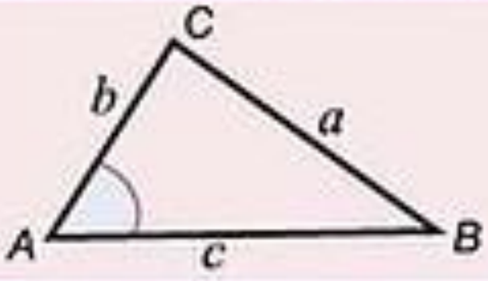
ТЕОРЕМА КОСИНУСОВ



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

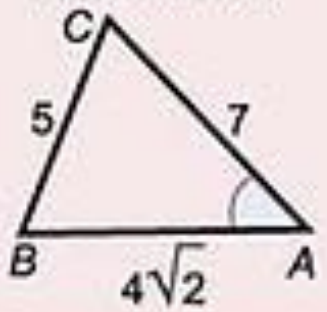
СЛЕДСТВИЯ ИЗ ТЕОРЕМЫ КОСИНУСОВ

$a^2 = b^2 + c^2$	$a^2 > b^2 + c^2$	$a^2 < b^2 + c^2$
$\Updownarrow$	$\Updownarrow$	$\Updownarrow$
$\angle A = 90°$	$\angle A > 90°$	$\angle A < 90°$

ПРИМЕР 1

Дано: $AB = 4\sqrt{2}$, $BC = 5$, $AC = 7$.

Найти: $\angle A$.



Решение:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos A$$

$$25 = 32 + 49 - 2 \cdot 4\sqrt{2} \cdot 7\cos A$$

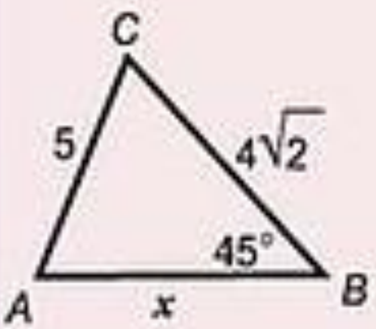
$$56\sqrt{2} \cos A = 56, \quad \cos A = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\angle A = 45°$$

ПРИМЕР 2

Дано: $BC = 4\sqrt{2}$, $AC = 5$, $\angle B = 45°$.

Найти: AB.



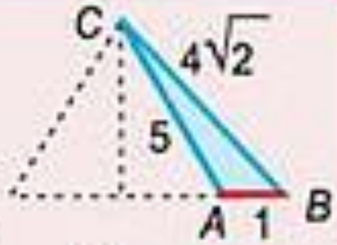
Решение:

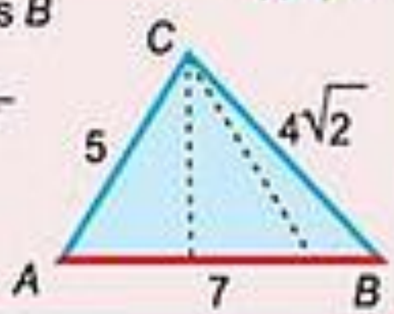
$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\,AB \cdot BC \cos B$$

$$25 = x^2 + 32 - 2 \cdot 4\sqrt{2} \cdot x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x^2 - 8x + 7 = 0$$

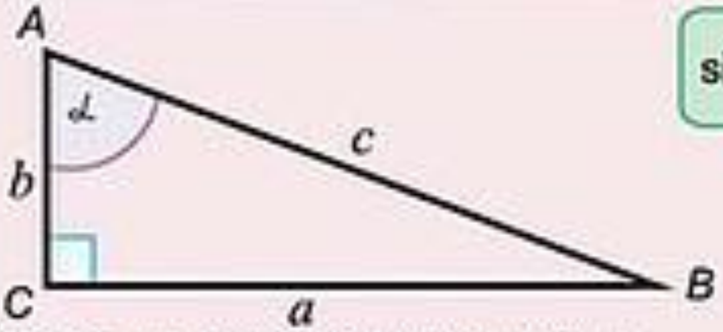
$$x = 1 \text{ или } x = 7$$





СИНУС, КОСИНУС, ТАНГЕНС ОСТРОГО УГЛА ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

ОПРЕДЕЛЕНИЯ



(Катет a противолежит углу α,
катет b прилежит к углу α)

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$

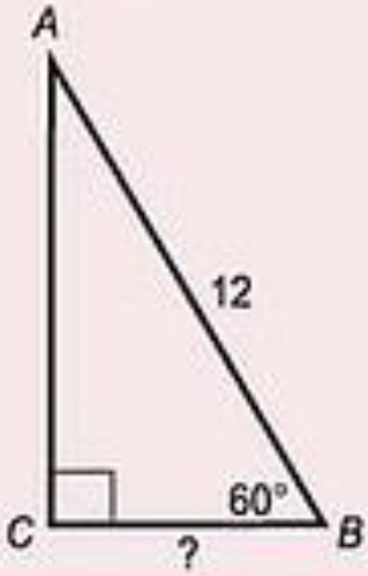
ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

При решении задач необходимо:

1) ВЫБРАТЬ НУЖНУЮ ФОРМУЛУ
2) ПОДСТАВИТЬ ИЗВЕСТНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ
3) ВЫЧИСЛИТЬ НЕИЗВЕСТНУЮ ВЕЛИЧИНУ

ПРИМЕР

Дано: ΔABC, $\angle C = 90°$, $\angle B = 60°$, $AB = 12$.
Найти: BC.



