в градусах.

Решение. Пусть $\angle A = a; \angle B = b; \angle C = g$. Пусть точка O - точка пересечения биссектрис. По теореме о внешнем угле треугольника $\frac{a+g}{2} = 35^{\circ}$. Решая это уравнение совместно с уравнением $a+b+g = 180^{\circ}$, получаем $b = 110^{\circ}$.
Ответ: 110

3. В треугольнике ABC острый угол между биссектрисами AN и CM равен 42°. Найдите угол при вершине B. Ответ запишите в градусах.
Решение. Пусть $\angle A = a; \angle B = b; \angle C = g$. Пусть точка O - точка пересечения биссектрис. По теореме о внешнем угле треугольника $\frac{a+g}{2} = 42^{\circ}$. Решая это уравнение совместно с уравнением $a+b+g = 180^{\circ}$, получаем $b = 96^{\circ}$.
Ответ: 96

4. В треугольнике ABC острый угол между биссектрисами AN и CM равен 53°. Найдите угол при вершине B. Ответ запишите в градусах.
Решение. Пусть $\angle A = a; \angle B = b; \angle C = g$. Пусть точка O - точка пересечения биссектрис. По теореме о внешнем угле треугольника $\frac{a+g}{2} = 53^{\circ}$. Решая это уравнение совместно с уравнением $a+b+g = 180^{\circ}$, получаем $b = 74^{\circ}$.
Ответ: 74

Задача 3 (1 балл)

1. Два пешехода выходят одновременно из пунктов A и B навстречу друг другу и встречаются через 18 минут. Один из пешеходов проходит расстояние AB за 30 минут. За сколько минут проходит расстояние AB другой пешеход?
Решение. Пусть S (м) – расстояние между пунктами A и B, а x и y (м/мин) – соответственно скорости пешеходов. Тогда $\frac{S}{18} = x + y$, а $\frac{S}{30} = x$. Вычитая из первого уравнения второе, получим $y = \frac{S}{45}$.
Ответ: 45

2. Велосипедист и пешеход отправляются одновременно из пунктов A и B навстречу друг другу и встречаются через 21 минуту. Велосипедист проезжает расстояние AB за 30 минут. За сколько минут проходит расстояние AB пешеход?
Решение. Пусть S (м) – расстояние между пунктами A и B, а x и y (м/мин) – соответственно скорости велосипедиста и пешехода. Тогда $\frac{S}{21} = x + y$, а $\frac{S}{30} = x$. Вычитая из первого уравнения второе, получим $y = \frac{S}{70}$.
Ответ: 70

3. Два велосипедиста отправляются одновременно из пунктов A и B навстречу друг другу и встречаются через 12 минут. Первый велосипедист проезжает расстояние AB за 20 минут. За сколько минут проезжает расстояние AB второй велосипедист?

Решение. Пусть S (м) – расстояние между пунктами A и B, а x и y (м/мин) – соответственно скорости велосипедистов. Тогда $\frac{S}{12}=x+y$, а $\frac{S}{20}=x$. Вычитая из первого уравнения второе, получим $y=\frac{S}{30}$.

Ответ: 30

4. Велосипедист и мотоциклист отправляются одновременно из пунктов А и В навстречу друг другу и встречаются через 15 минут. Велосипедист проезжает расстояние АВ за 60 минут. За сколько минут проезжает расстояние АВ мотоциклист?

Решение. Пусть S (м) – расстояние между пунктами A и B, а x и y (м/мин) – соответственно скорости велосипедиста и мотоциклиста. Тогда $\frac{S}{15}=x+y$, а $\frac{S}{60}=x$.

Вычитая из первого уравнения второе, получим $y=\frac{S}{20}$.

Ответ: 20

Задача 4 (2 балла)

1. Маша читала книгу. Каждый час число прочитанных страниц снижалось на некоторое постоянное число процентов. Через 3 часа оказалось, что она прочла 231,25% того, что прочла за первый час. На сколько процентов в час снижалось количество прочитанных страниц?

Решение. Примем за A количество страниц, прочитанных за первый час, а за x процент снижения. Тогда за второй час будет прочитано $\frac{A(100-x)}{100}$ страниц, а за третий час - $\frac{A(100-x)^2}{100^2}$. Решив квадратное уравнение $\frac{A(100-x)^2}{100^2}+\frac{A(100-x)}{100}+A=2,3125A$, найдем x =25.

Ответ: 25

2. Ваня при подготовке к контрольной работе по математике решал задачи. Каждый час число решенных задач снижалось на некоторое постоянное число процентов. Через 3 часа оказалось, что он решил 265,44% того, что решил за первый час. На сколько процентов в час снижалось количество решённых задач?

