

## Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1

- а) Решите уравнение  $12^{\sin x} = 4^{\sin x} \cdot 3^{-\sqrt{3} \cos x}$ .
- б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$ .

Решение.

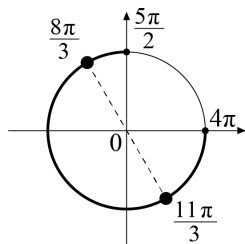
а) Преобразуем исходное уравнение:

$$4^{\sin x} \cdot 3^{\sin x} = 4^{\sin x} \cdot 3^{-\sqrt{3} \cos x}; \quad 3^{\sin x} = 3^{-\sqrt{3} \cos x};$$

$$\sin x = -\sqrt{3} \cos x; \quad \operatorname{tg} x = -\sqrt{3},$$

откуда  $x = -\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ .

- б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку  $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$ .

Получим числа:  $\frac{8\pi}{3}; \frac{11\pi}{3}$ .Ответ: а)  $-\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ ; б)  $\frac{8\pi}{3}; \frac{11\pi}{3}$ .

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а или в пункте б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C2

В правильной четырёхугольной призме  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  сторона основания равна 11, а боковое ребро  $AA_1 = 7$ . Точка  $K$  принадлежит ребру  $B_1 C_1$  и делит его в отношении 8:3, считая от вершины  $B_1$ . Найдите площадь сечения этой призмы плоскостью, проходящей через точки  $B, D$  и  $K$ .

Решение.

Пусть  $L$  — точка, в которой плоскость сечения пересекает ребро  $C_1 D_1$ . Отрезок  $KL$  параллелен диагонали  $BD$ . Искомое сечение — трапеция  $BDLK$  (рис. 1). Плоскость сечения пересекает нижнее основание по прямой  $BD$ , параллельной  $B_1 D_1$ , значит,  $KL$  параллельно  $B_1 D_1$ .

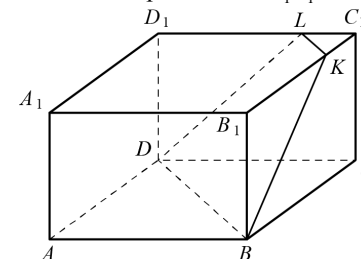


Рис. 1

Треугольники  $LC_1 K$  и  $D_1 C_1 B_1$  подобны, следовательно,

$$C_1 L : C_1 D_1 = C_1 K : C_1 B_1 = KL : B_1 D_1 = 3 : 11.$$

Значит,  $BD = B_1 D_1 = 11\sqrt{2}$ ,  $KL = 3\sqrt{2}$ .

В равных прямоугольных треугольниках  $DD_1 L$  и  $BB_1 K$  имеем  $BK = DL = \sqrt{DD_1^2 + D_1 L^2} = \sqrt{113}$ , значит, трапеция  $BDLK$  равнобедренная.

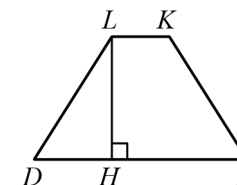


Рис. 2

Пусть  $LH$  — высота трапеции  $BDLK$ , проведённая к основанию  $BD$  (рис. 2), тогда:

$$DH = \frac{BD - KL}{2} = 4\sqrt{2}; \quad LH = \sqrt{DL^2 - DH^2} = 9;$$

$$S_{BDLK} = \frac{BD + KL}{2} \cdot LH = 63\sqrt{2}.$$

Ответ:  $63\sqrt{2}$ .

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено. ИЛИ При правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

**C3**

Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{4-x} \frac{x+3}{(x-4)^2} \geq -2, \\ x^3 + 6x^2 + \frac{28x^2 + 2x - 10}{x-5} \leq 2. \end{cases}$$

Решение.

