Муниципальный этап олимпиады школьников по математике
Ноябрь 2014 г.
Решения задач

7 класс

1. Существуют ли такие целые числа m и n, что $2014 = \dfrac{m^2}{n^3}$?

Ответ: да, например $n = 2014$, $m = 2014^2$.

Оценивание. За верный пример 7 б. Только ответ (без примера) — 0 б.

2. Таня выпила шестую часть чашки чёрного кофе и долила чашку доверху молоком. Затем Таня выпила треть чашки и вновь долила чашку доверху молоком. Потом она выпила половину чашки и снова вновь долила чашку доверху молоком. Наконец, Таня выпила всю чашку. Чего же она выпила больше: кофе или молока?

Ответ: Таня выпила поровну кофе и молока — по одной чашке.

Решение. Таня выпила молока столько, сколько она его доливала: $\frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = 1$ чашку. Кофе она выпила весь — тоже одну чашку.

Оценивание. За верное решение 7 б. Только ответ (без примера) — 0 б.

3. В отаре 45% баранов и 55% овец. Средний вес овцы 81 кг. Определите, каков средний вес барана, если известно, что общий вес баранов составляет 55% веса всей отары.

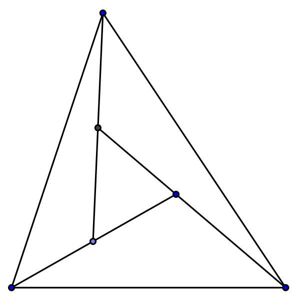
Ответ: 121 кг.

Решение. Пусть в отаре $20k$ голов скота. Тогда из них $9k$ баранов и $11k$ овец. При этом общий вес овец $81 \cdot 11k$, а общий вес баранов $\frac{55}{45} \cdot 81 \cdot 11k = 9 \cdot 121k$. Поделив на общее количество баранов, найдём средний вес одного барана.

Оценивание. За верное решение 7 б.

4. Можно ли разрезать треугольник на четыре треугольника так, чтобы никакие два из них не имели общей стороны?

Ответ: Можно. Пример — на рис.



Оценивание. За верный пример 7 б. Только ответ (без примера) — 0 б.

5. Назовём натуральное число отличным, если разность между его наибольшей и наименьшей цифрами равна 5 (например, числа 72 и 405 — отличные). Найдите наибольшее количество подряд идущих отличных чисел. (Приведите соответствующий пример и докажите, что большего количества подряд идущих отличных чисел, чем в вашем примере, быть не может.)

Ответ: 12. Пример: 494, 495,..., 499, 500, ..., 505.

Решение. Покажем, что больше 12 подряд идущих отличных чисел не может быть. Если этих чисел не меньше 10, то среди них есть число n, оканчивающееся нулём. Наибольшая цифра в этом числе 5.

В числе $n+1$ также наибольшая цифра 5, и если это число отличное, то в нём ещё присутствует ноль. В этом случае числа $n+2$, $n+3$, $n+4$, $n+5$ также отличные, а число $n+6$ не будет отличным, поскольку в его записи присутствуют 0 и 6.

Число $n-1$ оканчивается девяткой, и если это число отличное, то наименьшая его цифра 4. Число $n-2$ оканчивается восьмёркой, а наименьшая его цифра 4; если это число отличное, то в нём должна ещё быть цифра 9. В этом случае числа $n-3$, $n-4$, $n-5$, $n-6$ также отличные, а число $n-7$ не будет отличным, поскольку в его записи присутствуют 9 и 3. Итак, справа от n не более пяти отличных чисел, а слева — не более шести. Доказано, что количество подряд идущих отличных чисел не больше 12.

Оценивание. Только пример — 3 б.; пример + оценка — 7 б.