Решение:

1. Так как BC прилежит к углу B, то

$$\cos B = \frac{BC}{AB}$$

2. Подставим известные величины:

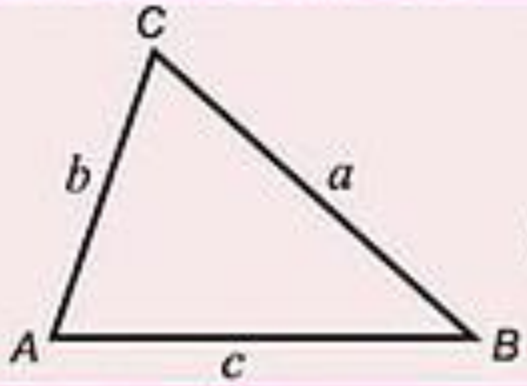
$$\frac{1}{2} = \frac{BC}{12}$$

3. $BC = \frac{12}{2} = 6$

Ответ: $BC = 6$

11 ПЛАНИМЕТРИЯ. ТРЕУГОЛЬНИКИ

ТЕОРЕМА СИНУСОВ



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

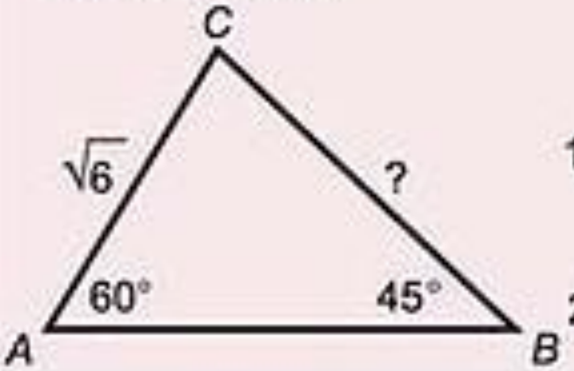
(R – радиус описанной окружности)

СЛЕДСТВИЕ ИЗ ТЕОРЕМЫ СИНУСОВ

$$\boxed{a > b} \Leftrightarrow \boxed{\angle A > \angle B}$$

ПРИМЕР 1

Дано: $\angle A = 60°$, $\angle B = 45°$, $AC = \sqrt{6}$.
Найти: BC, R.



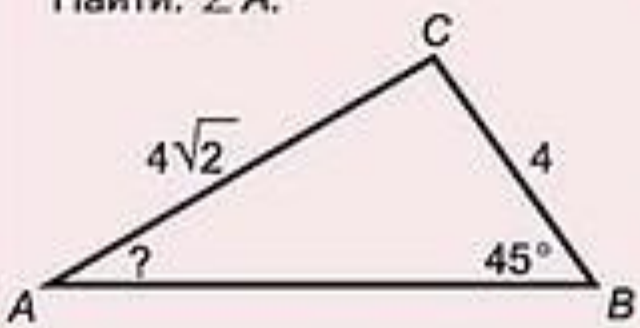
Решение:

1. $\dfrac{BC}{\sin 60°} = \dfrac{AC}{\sin 45°}$; $BC = \dfrac{\sqrt{6}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 3$

2. $R = \dfrac{AC}{2\sin 45°} = \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3}$

ПРИМЕР 2

Дано: $\angle B = 45°$, $BC = 4$, $AC = 4\sqrt{2}$.
Найти: $\angle A$.



Решение:

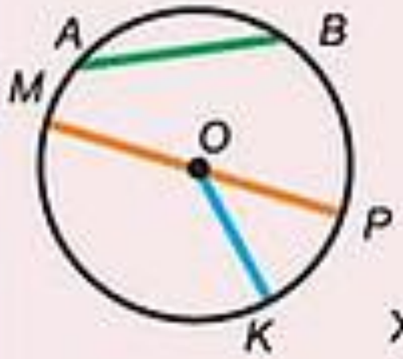
1. $\dfrac{4}{\sin A} = \dfrac{4\sqrt{2}}{\sin 45°}$; $\sin A = \dfrac{1}{2}$

$\angle A = 30°$ или $\angle A = 150°$

2. $BC < AC$, значит, $\angle A < \angle B$,

то есть $\angle A = 30°$

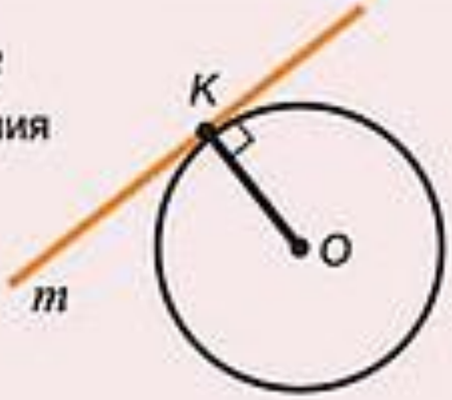
1 ОКРУЖНОСТЬ. ХОРДЫ И КАСАТЕЛЬНЫЕ



Касательная m

K – точка касания

$OK \perp m$

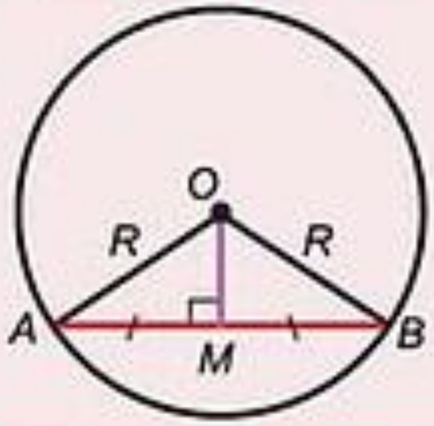


Хорда AB

Диаметр MP

Радиус OK

СВОЙСТВО ОТРЕЗКА РАДИУСА, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОГО ХОРДЕ

