**Формы работы над формированием вычислительных навыков как средство развития познавательной активности учащихся**

Одной из важнейших задач обучения математике младших школьников является формирование у них вычислительных навыков, основу которых составляет осознанное и прочное усвоение приемов устных и письменных вычислений. Вычислительная культура является тем запасом знаний и умений, который находит повсеместное применение, является фундаментом изучения математики и других учебных дисциплин.

В век компьютерной грамотности значимость навыков письменных вычислений, несомненно, уменьшилась. Использование ЭВМ во многом облегчает процесс вычислений. Но пользоваться техникой без осознания вычислительных навыков невозможно, да и калькулятор не всегда может оказаться под рукой. Следовательно, владение вычислительными навыками необходимо. Научиться быстро и правильно выполнять письменные вычисления важно для младших школьников как в плане продолжающейся работы с числами, так и в плане практической значимости для дальнейшего обучения. Поэтому вооружение учащихся прочными вычислительными навыками продолжает оставаться серьезной педагогической проблемой. Но надо выявить, какими качествами должны обладать вычислительные навыки в современных условиях.

Характеристика вычислительных навыков.

Вычислительный навык - это высокая степень овладения вычислительными приемами. Приобрести вычислительные навыки - значит, для каждого случая знать, какие операции и в каком порядке следует выполнять, чтобы найти результат арифметического действия, и выполнять эти операции достаточно быстро.

Полноценный вычислительный навык характеризуется правильностью, осознанностью, рациональностью, обобщенностью, автоматизмом и прочностью.

Правильность - ученик правильно находит результат арифметического действия над данными числами, т.е. правильно выбирает и выполняет операции, составляющие прием.

Осознанность - ученик осознает, на основе каких знаний выбраны операции и установлен порядок их выполнения. Это для ученика своего рода доказательство правильности выбора системы операций. Осознанность проявляется в том, что ученик в любой момент может объяснить, как он решал пример и почему можно так решать. Это, конечно, не значит, что ученик всегда должен объяснять решение каждого примера. Как будет показано далее, в процессе овладения навыком объяснение должно постепенно свертываться.

Рациональность - ученик, сообразуясь с конкретными условиями, выбирает для данного случая более рациональный прием, т.е. выбирает те из возможных операций, выполнение которых легче других и быстрее приводит к результату арифметического действия. Разумеется, что это качество навыка может проявляться тогда, когда для данного случая существуют различные приемы нахождения результата, и ученик, используя различные знания, может сконструировать несколько приемов и выбрать более рациональный. Как видим, рациональность непосредственно связана с осознанностью навыка.

Обобщенность - ученик может применить прием вычисления к большему числу случаев, т.е. он способен перенести прием вычисления на новые случаи. Обобщенность так же, как и рациональность, теснейшим образом связана с осознанностью вычислительного навыка, поскольку общим для различных случаев вычисления будет прием, основа которого - одни и те же теоретические положения.

Автоматизм (свернутость) - ученик выделяет и выполняет операции быстро и в свернутом виде, но всегда может вернуться к объяснению выбора работы системы операций.

Вычислительный навык можно считать эффективным, если в рамках данного способа вычислений получение правильного результата достигается минимизацией затрат умственных ресурсов. Т.е. ученик, используя различные знания, может выбрать не обязательно более рациональный вычислительный прием с точки зрения методики, а более удобный (легкий) для него в конкретной ситуации, быстрее других приводящий к результату.

Формирование вычислительных умений и навыков - сложный длительный процесс, эффективность которого во многом зависит от индивидуальных особенностей ребенка, уровня его подготовки и способов организации вычислительной деятельности.

Необходимо выбирать такие способы организации вычислительной деятельности младших школьников, которые способствуют не только формированию прочных осознанных вычислительных умений и навыков, но и всестороннему развитию личности ребенка.

Работа по поиску рациональных приемов вычислений должна проводиться постоянно, систематически и органически увязываться с изучаемым программным материалом. Это связано с тем, что для нахождения результата арифметического действия можно пользоваться в качестве теоретической основы различными теоретическими положениями, которые и приводят к разным приемам (способам) вычислений.

Например:

1) 13х 6=13+13+13+13+13+13= 78

2) 13х 6 = (10+3)х6 = 10х6 +3х6=78

3) 13х6 = 13х(2х3)= (13х 2)х3=78

Методика формирования вычислительных навыков.

В целях формирования осознанных, обобщенных и рациональных навыков начальный курс математики строится так, что изучение того или иного вычислительного приема происходит после того, как учащиеся усвоят материал являющийся теоретической основой этого вычислительного приема.

Вычислительные группы приемов.

1. Приемы, теоретической основой которых является конкретный смысл арифметических действий.