1. Решим первое неравенство системы:

$$\log_{4-x} \frac{x+3}{(x-4)^2} \geq -2; \log_{4-x} (x+3) - \log_{4-x} (x-4)^2 \geq -2; \log_{4-x} (x+3) \geq 0.$$

Рассмотрим два случая. Первый случай:  $0 < 4 - x < 1$ ;

$$\begin{cases} \log_{4-x} (x+3) \geq 0, & \begin{cases} 0 < x+3 \leq 1, \\ 3 < x < 4; \end{cases} \text{ нет решений.} \end{cases}$$

Второй случай:  $4 - x > 1$ ;

$$\begin{cases} \log_{4-x} (x+3) \geq 0, & \begin{cases} x+3 \geq 1, \\ x < 3, \end{cases} \text{ откуда } -2 \leq x < 3. \end{cases}$$

Решение первого неравенства исходной системы:  $-2 \leq x < 3$ .

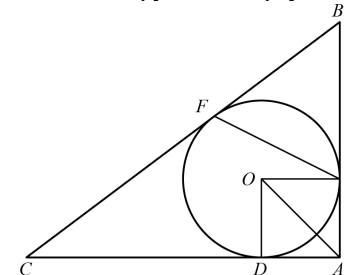
2. Решим второе неравенство системы:

$$x^3 + 6x^2 + \frac{28x^2 + 2x - 10}{x-5} \leq 2; x^3 + 6x^2 + \frac{28x^2}{x-5} \leq 0;$$

$$\frac{x^4 + x^3 - 2x^2}{x-5} \leq 0; \frac{x^2(x-1)(x+2)}{x-5} \leq 0.$$

Решение второго неравенства исходной системы:  $x \leq -2$ ;  $x = 0$ ;  $1 \leq x < 5$ .3. Решение исходной системы неравенств:  $x = -2$ ;  $x = 0$ ;  $1 \leq x < 3$ .Ответ:  $-2$ ;  $0$ ;  $[1; 3)$ .

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах исходной системы	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве исходной системы	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

**C4**В треугольник  $ABC$  вписана окружность радиуса  $R$ , касающаяся стороны  $AC$  в точке  $D$ , причём  $AD = R$ .а) Докажите, что треугольник  $ABC$  прямоугольный.б) Вписанная окружность касается сторон  $AB$  и  $BC$  в точках  $E$  и  $F$ . Найдите площадь треугольника  $BEF$ , если известно, что  $R = 5$  и  $CD = 15$ .Решение.а) Пусть  $O$  — центр вписанной окружности треугольника  $ABC$ .

Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, значит,  $AO$  — биссектриса угла  $BAC$ . Треугольник  $AOD$  прямоугольный и равнобедренный, поэтому  $\angle OAD = 45^\circ$ . Следовательно,  $\angle BAC = 90^\circ$ .

б) Обозначим  $BF = x$ . По теореме о равенстве отрезков касательных, проведённых к окружности из одной точки,  $AE = AD = 5$ ,  $CF = CD = 15$  и  $BE = BF = x$ . По теореме Пифагора  $BC^2 = AC^2 + AB^2$ , или  $(15 + x)^2 = 20^2 + (5 + x)^2$ . Из этого уравнения находим, что  $x = 10$ . Тогда

$$BC = 25, \sin \angle ABC = \frac{AC}{BC} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}.$$

Следовательно,

$$S_{\triangle BEF} = \frac{1}{2} BE \cdot BF \sin \angle ABC = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10 \cdot \frac{4}{5} = 40.$$

Ответ: 40.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте б), пункт а) не выполнен	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте б), при этом используется недоказанное утверждение из пункта а). ИЛИ Выполнен пункт а), пункт б) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

**C5** Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$x^2 - |x - a + 6| = |x + a - 6| - (a - 6)^2$$

имеет единственный корень.

Решение.

Запишем уравнение в виде

$$x^2 + (a - 6)^2 = |x + a - 6| + |x - a + 6|.$$

Если  $x_0$  является корнем исходного уравнения, то и  $-x_0$  является его корнем. Значит, исходное уравнение имеет нечётное число корней, только если  $x_0 = -x_0$ , то есть  $x_0 = 0$ . Подставим значение  $x = 0$  в уравнение:

$$(a - 6)^2 = 2|a - 6|; \quad |a - 6| \cdot (|a - 6| - 2) = 0,$$

откуда либо  $|a - 6| = 0$ ;  $a = 6$ , либо  $|a - 6| = 2$ ;  $a = 4$  или  $a = 8$ .