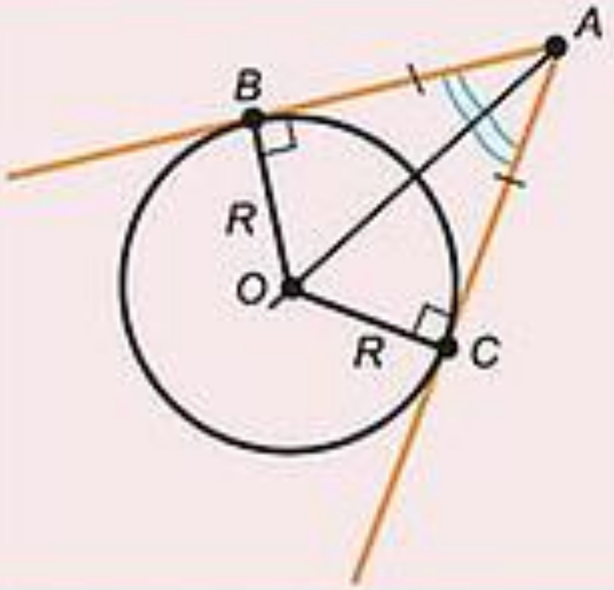


M – середина хорды AB

⇕

$OM \perp AB$

СВОЙСТВО КАСАТЕЛЬНЫХ, ПРОВЕДЕННЫХ ИЗ ОБЩЕЙ ТОЧКИ



B и C – точки касания

⇕

$AB = AC$,

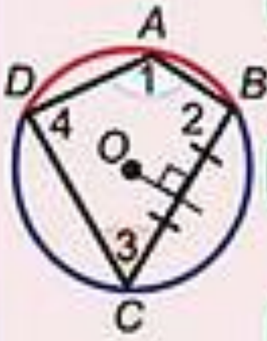
AO – биссектриса угла BAC

ВПИСАННЫЕ И ОПИСАННЫЕ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ

ПРОИЗВОЛЬНЫЕ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ

Четырехугольник, вписанный в окружность

стороны – хорды

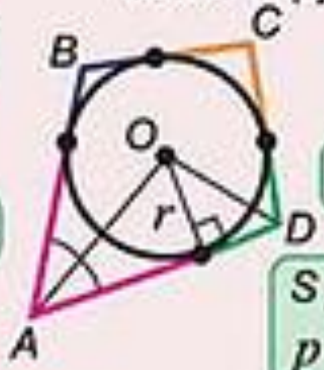


углы – вписанные

$\angle 1 + \angle 3 = 180^\circ$

$\angle 2 + \angle 4 = 180^\circ$

Четырехугольник, описанный около окружности



стороны лежат на касательных

$AB + CD = BC + AD$

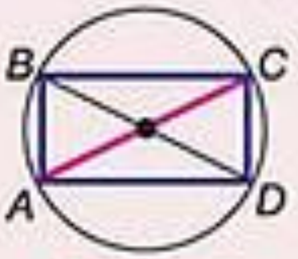
$S_{ABCD} = p \cdot r$

p – полупериметр,

r – радиус вписанной окружности

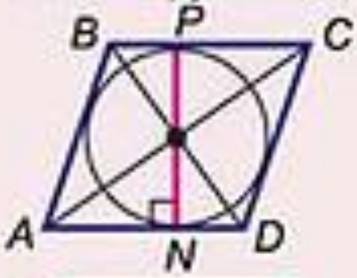
ПАРАЛЛЕЛОГРАММЫ

Параллелограмм, вписанный в окружность, – прямоугольник



$AC = 2R$

Параллелограмм, описанный около окружности, – ромб



$h = PN = 2r$

ТРАПЕЦИИ

Трапеция, вписанная в окружность, – равнобедренная трапеция

Центр O лежит на серединном перпендикуляре к основаниям

В трапеции, описанной около окружности, средняя линия равна полусумме боковых сторон

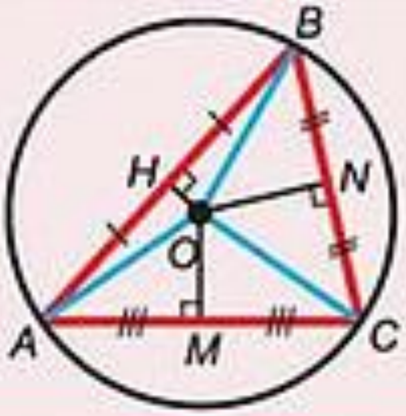
$P_{ABCD} = 4m$

(m – средняя линия)