Решение. Примем за A количество страниц, прочитанных за первый час, а за x процент снижения. Тогда за второй час будет прочитано $\frac{A(100-x)}{100}$ страниц, а за третий час - $\frac{A(100-x)^2}{100^2}$. Решив квадратное уравнение $\frac{A(100-x)^2}{100^2}+\frac{A(100-x)}{100}+A=2,6544A$, найдем x =12.

Ответ: 12

3. Даша читала книгу. Каждый час число прочитанных страниц снижалось на некоторое постоянное число процентов. Через 3 часа оказалось, что она прочла 276,64% того, что прочла за первый час. На сколько процентов в час снижалось количество прочитанных страниц?

Решение. Примем за A количество страниц, прочитанных за первый час, а за x процент снижения. Тогда за второй час будет прочитано $\frac{A(100-x)}{100}$ страниц, а за третий час - $\frac{A(100-x)^2}{100^2}$. Решив квадратное уравнение $\frac{A(100-x)^2}{100^2}+\frac{A(100-x)}{100}+A=2,7664A$, найдем x =8.

Ответ: 8

4. Даня при подготовке к контрольной работе по математике решал задачи. Каждый час число решенных задач снижалось на некоторое постоянное число процентов. Через 3 часа оказалось, что он решил 257,25% того, что решил за первый час. На сколько процентов в час снижалось количество решённых задач?

Решение. Примем за A количество страниц, прочитанных за первый час, а за x процент снижения. Тогда за второй час будет прочитано $\frac{A(100-x)}{100}$ страниц, а за третий час - $\frac{A(100-x)^2}{100^2}$. Решив квадратное уравнение $\frac{A(100-x)^2}{100^2}+\frac{A(100-x)}{100}+A=2{,}5725A$, найдем x =15.

Ответ: 15

Задача 5 (2балла)

1. Известно, что $\frac{x^2+xy}{9x^2+xy+y^2}=-\frac{1}{7}$. Найдите $\frac{3x-2y}{3x+y}$.

Решение. Разделим числитель и знаменатель левой части уравнения на x^2.

Пусть $\frac{y}{x}=a$. Получим уравнение $\frac{1+a}{9+a+a^2}=-\frac{1}{7}$. Откуда $a=-4$. Заметим, что $\frac{3x-2y}{3x+y}=\frac{3-2a}{3+a}$. Подставляя значение a , получаем ответ.

Ответ: -11

2. Известно, что $\frac{-x^2+5xy}{6x^2+9xy+y^2}=\frac{1}{3}$. Найдите $\frac{4x+y}{2x-y}$.

Решение. Разделим числитель и знаменатель левой части уравнения на x^2.

Пусть $\frac{y}{x}=a$. Получим уравнение $\frac{-1+a}{6+9a+a^2}=\frac{1}{3}$. Откуда $a=3$. Заметим, что $\frac{4x+y}{2x-y}=\frac{4+a}{2-a}$. Подставляя значение a , получаем ответ.

Ответ: - 7

3. Известно, что $\frac{x^2+5xy}{21x^2-10xy+y^2}=-\frac{1}{4}$. Найдите $\frac{3x-2y}{6x+y}$.

Решение. Разделим числитель и знаменатель левой части уравнения на x^2.

Пусть $\frac{y}{x}=a$. Получим уравнение $\frac{1+5a}{21+10a+a^2}=-\frac{1}{4}$. Откуда $a=-5$. Заметим, что $\frac{3x-2y}{6x+y}=\frac{3-2a}{6+a}$. Подставляя значение a , получаем ответ.

Ответ: 13

4. Известно, что $\frac{x^2+2xy}{-x^2-6xy+y^2}=-\frac{1}{5}$. Найдите $\frac{5x+y}{7x+3y}$.

Решение. Разделим числитель и знаменатель левой части уравнения на x^2.

Пусть $\frac{y}{x}=a$. Получим уравнение $\frac{1+2a}{-1-6a+a^2}=-\frac{1}{5}$. Откуда $a=-2$. Заметим, что $\frac{5x+y}{7x+3y}=\frac{5+a}{7+3a}$. Подставляя значение a , получаем ответ.

Ответ: 3

Замечание. Скорее всего, школьники будут выражать из заданного уравнения одну переменную через другую, получать линейную зависимость и подставлять ее в искомое выражение. Но это решение мало отличается от предложенного.

Задача 6 (3 балла)

1. Натуральное число А имеет 61 разряд и состоит из двоек, троек и четверок. При этом двоек на 19 больше, чем четверок. Найти остаток от деления числа А на 9.