При  $a = 6$  уравнение принимает вид  $x^2 = 2|x|$ . Корнями этого уравнения являются числа  $-2$ ,  $0$  и  $2$ , то есть уравнение имеет ровно три корня.

При  $a = 4$  и при  $a = 8$  уравнение принимает вид  $x^2 + 4 = |x - 2| + |x + 2|$ .

При  $x < -2$  это уравнение сводится к уравнению  $x^2 + 2x + 4 = 0$ , которое не имеет корней.

При  $-2 \leq x \leq 2$  получаем уравнение  $x^2 = 0$ , которое имеет единственный корень.

При  $x > 2$  получаем уравнение  $x^2 - 2x + 4 = 0$ , которое не имеет корней.

Таким образом, при  $a = 4$  и при  $a = 8$  исходное уравнение имеет единственный корень.

Ответ:  $a = 4$  и  $a = 8$ .

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Обоснованно получены оба значения $a$ , но в ответ включено не более одного постороннего значения $a$	3
Обоснованно получено одно из значений $a$	2
Получен один из следующих результатов: — задача верно сведена к исследованию квадратных уравнений, полученных после раскрытия модулей; — есть утверждение о симметрии корней исходного уравнения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

**C6** Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и все их возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доске в порядке неубывания. Если какое-то число  $n$ , выписанное на доске, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число  $n$ , а остальные числа, равные  $n$ , стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 3, 6, 9, 12, 15.

б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 17, 18, 19, 21, 23?

в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 8, 9, 10, 17, 18, 19, 20, 27, 28, 29, 30, 37, 38, 39, 47.

Решение.

а) Задуманные числа 3, 3, 3, 3, 3 дают требуемый набор, записанный на доске.

б) Поскольку задуманные числа натуральные, наименьшее число в наборе — это наименьшее из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Среди чисел записанного набора должна быть сумма всех чисел, кроме наименьшего, то есть  $23 - 1 = 22$ . Но этого числа нет в наборе, поэтому не существует примера таких задуманных чисел, для которого на доске будет выписан набор из условия.

в) Число 8 — наименьшее число в наборе — является наименьшим из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Поэтому количество задуманных чисел не превосходит целой части числа  $\frac{47}{8}$ , то есть 5. Кроме того, числа 9 и 10 меньше, чем сумма

двух восьмёрок, поэтому они также являются задуманными. Значит, сумма оставшихся задуманных чисел равна  $47 - 8 - 9 - 10 = 20$ . Таким образом, так как наименьшее задуманное число равно 8, оставшиеся задуманные числа —

это 10 и 10 или 20 (если бы 20 получалось как  $8+12$  или  $9+11$ , то были бы выписаны числа 12 или 11, но их нет). Для задуманных чисел 8, 9, 10, 10, 10 и 8, 9, 10, 20 на доске будет записан набор, данный в условии. (Для чисел 8, 9, 10, 20 это можно проверить непосредственно, а для чисел 8, 9, 10, 10, 10 — заметить, что они будут давать точно те же суммы, что и числа 8, 9, 10, 20.)

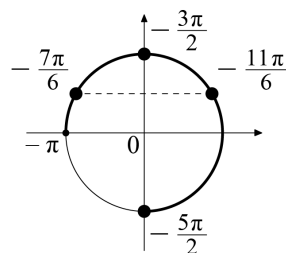
*Ответ:* а) 3, 3, 3, 3, 3; б) нет; в) 8, 9, 10, 10, 10 или 8, 9, 10, 20.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение п. а; — обоснованное решение п. б; — обоснованная оценка количества задуманных чисел в п. в; — оба набора задуманных чисел в п. в	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

**Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом****C1**а) Решите уравнение  $\left(25^{\cos x}\right)^{\sin x} = 5^{\cos x}$ .б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$ .Решение.