$h = 2r$

2

ОКРУЖНОСТЬ, ОПИСАННАЯ ОКОЛО ТРЕУГОЛЬНИКА



Стороны *AB*, *BC*, *AC* – хорды

OA = *OB* = *OC* = *R*

∠*ABC*, ∠*BAC*, ∠*ACB* – вписанные

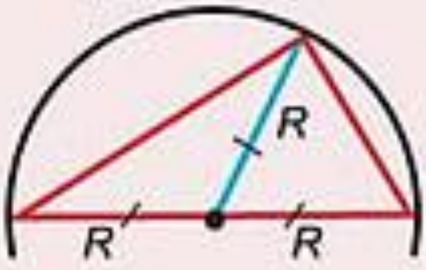
OH, *OM*, *ON* – серединные перпендикуляры к сторонам

ПОЛОЖЕНИЕ ЦЕНТРА ОПИСАННОЙ ОКРУЖНОСТИ

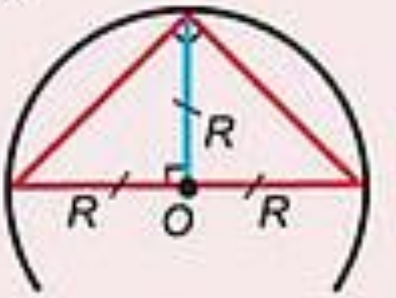
Остроугольный треугольник

Тупоугольный треугольник

Прямоугольный треугольник



Равнобедренный треугольник



ЦЕНТРЫ И РАДИУСЫ ВПИСАННОЙ И ОПИСАННОЙ ОКРУЖНОСТИ

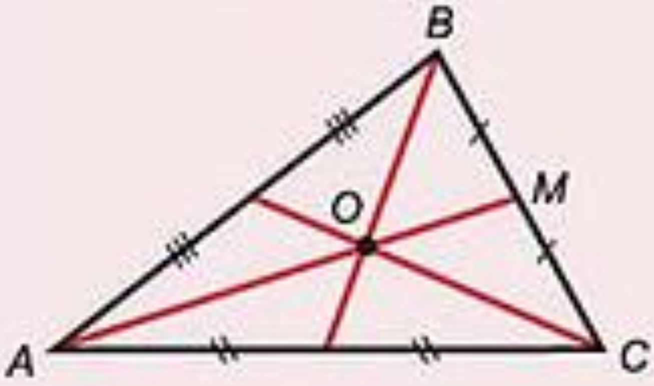
Разносторонний треугольник

Равносторонний треугольник

ОТНОШЕНИЯ ОТРЕЗКОВ В ТРЕУГОЛЬНИКЕ

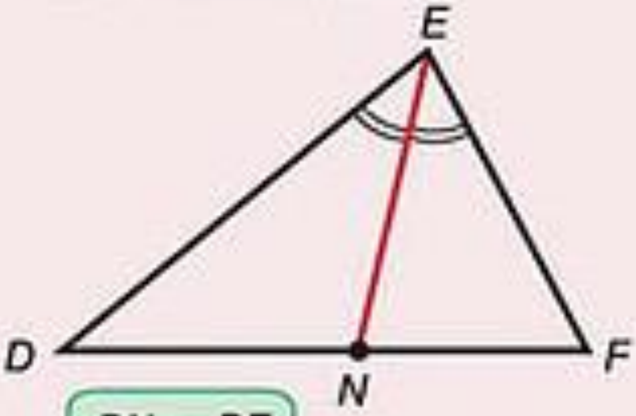
СВОЙСТВА МЕДИАН И БИССЕКТРИС

AM – медиана



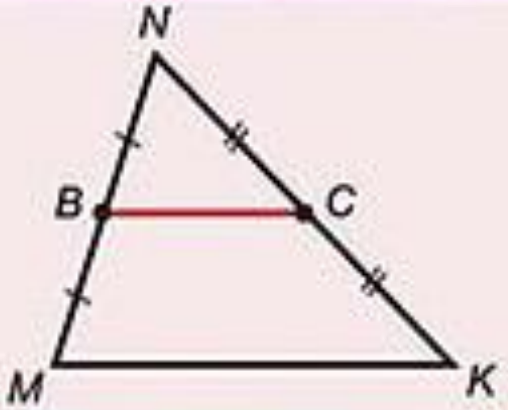
$$AO : OM = 2 : 1$$

EN – биссектриса



$$\frac{DN}{NF} = \frac{DE}{EF}$$

СВОЙСТВО СРЕДНЕЙ ЛИНИИ ТРЕУГОЛЬНИКА

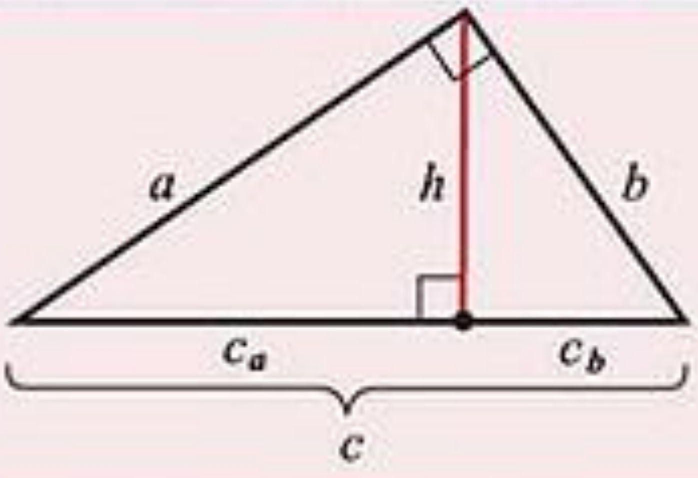