Решение. Пусть x- количество четверок, а y- количество троек. Тогда получаем $x+19+y+x=61$. Откуда $y=42-2x$. Сумма цифр $2(x+19)+3y+4x$ имеет тот же остаток при делении на 9, что и само число. Учитывая связь между x и y, получаем, что сумма цифр равна 164. Поэтому остаток при делении на 9 равен 2.

Ответ: 2.

2. Натуральное число А имеет 59 разрядов и состоит из троек, четверок и пятерок. При этом пятерок на 8 больше, чем троек. Найти остаток от деления числа А на 9.

Решение. Пусть x- количество троек, а y- количество четверок. Тогда получаем $x+y+x+8=59$. Откуда $y=51-2x$. Сумма цифр $3x+4y+5(x+8)$ имеет тот же остаток при делении на 9, что и само число. Учитывая связь между x и y, получаем, что сумма цифр равна 244. Поэтому остаток при делении на 9 равен 1.

Ответ: 1.

3. Натуральное число А имеет 67 разрядов и состоит из двоек, троек и четверок. При этом двоек на 22 больше, чем четверок. Найти остаток от деления числа А на 9.

Решение. Пусть x- количество четверок, а y- количество троек. Тогда получаем $x+22+y+x=67$. Откуда $y=45-2x$. Сумма цифр $2(x+22)+3y+4x$ имеет тот же остаток при делении на 9, что и само число. Учитывая связь между x и y, получаем, что сумма цифр равна 179. Поэтому остаток при делении на 9 равен 8.

Ответ: 8.

4. Натуральное число А имеет 57 разрядов и состоит из троек, четверок и пятерок. При этом троек на 14 больше, чем пятерок. Найти остаток от деления числа А на 9.

Решение. Пусть x- количество пятерок, а y- количество четверок. Тогда получаем $x+11+y+x=57$. Откуда $y=46-2x$. Сумма цифр $3(x+11)+4y+5x$ имеет тот же остаток при делении на 9, что и само число. Учитывая связь между x и y, получаем, что сумма цифр равна 217. Поэтому остаток при делении на 9 равен 1.

Ответ: 1

Задача 7 (3балла)

1. Известно, что $a+b-c=3$ и $a-b+c=4$. Найдите $a^2-b^2-c^2+2bc+5a-b+c-3$.

Решение. Нетрудно видеть, что

$(a+(b-c))(a-(b-c))=a^2-(b-c)^2=a^2-b^2-c^2+2ac=3\cdot 4=12$, а

$5a-b+c=2(a+b-c)+3(a-b+c)=2\cdot 3+3\cdot 4=18$. Откуда получаем ответ.

Ответ: 27

2. Известно, что $a-b-c=5$ и $a+b-c=7$. Найдите $a^2-b^2+c^2-2ac-a-5b+c-2$.

Решение. Нетрудно видеть, что

$((a-c)-b)((a-c)+b)=(a-c)^2-b^2=a^2-b^2+c^2-2ac=5\cdot 7=35$, а

$-a-5b+c=2(a-b-c)-3(a+b-c)=2\cdot 5-3\cdot 7=-11$. Откуда получаем ответ.

Ответ: 22

3. Известно, что $c-a+b=5$ и $c+a-b=4$. Найдите $c^2-a^2-b^2+2ab+2c-6a+6b+2$.
Решение. Нетрудно видеть, что

$\left(c-(a-b)\right)\left(c+(a-b)\right)=c^2-(a-b)^2=c^2-a^2-b^2+2ab=5\cdot 4=20$, а

$2c-6a+6b=4(c-a+b)-2(c+a-b)=4\cdot 5-2\cdot 4=12$. Откуда получаем ответ.

Ответ: 34

4. Известно, что $b-c+a=3$ и $b+c-a=7$. Найдите $-a^2+b^2-c^2+2ac+3a+b-3c-2$.
Решение. Нетрудно видеть, что

$\left(b-(c-a)\right)\left(b+(c-a)\right)=b^2-(c-a)^2=-a^2+b^2-c^2+2a=3\cdot 7=21$, а

$3a+b-3c=2(b-c+a)-(b+c-a)=2\cdot 3-1\cdot 7=-1$. Откуда получаем ответ.

Ответ: 18

Замечание. Скорее всего, школьники будут выражать одну переменную через две другие из заданных двух линейных уравнений. Тогда решение 4-ой задачи будет выглядеть так. Из заданных линейных уравнений получаем $c-a=7; b=5$. Откуда

$-a^2+b^2-c^2+2ac+3a+b-3c-2=-(c-a)^2+b^2-3(c-a)+b-2=-4+25-6+5-2=18$.