а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$5^{2\sin x \cos x} = 5^{\cos x}; \quad 2\sin x \cos x = \cos x; \quad \cos x \cdot (2\sin x - 1) = 0.$$

Значит, либо  $\cos x = 0$ , откуда  $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ , либо  $\sin x = \frac{1}{2}$ , откуда  $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$ или  $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ .б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку  $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$ .Получим числа  $-\frac{5\pi}{2}; -\frac{11\pi}{6}; -\frac{3\pi}{2}; -\frac{7\pi}{6}$ .Ответ: а)  $\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ ; б)  $-\frac{5\pi}{2}; -\frac{11\pi}{6}; -\frac{3\pi}{2}; -\frac{7\pi}{6}$ .

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а или в пункте б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

**C2**

В прямоугольном параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  известны рёбра  $AB = 5$ ,  $AD = 4$ ,  $AA_1 = 9$ . Точка  $O$  принадлежит ребру  $BB_1$  и делит его в отношении  $4:5$ , считая от вершины  $B$ . Найдите площадь сечения этого параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки  $A$ ,  $O$  и  $C_1$ .

Решение.

Пусть плоскость  $AOC_1$  пересекает ребро  $DD_1$  в точке  $P$ . Плоскость сечения пересекает плоскость  $CC_1 D_1$  по прямой  $C_1 P$ , параллельной  $AO$ , следовательно, искомое сечение — параллелограмм  $AOC_1 P$  (рис. 1).

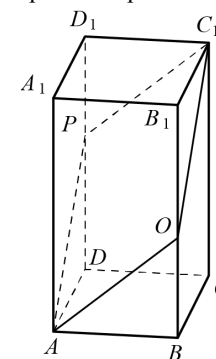


Рис. 1

Треугольники  $ADP$  и  $C_1 B_1 O$  равны, следовательно,

$$DP = B_1 O = \frac{5}{9} BB_1 = 5; \quad BO = BB_1 - B_1 O = 4. \text{ Далее,}$$

$$AP = \sqrt{AD^2 + DP^2} = \sqrt{41}; \quad AO = \sqrt{AB^2 + BO^2} = \sqrt{41},$$

значит,  $AOC_1 P$  — ромб со стороной  $\sqrt{41}$  и диагональю  $AC_1 = \sqrt{AB^2 + BC^2 + CC_1^2} = \sqrt{122}$  (рис. 2).

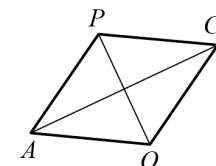


Рис. 2

Тогда другая диагональ

$$OP = 2\sqrt{AO^2 - \left(\frac{AC_1}{2}\right)^2} = \sqrt{42}; \quad S_{AOC_1 P} = \frac{AC_1 \cdot OP}{2} = \sqrt{1281}.$$

Ответ:  $\sqrt{1281}$ .

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено. ИЛИ При правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

**С3**

Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{5-x} \frac{x+2}{(x-5)^4} \geq -4, \\ x^3 + 5x^2 + \frac{28x^2 + 5x - 30}{x-6} \leq 5. \end{cases}$$

Решение.

1. Решим первое неравенство системы:

$$\log_{5-x} \frac{x+2}{(x-5)^4} \geq -4; \quad \log_{5-x} (x+2) - \log_{5-x} (x-5)^4 \geq -4;$$

$$\log_{5-x} (x+2) \geq 0.$$

Рассмотрим два случая. Первый случай:  $0 < 5-x < 1$ ;

$$\begin{cases} \log_{5-x} (x+2) \geq 0, & \begin{cases} 0 < x+2 \leq 1, \\ 4 < x < 5; \end{cases} \end{cases} \text{ нет решений.}$$

Второй случай:  $5-x > 1$ ;

$$\begin{cases} \log_{5-x} (x+2) \geq 0, & \begin{cases} x+2 \geq 1, \\ x < 4, \end{cases} \end{cases} \text{ откуда } -1 \leq x < 4.$$

Решение первого неравенства исходной системы:  $-1 \leq x < 4$ .