BC – средняя линия

$$BC \parallel MK$$

$$BC = \frac{1}{2}\,MK$$

СООТНОШЕНИЯ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ

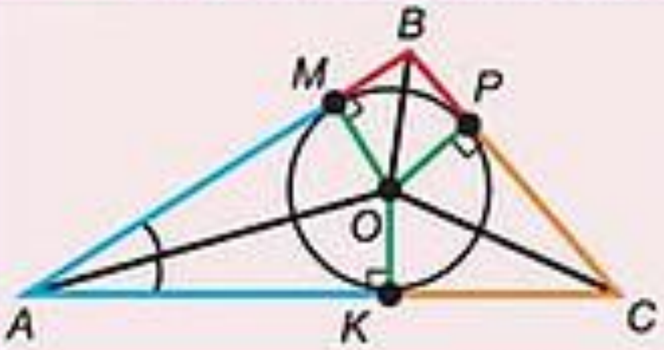


$$a^2 = c \cdot c_a$$

$$b^2 = c \cdot c_b$$

$$h^2 = c_a \cdot c_b$$

3 ОКРУЖНОСТЬ, ВПИСАННАЯ В ТРЕУГОЛЬНИК



AB, BC, AC – касательные

Отрезки касательных равны:

$AM = AK, BM = BP, CP = CK$

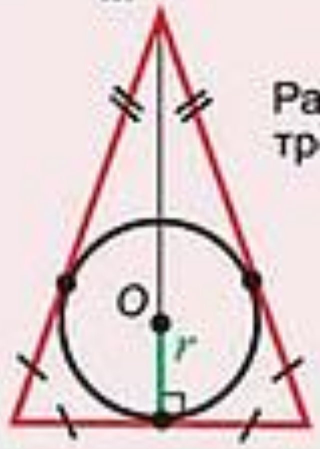
$OM = OK = OP = r$

AO, BO, CO – биссектрисы углов

ПОЛОЖЕНИЕ ЦЕНТРА ВПИСАННОЙ ОКРУЖНОСТИ

Произвольный треугольник

Прямоугольный треугольник

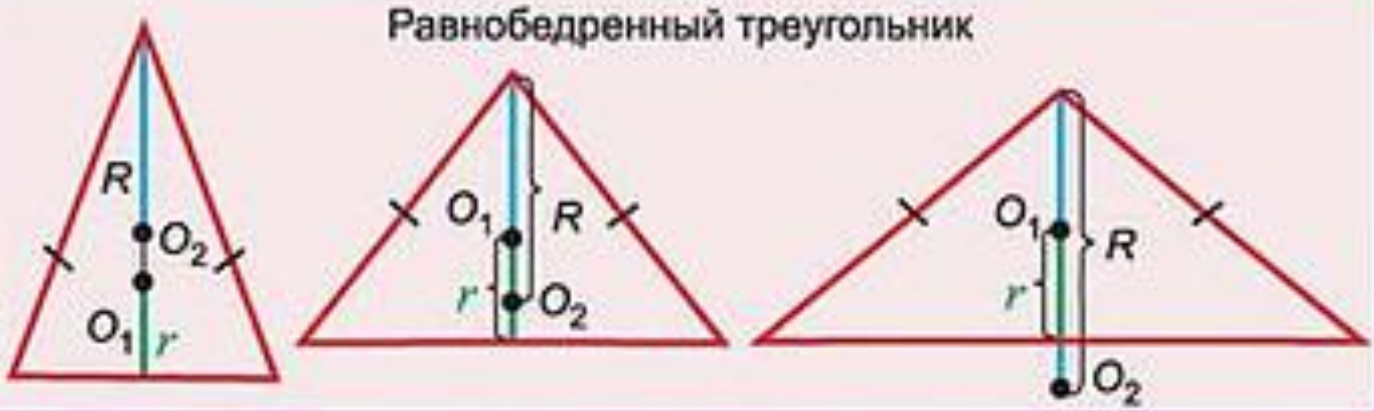


Равнобедренный треугольник

Равнобедренный прямоугольный треугольник

ЦЕНТРЫ И РАДИУСЫ ВПИСАННОЙ И ОПИСАННОЙ ОКРУЖНОСТЕЙ

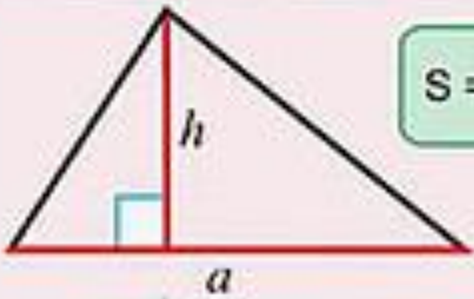
Равнобедренный треугольник



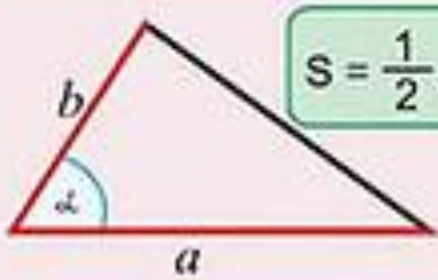
ПЛАНИМЕТРИЯ. ТРЕУГОЛЬНИКИ

12 ПЛОЩАДЬ ТРЕУГОЛЬНИКА (1)