К ним относятся: приемы сложения и вычитания чисел в пределах 10 для случаев вида а±2, а±3, а±4, а±0; прием нахождения табличных результатов умножения, прием нахождения табличных результатов деления (только на начальной стадии) и деления с остатком, приемы умножения единицы и нуля.

Это первые приемы вычислений, которые вводятся сразу после ознакомления учащихся с конкретным смыслом арифметических действий и на основе выполнения операций над множествами.

2. Приемы, теоретической основой которых служат свойства арифметических действий.

К этой группе относится большинство вычислительных приемов. Это приемы сложения и вычитания для случаев вида: 53±20, 47 ± 3, 30-6, 9+3, 12-3, 35 ± 7, 40 ± 23, 57±32, 64±18, аналогичные приемы для случаев сложения и вычитания чисел, больших, чем 100, приемы умножения и деления для случаев вида 12 х 5, 5 х 12, 81:3, 18 х 40, 180:20, аналогичные приемы умножения или деления для чисел, больших ста.

Общая схема введения этих приемов одинакова: сначала изучаются соответствующие свойства и на их основе вводятся приемы вычислений.

3. Приемы, теоретической основой которых являются связи между компонентами и результатами арифметических действий.

К ним относятся приемы для случаев вида: 9 – 7, 24 : 3, 80 : 20, 54 : 18, 9: 3, 0:6.

При введении этих приемов сначала рассматриваются связи между компонентами и результатами действий сложения или умножения, а затем на этой основе вводится вычислительный прием.

4. Приемы, теоретической основой которых является изменение результатов арифметических действий в зависимости от изменения одного из компонентов. Это приемы округления при выполнении сложения и вычитания чисел (45+19, 612- 298) и приемы умножения и деления на 5, 25, 50.

Введение этих приемов также требует предварительного изучения соответствующих зависимостей.

5. Приемы, теоретической основой которых являются вопросы нумерации чисел. Это приемы для случаев вида: а±1, 10+7, 7+10, 17- 10,17 – 7, 67х10, 1200:100, аналогичные приемы для больших чисел. Введение этих приемов предусматривается после изучения соответствующих вопросов нумерации.

6. Приемы, теоретическая основа которых — правила.

К ним относятся приемы для двух случаев ах1 и ах0. Поскольку правила умножения чисел на единицу и нуль есть следствия из определения действия умножения целых неотрицательных чисел, то они просто сообщаются учащимся и в соответствии с ними выполняются вычисления.

Целый ряд случаев может быть отнесен не только к указанной группе приемов, но и к другой. Например, случаи вида 46+19 можно отнести не только к четвертой группе, но и ко второй. Это зависит от выбора теоретической основы вычислительного приема. Все вычислительные приемы строятся на той или иной теоретической основе, причем в каждом случае учащиеся осознают сам факт использования соответствующих теоретических положений, лежащих в основе вычислительных приемов. Это и есть реальная предпосылка овладения учащимися осознанными вычислительными навыками.

Общность подходов к раскрытию вычислительных приемов каждой группы — залог овладения учащимися обобщенными вычислительными навыками.

Возможность использования различных теоретических положений при конструировании различных приемов для одного случая вычисления (например, для случая сложении 56+19) является предпосылкой формирования рациональных гибких вычислительных навыков.

Приемы рациональных вычислений.

I. Приемы сложения.

Рациональные приемы сложения основываются на коммутативном (переместительном) и ассоциативном (сочетательном) законах сложения, а также на свойствах изменения суммы.

Коммутативный закон сложения. Сумма не изменяется от перемены мест слагаемых.

Ассоциативный закон сложения. Сумма не изменится, если заменить какую-либо группу рядом стоящих слагаемых их суммой.

Свойство 1.1. Если одно из слагаемых увеличить или уменьшить на некоторое число, то сумма соответственно увеличится или уменьшится на это число

Свойство 1.2. Если одно из слагаемых увеличить на некоторое число, а другое уменьшить на это же число, то сумма не изменится.

Свойство 1.3. Если все слагаемые данной суммы увеличить или уменьшить в одно и то же число раз, то сумма соответственно увеличится или уменьшится во столько же раз.

1) Сложение, основанное на ассоциативном законе:

а) 7+4+8+6+2=7+(8+2)+(4+6)=7+10+10=27

б) 13+18+7+22= (13+7)+(18+22)=20+40=60

в) 73+106+27+204=(73+27)+(106+204)=100+310=410

2) Округление одного или нескольких слагаемых. Одно или несколько слагаемых заменяют ближайшим к нему «круглым» числом, находят сумму «круглых» чисел, а затем соответствующее дополнение (дополнения) до «круглого» числа прибавляют к полученной сумме или вычитают из нее.