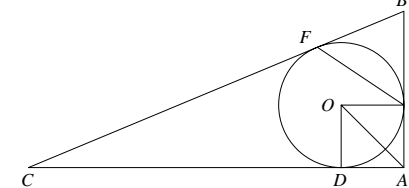
2. Решим второе неравенство системы:

$$x^3 + 5x^2 + \frac{28x^2 + 5x - 30}{x-6} \leq 5; \quad x^3 + 5x^2 + \frac{28x^2}{x-6} \leq 0;$$

$$\frac{x^4 - x^3 - 2x^2}{x-6} \leq 0; \quad \frac{x^2(x+1)(x-2)}{x-6} \leq 0.$$

Решение второго неравенства исходной системы:  $x \leq -1$ ;  $x = 0$ ;  $2 \leq x < 6$ .3. Решение исходной системы неравенств:  $x = -1$ ;  $x = 0$ ;  $2 \leq x < 4$ .Ответ:  $-1$ ;  $0$ ;  $[2; 4)$ .

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах исходной системы	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве исходной системы	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

**С4**В треугольник  $ABC$  вписана окружность радиуса  $R$ , касающаяся стороны  $AC$  в точке  $D$ , причём  $AD = R$ .а) Докажите, что треугольник  $ABC$  прямоугольный.б) Вписанная окружность касается сторон  $AB$  и  $BC$  в точках  $E$  и  $F$ . Найдите площадь треугольника  $BEF$ , если известно, что  $R = 2$  и  $CD = 10$ .Решение.а) Пусть  $O$  — центр вписанной окружности треугольника  $ABC$ . Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, значит,  $AO$  — биссектриса угла  $BAC$ . Треугольник  $AOD$  прямоугольный и равнобедренный, поэтому  $\angle OAD = 45^\circ$ . Следовательно,  $\angle BAC = 90^\circ$ .б) Обозначим  $BF = x$ . По теореме о равенстве отрезков касательных, проведённых к окружности из одной точки,  $AE = AD = 2$ ,  $CF = CD = 10$  и  $BE = BF = x$ . По теореме Пифагора  $BC^2 = AC^2 + AB^2$ , или  $(10+x)^2 = 12^2 + (2+x)^2$ . Из этого уравнения находим, что  $x = 3$ . Тогда

$$BC = 13, \quad \sin \angle ABC = \frac{AC}{BC} = \frac{12}{13}.$$

Следовательно,

$$S_{\triangle BEF} = \frac{1}{2} BE \cdot BF \sin \angle ABC = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{12}{13} = \frac{54}{13}.$$

Ответ:  $\frac{54}{13}$ .

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте б), пункт а) не выполнен	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте б), при этом используется недоказанное утверждение из пункта а). ИЛИ Выполнен пункт а), пункт б) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

**C5**

Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$x^2 + (1-a)^2 = |x-1+a| + |x-a+1|$$

имеет единственный корень.

Решение.

Запишем уравнение в виде

$$x^2 + (a-1)^2 = |x+a-1| + |x-a+1|.$$

Если  $x_0$  является корнем исходного уравнения, то и  $-x_0$  является его корнем. Значит, исходное уравнение имеет единственный корень, только если  $x_0 = -x_0$ , то есть  $x_0 = 0$ . Подставим значение  $x=0$  в исходное уравнение:

$$(1-a)^2 = 2|1-a|; |1-a| \cdot (|1-a|-2) = 0,$$

откуда либо  $|1-a|=0$ ;  $a=1$ , либо  $|1-a|=2$ ;  $a=-1$  или  $a=3$ .

При  $a=1$  исходное уравнение принимает вид  $x^2 = 2|x|$ . Корнями этого уравнения являются числа  $-2$ ;  $0$  и  $2$ , то есть исходное уравнение имеет более одного корня.

При  $a=-1$  и при  $a=3$  уравнение принимает вид  $x^2 + 4 = |x-2| + |x+2|$ .

При  $x < -2$  это уравнение сводится к уравнению  $x^2 + 2x + 4 = 0$ , которое не имеет корней.

При  $-2 \leq x \leq 2$  получаем уравнение  $x^2 = 0$ , которое имеет единственный корень.

При  $x > 2$  получаем уравнение  $x^2 - 2x + 4 = 0$ , которое не имеет корней.

При  $a=-1$  и при  $a=3$  исходное уравнение имеет единственный корень.