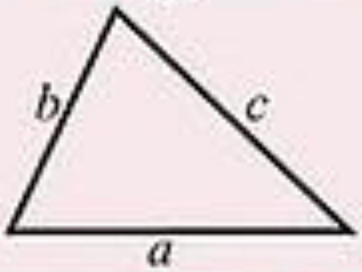
ФОРМУЛЫ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПЛОЩАДИ ТРЕУГОЛЬНИКА



$$S = \frac{1}{2}ah$$



$$S = \frac{1}{2}ab\sin\alpha$$



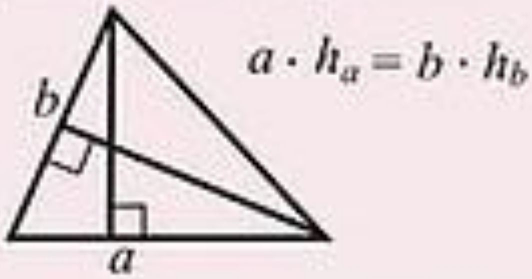
Формула Герона

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

p – полупериметр треугольника

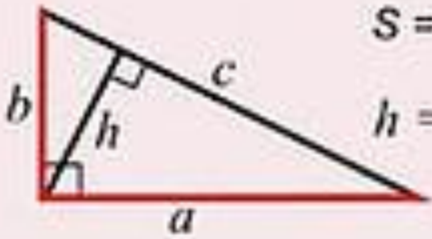
СЛЕДСТВИЯ ИЗ ФОРМУЛ ПЛОЩАДИ ТРЕУГОЛЬНИКА

Произвольный треугольник



$$a \cdot h_a = b \cdot h_b$$

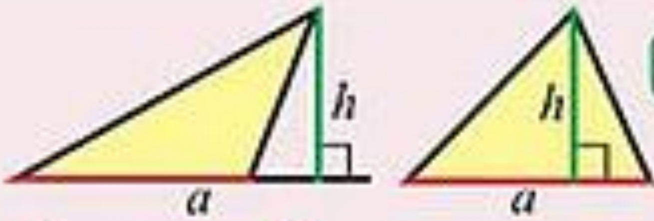
Прямоугольный треугольник



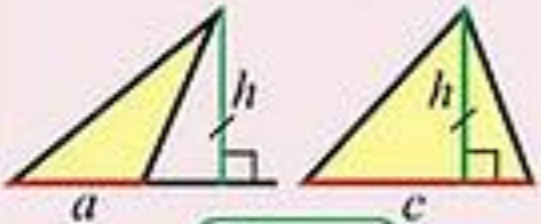
$$S = \frac{1}{2}ab$$

$$h = \frac{ab}{c}$$

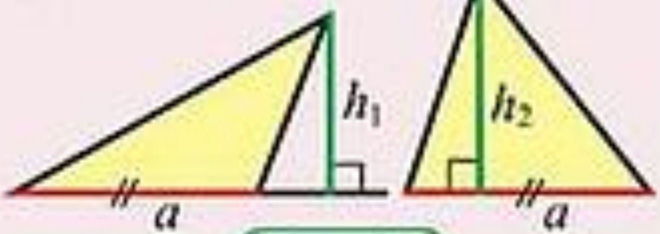
Треугольники с равными высотами или основаниями



$$S_1 = S_2$$



$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{a}{c}$$

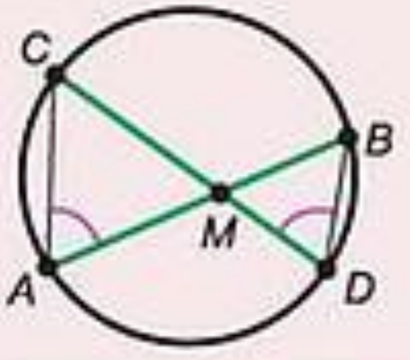


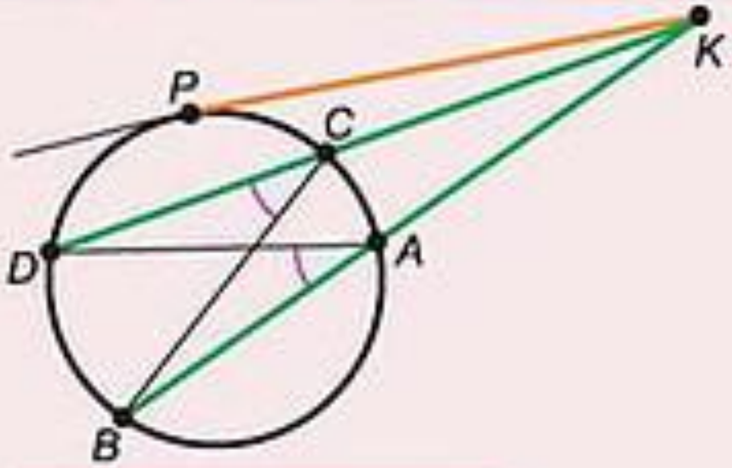
$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{h_1}{h_2}$$