а)37+49=37+50-1=86

б)198+299=200-2+300-1=500-3=497

3) Поразрядное сложение.

При сложении нескольких многозначных чисел сначала находят суммы соответствующих разрядных единиц всех чисел, а затем складывают полученные суммы. В частности, при сложении нескольких двузначных чисел сначала находят сумму всех десятков, потом — всех единиц, а затем складывают полученные суммы.

а) 13+47+29=(10+40+20)+(3+7+9)=70+19=89

4) Группировка вокруг одного и того же «корневого» числа.

Пусть требуется найти сумму 37 + 34 + 29 + 35.

Легко заметить, что все эти числа близки к числу 30, поэтому его считают «корневым», а искомую сумму вычисляют в следующей последовательности:

1) находят сумму «корневых» чисел: 30 х 4 =120, так как в сумме 4 слагаемых;

2) находят сумму отклонений каждого числа от «корневого»; при этом, если число больше «корневого», отклонение берется со знаком «плюс», если число меньше «корневого» — со знаком «минус»: 7+4-1+5=15

II. Приемы вычитания. Все приемы рациональных вычислений, связанные с вычитанием, основываются на законах сложения, правилах вычитания числа из суммы и суммы из числа, свойствах изменения разности.

Свойство 2.1. Если уменьшаемое увеличилось или уменьшилось на некоторое число, то разность соответственно увеличится или уменьшится на это число.

Свойство 2.2. Если вычитаемое увеличить или уменьшить на несколько единиц, то разность изменится в противоположном смысле на столько же единиц.

Свойство 2.3. Если уменьшаемое и вычитаемое увеличить или уменьшить на одно и то же число, то разность не изменится.

Свойство 2.4. Если уменьшаемое и вычитаемое увеличить или уменьшить в одно и то же число раз, то разность соответственно увеличится или уменьшится во столько же раз.

1) Увеличение или уменьшение уменьшаемого и вычитаемого на одно и то же число единиц.

142 - 26 = (142 - 2) - (26 - 2) = 140-24 = 116.

Этот прием особенно хорош тогда, когда вычитаемое близко к «круглому» числу.

585 - 296 = (585 + 4) - (296 + 4) = 589 - 300 = 289

2) Округление вычитаемого. Вычитаемое заменяют ближайшим к нему «круглым» числом, находят разность, а затем соответствующее дополнение до «круглого» числа прибавляют к полученной разности или вычитают из нее.

а) 506-198=506-200+2=306+2=308

б) 506-208=506-200-8=306-8=298

3) Округление уменьшаемого.

102-36=100+2-36=(100-36)+2=64+2=66

402-156=400+2-156=(400-156)+2=244+2=246

4) Разложение вычитаемого на части.

371-175=371-170-5=201-5=196

III. Приемы умножения. Все приемы рациональных вычислений для умножения основаны на законах умножения и на свойствах изменения произведения.

Коммутативный (переместительный) закон умножения. Произведение не изменится от перемены мест множителей.

Ассоциативный (сочетательный) закон умножения. Произведение не изменится, если заменить какую-либо группу рядом стоящих множителей их произведением.

Дистрибутивный (распределительный) закон умножения относительно сложения. Произведение данного числа на сумму двух чисел не изменится, если заменить его суммой произведений данного числа на каждое из этих слагаемых.

а) 15х4+15х6=15х(4+6)=15х10=150

Дистрибутивный (распределительный) закон умножения относительно

вычитания. Произведение данного числа на разность двух чисел не изменится, если заменить его разностью произведений данного числа на каждый компонент разности.

б)199х4=(200-1)х4=200х4-1х4=800-4=796 (при округлении одного из множителей)

Свойство 3.1. Если один из множителей увеличить или уменьшить в несколько раз, то произведение соответственно увеличится или уменьшится во столько же раз.

Свойство 3.2. Если один из множителей произведения умножить на какое-нибудь число, а другой разделить на это же число, то произведение не изменится.

Свойство 3.3. Если два или несколько множителей данного произведения умножить или разделить на какие-либо числа, то данное произведение соответственно умножится или разделится на произведение этих чисел.

Из рассмотренных свойств изменения произведения вытекают следующие приемы, позволяющие рационализировать вычислительный процесс.

Прием 1. Разложение одного из множителей на множители. Один из множителей представляют в виде произведения нескольких множителей, а затем последовательно умножают второй множитель на эти множители.

Данный прием позволяет сформулировать ряд правил.

Правило 1.1. Умножение на 4 (8, 16). Умножение на 4 (8, 16) сводится к двукратному (трехкратному, четырехкратному) умножению на 2.