Задача 8 (4 балла)

1. Из куба с целочисленной стороной выпиливается куб также с целочисленной стороной, а также 1115 кубиков единичного объема (направления распила параллельны граням куба). Найти сторону самого большого куба, который можно распилить таким образом.
Решение. Обозначим длину стороны куба, из которого выпиливаются меньшие кубы, за a, а сторону куба (не единичного объема), который выпиливается из исходного куба, обозначим за b. Из условия задачи следует, что $a^3=b^3+1115\cdot 1$. Отсюда сразу следует равенство: $(a-b)\cdot(a^2+ab+b^2)=1115=5\cdot 223$. Поскольку число 223 – простое, а числа a и b - натуральные, получаем следующую систему уравнений для определения a и b: $\begin{cases} a-b=5 \\ a^2+ab+b^2=223 \end{cases}$. Нетрудно заметить, что альтернативный вариант написания системы в виде $\begin{cases} a-b=223 \\ a^2+ab+b^2=5 \end{cases}$ не дает решений в натуральных числах. Решая первую из приведенных систем, с учетом $a,b\in \mathbb{N}$, получаем: $a=11$, $b=6$.

Ответ: 11.

2. Из куба с целочисленной стороной выпиливается куб также с целочисленной стороной, а также 386 кубиков единичного объема (направления распила параллельны граням куба). Найти сторону самого большого куба, который можно распилить таким образом.
Решение. Обозначим длину стороны куба, из которого выпиливаются меньшие кубы, за a, а сторону куба (не единичного объема), который выпиливается из исходного куба, обозначим за b. Из условия задачи следует, что $a^3=b^3+386\cdot 1$. Отсюда сразу следует равенство: $(a-b)\cdot(a^2+ab+b^2)=386=2\cdot 193$. Поскольку число 193 – простое, а числа a и b - натуральные, получаем следующую систему уравнений для определения a и b: $\begin{cases} a-b=2 \\ a^2+ab+b^2=193 \end{cases}$. Нетрудно заметить, что альтернативный вариант написания системы в

виде $\begin{cases} a-b=193 \\ a^2+ab+b^2=2 \end{cases}$ не дает решений в натуральных числах. Решая первую из приведенных систем, с учетом $a,b\in \mathbb{N}$, получаем: $a=9$, $b=7$.

Ответ: 9.

3. Из куба с целочисленной стороной выпиливается куб также с целочисленной стороной, а также 1115 кубиков единичного объема (направления распила параллельны граням куба). Найти сторону самого большого куба, который можно выпилить таким образом.

Решение. Обозначим длину стороны куба, из которого выпиливаются меньшие кубы, за a, а сторону куба (не единичного объема), который выпиливается из исходного куба, обозначим за b. Из условия задачи следует, что $a^3=b^3+1115\cdot 1$. Отсюда сразу следует равенство: $(a-b)\cdot\left(a^2+ab+b^2\right)=1115=5\cdot 223$. Поскольку число 223 – простое, а числа a и b - натуральные, получаем следующую систему уравнений для определения a и b: $\begin{cases} a-b=5 \\ a^2+ab+b^2=223 \end{cases}$. Нетрудно заметить, что альтернативный вариант написания системы в виде $\begin{cases} a-b=223 \\ a^2+ab+b^2=5 \end{cases}$ не дает решений в натуральных числах. Решая первую из приведенных систем, с учетом $a,b\in \mathbb{N}$, получаем: $a=11$, $b=6$.

Ответ: 6.

4. Из куба с целочисленной стороной выпиливается куб также с целочисленной стороной, а также 386 кубиков единичного объема (направления распила параллельны граням куба). Найти сторону самого большого куба, который можно выпилить таким образом.

Решение. Обозначим длину стороны куба, из которого выпиливаются меньшие кубы, за a, а сторону куба (не единичного объема), который выпиливается из исходного куба, обозначим за b. Из условия задачи следует, что $a^3=b^3+386\cdot 1$. Отсюда сразу следует равенство: $(a-b)\cdot\left(a^2+ab+b^2\right)=386=2\cdot 193$. Поскольку число 193 – простое, а числа a и b - натуральные, получаем следующую систему уравнений для определения a и b: $\begin{cases} a-b=2 \\ a^2+ab+b^2=193 \end{cases}$. Нетрудно заметить, что альтернативный вариант написания системы в виде $\begin{cases} a-b=193 \\ a^2+ab+b^2=2 \end{cases}$ не дает решений в натуральных числах. Решая первую из приведенных систем, с учетом $a,b\in \mathbb{N}$, получаем: $a=9$, $b=7$.

Ответ: 7.

.