ПЛАНИМЕТРИЯ. ОКРУЖНОСТЬ

6 СВОЙСТВА ХОРД И СЕКУЩИХ

ПРОИЗВЕДЕНИЕ ОТРЕЗКОВ ХОРД И СЕКУЩИХ ОКРУЖНОСТИ

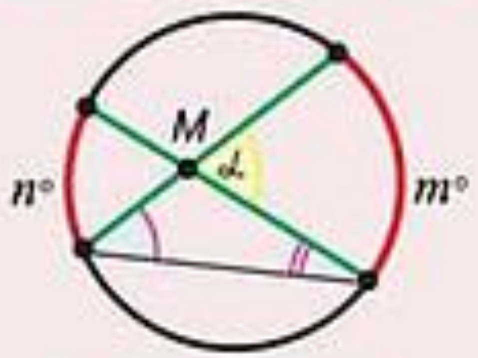


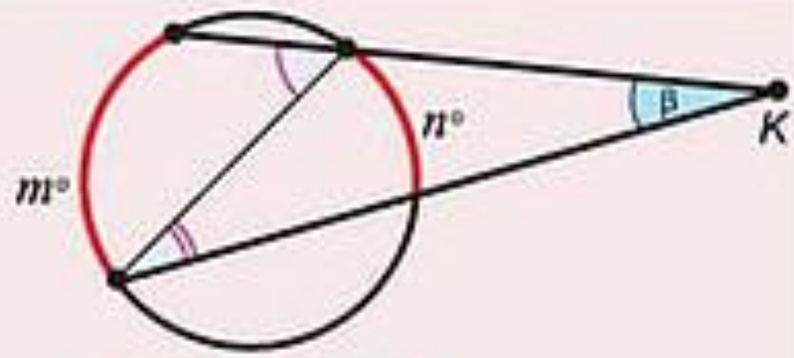


$MA \cdot MB = MC \cdot MD$

$KA \cdot KB = KC \cdot KD = KP^2$

УГЛЫ, ОБРАЗОВАННЫЕ ПЕРЕСЕКАЮЩИМИСЯ ХОРДАМИ И СЕКУЩИМИ ОКРУЖНОСТИ

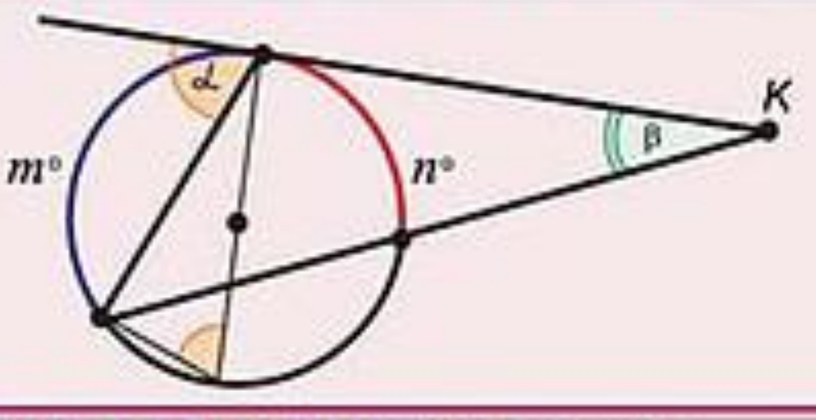




$\alpha = \frac{1}{2}(n^\circ + m^\circ)$

$\beta = \frac{1}{2}(m^\circ - n^\circ)$

УГЛЫ, ОБРАЗОВАННЫЕ КАСАТЕЛЬНОЙ С ХОРДОЙ И СЕКУЩЕЙ



$\alpha = \frac{1}{2} m^\circ$

$\beta = \frac{1}{2}(m^\circ - n^\circ)$

8

ПЛАНИМЕТРИЯ. ОКРУЖНОСТЬ

ДЛИНА ОКРУЖНОСТИ И ПЛОЩАДЬ КРУГА

Длина окружности

$L = 2\pi R$

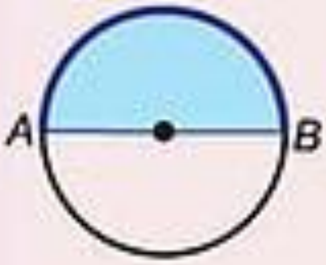
$\pi = \frac{L}{2R} \approx 3{,}1416$

Площадь круга

$S = \pi R^2$

ДЛИНА ДУГИ ОКРУЖНОСТИ И ПЛОЩАДЬ СЕКТОРА

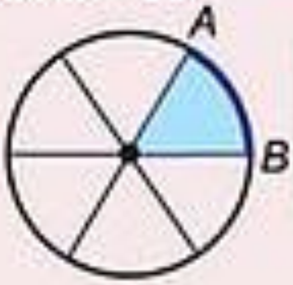
$\smile AB = 180°$



$l = \frac{1}{2} L = \pi R$

$S = \frac{1}{2} \pi R^2$

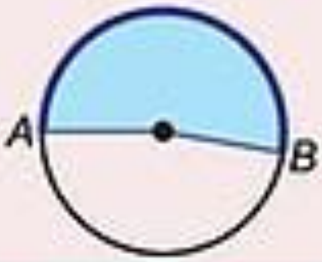
$\smile AB = 60°$



$l = \frac{1}{6} L = \frac{\pi R}{3}$

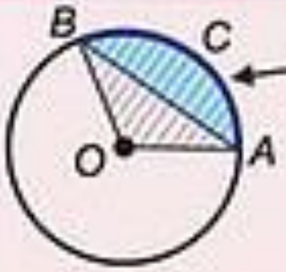
$S = \frac{1}{6} \pi R^2$

$\smile AB = m°$



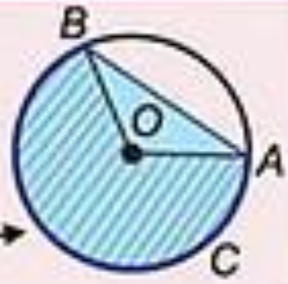
$l = \frac{m}{360} L = \frac{m}{180} \pi R \qquad S = \frac{m}{360} \pi R^2$