Ответ:  $a=-1$ ;  $a=3$ .

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Обоснованно получены оба значения $a$ , но в ответ включено не более одного постороннего значения $a$	3
Обоснованно получено одно из значений $a$	2
Получен один из следующих результатов: — задача верно сведена к исследованию квадратных уравнений, полученных после раскрытия модулей; — есть утверждение о симметрии корней исходного уравнения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

**C6**

Задумано несколько целых чисел. Набор этих чисел и все их возможные суммы (по 2, по 3 и т. д.) выписывают на доске в порядке неубывания. Например, если задуманы числа 2, 3, 5, то на доске будет выписан набор 2, 3, 5, 5, 7, 8, 10.

а) На доске выписан набор  $-3, -1, 2, 4, 6, 7, 9$ . Какие числа были задуманы?

б) Для некоторых различных задуманных чисел в наборе, выписанном на доске, число 0 встречается ровно 6 раз. Какое наименьшее количество чисел могло быть задумано?

в) Для некоторых задуманных чисел на доске выписан набор. Всегда ли по этому набору можно однозначно определить задуманные числа?

Решение.

а) Если было задумано 4 числа или более, то на доске должно быть записано не менее 15 чисел. Если было задумано 2 числа или меньше, то на доске должно быть записано не более 3 чисел. Значит, было задумано 3 числа. Если бы было задумано 2 отрицательных числа, то на доске было бы выписано не менее трёх отрицательных чисел. Значит, отрицательное число одно, и это число — наименьшее число в наборе, то есть  $-3$ . Наибольшее число в наборе 9 является суммой двух положительных задуманных чисел. Из положительных выписанных чисел только 2 и 7 дают в сумме 9. Значит, были задуманы числа  $-3, 2$  и 7.

б) Рассмотрим различные задуманные числа, среди которых нет нуля. Пусть для этих чисел в наборе на доске оказалось ровно  $k$  нулей. Если добавить к задуманным числам нуль, то на доске окажется ровно  $2k+1$  нулей:  $k$  нулей, получающихся как суммы ненулевых задуманных чисел,  $k$  нулей, получающихся как суммы ненулевых задуманных чисел и задуманного нуля, и задуманный нуль. Таким образом, если среди задуманных чисел есть нуль, то в наборе на доске окажется нечётное количество нулей.

Поскольку на доске выписано ровно 6 нулей, среди задуманных чисел нет нуля. Пусть задумано пять или меньше (ненулевых) чисел. Среди них есть

положительные и отрицательные. Нуль получается тогда, когда сумма некоторого количества положительных чисел равна по модулю сумме некоторого количества отрицательных чисел. Подумаем, сколько может быть одинаковых среди всевозможных сумм задуманных чисел одного знака. Одно задуманное число даёт одну сумму; два различных задуманных числа одного знака дают три различные суммы; три различных задуманных числа одного знака дают семь сумм, среди которых не более двух (задуманное число, наибольшее по модулю, и сумма двух других задуманных чисел) совпадают; четыре различных задуманных числа одного знака дают 15 сумм, среди которых не может быть трёх одинаковых. Значит, среди сумм положительных и отрицательных чисел совпадают по модулю не более четырёх. Таким образом, если было задумано не более пяти различных ненулевых чисел, то на доске окажется не более четырёх нулей.

Если были задуманы числа  $-5$ ;  $-2$ ;  $-1$ ;  $1$ ;  $2$ ;  $3$ , то на доске окажется ровно шесть нулей. Значит, наименьшее количество задуманных чисел — 6.

в) Нет, не всегда. Например, для задуманных чисел  $-3$ ,  $1$ ,  $2$  и  $-2$ ,  $-1$ ,  $3$  на доске будет выписан один и тот же набор  $-3$ ,  $-2$ ,  $-1$ ,  $0$ ,  $1$ ,  $2$ ,  $3$ .

Ответ: а)  $-3$ ,  $2$ ,  $7$ ; б) 6; в) нет.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — оценка количества задуманных чисел в п. а; — пример в п. а; — обоснованное решение п. б; — обоснованное решение п. в	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4