ПЛОЩАДЬ СЕГМЕНТА



$S_{\text{сегм.}ABC} = S_{\text{сект.}AOB} - S_{\Delta AOB}$

$S_{\text{сегм.}ABC} = S_{\text{сект.}AOB} + S_{\Delta AOB}$



РАДИАННАЯ МЕРА УГЛА

$\pi \leftrightarrow 180°$

$\frac{\pi}{2} \leftrightarrow 90°$	$\frac{\pi}{3} \leftrightarrow 60°$
$\frac{\pi}{4} \leftrightarrow 45°$	$\frac{\pi}{6} \leftrightarrow 30°$

$1° \leftrightarrow \frac{\pi}{180}$

$17° \leftrightarrow 17 \cdot \frac{\pi}{180}$

$1 \leftrightarrow \frac{180°}{\pi}$

$25 \leftrightarrow 25 \cdot \frac{180°}{\pi}$

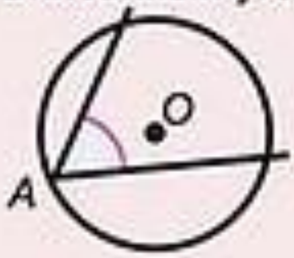
5

ПЛАНИМЕТРИЯ. ОКРУЖНОСТЬ

ЦЕНТРАЛЬНЫЕ И ВПИСАННЫЕ УГЛЫ

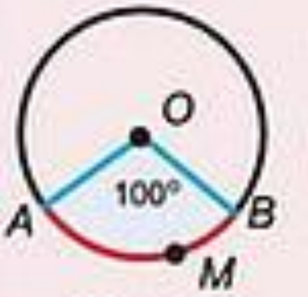
Центральный угол

Вписанный угол

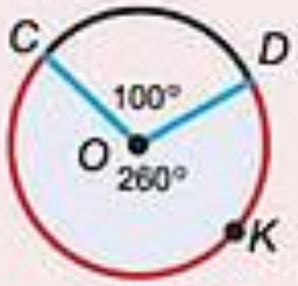


Величина центрального угла равна величине соответствующей дуги окружности

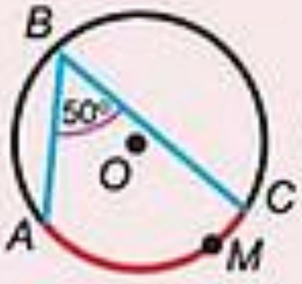
Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается



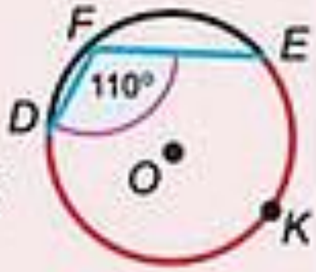
$\smile AMB = 100°$



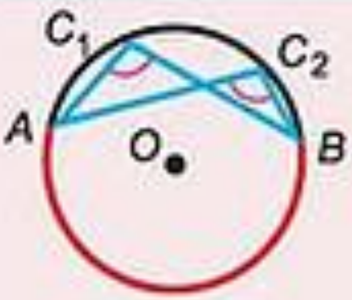
$\smile CKD = 260°$



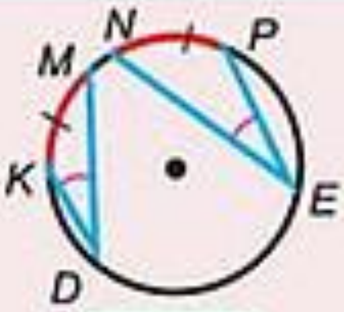
$\smile AMC = 100°$



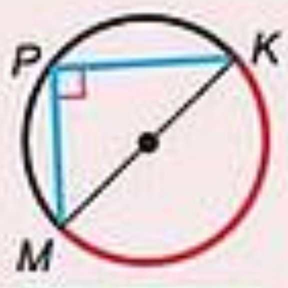
$\smile DKE = 220°$



$\angle C_1 = \angle C_2$



$\angle D = \angle E$



$\angle MPK = 90°$