а) 29х4=(29х2)х2=58х2=116

б) 29х8=(29х2)х4=58х4=232

с) 29х16=(29х2)х8=58х8=464

Прием 2. Увеличение одного из множителей произведения в несколько раз и одновременное уменьшение второго множителя во столько же раз. Один из множителей произведения увеличивают в несколько раз, второй — уменьшают во столько же раз, а затем находят произведение полученных чисел.

Данный прием позволяет сформулировать ряд правил.

Правило 2.1. Умножение четного числа на 15 (25, 35, 45). Чтобы умножить четное число на 15 (25, 35, 45), достаточно его разделить на два и частное умножить на 30 (50, 70, 90).

а) 26 х 15 = (26 : 2) х (15 х 2) = 13 х 30 =390

б) 26 х 25 = (26 : 2) х (25 х 2) = 13 х 50 =650

в) 26 х 35 = (26 : 2) х (35 х 2) = 13 х 70 =910

г) 26 х 45 = (26 : 2) х (45 х 2) = 13 х 90 =1170

Прием 3. Представление одного из множителей произведения в виде частного двух чисел. Один из множителей произведения представляют в виде частного двух чисел, второй множитель умножают на делимое, а затем делят на делитель.

Данный прием позволяет сформулировать ряд правил.

Правило 3.1. Умножение на 5 (50, 500). Чтобы умножить число на 5 (50, 500), достаточно умножить его на 10 (100, 1 000) и результат разделить на 2.

а) 27х5=27х10:2=270:2=135

б) 27х50=27х100:2=2700:2=1350

в) 27х500=27х1000:2=13500

Правило 3.2.Умножение на 25 (250, 2500). Чтобы умножить число на 25,250, 2500), достаточно умножить его на 100, 1 000, 10 000) и результат разделить на 4.

а) 28х25=28х100:4=700

б) 28х250=28х1000:4=7000

в) 28х2500=28х10 000:4=70 000

Правило 3.3. Умножение на 125 (1 250). Чтобы умножить число на 125

(1250), достаточно умножить его на 1 000 (10 000) и результат разделить на 8.

а) 64х125=(64х1000):8=8000

б) 64х1250=(64х10000):8=80000

Небольшие изменения приема 3 позволяют сформулировать следующее правило умножения на 75.

Правило 3.4. Умножение на 75. Чтобы умножить число на 75, достаточно разделить его на 4, умножить частное на 3 и результат умножить на 100, т.к.

75=100:4 х3

104 х 75 = (104 : 4) х 3 х 100 = 26х3 х100 = 78х100 = 7800

Прием 4. Представление одного из множителей произведения в виде разности двух чисел. Один из множителей произведения представляют в виде разности двух чисел, второй множитель умножают на уменьшаемое и вычитаемое, а затем находят разность получившихся произведений.

Данный прием позволяет сформулировать ряд правил.

Правило 4.1. Умножение на 9 (99, 999). Чтобы умножить число на 9 (99, 999), достаточно увеличить его в 10 (100, 1 000) раз и из полученного результата вычесть само число.

а) 57 х 9 = 57 х 10 - 57 = 570 - 57 = 513;

б) 57 х 99 = 57 х 100 - 57 = 5700 - 57 = 5643

в) 57 х 999 = 57 х 1000 - 57 = 57000 - 57 = 56943

Прием 5. Представление одного из множителей произведения в виде суммы двух чисел. Один из множителей произведения представляют в виде суммы двух чисел, второй множитель умножают на каждое слагаемое, а затем складывают получившиеся произведения.

Данный прием позволяет сформулировать ряд правил.

Правило 5.1. Умножение на 11 (101, 1001). Чтобы умножить число на 11 (101, 1001), достаточно увеличить его в 10 раз и к полученному результату прибавить это число.

а) 67 х11 = 67 х 10 + 67 = 670 + 67 = 737

б) 67х 101 =67 х 100 + 67 = 6700 + 67 =6 767

в) 67 х1001 = 67 х 1000 + 67 = 67000 + 67 = 67067

Существуют еще интересные правила умножения двузначных чисел на 11, 101, 99.

Правило 5.2. Умножение двузначного числа на 11. Чтобы умножить двузначное число на 11, достаточно раздвинуть его цифры и вставить между ними их сумму. Причем, если эта сумма сама является двузначной, то ее единицы вставляются между цифрами данного числа, а десятки прибавляются к первой цифре.

Пример. Для нахождения значения произведения 63х11 проделаем следующее

1) находим сумму 6 + 3 = 9;

2) раздвигаем цифры числа 63, вставив между ними цифру 9, получим ответ:

63 х 11 = 693.

Пример. Для нахождения значения произведения 58 х 11 проделаем следующее:

1) находим сумму 5 + 8 = 13;

2) раздвигаем цифры числа 58, вставив между ними цифру 3, десятки увеличиваем на 1 (5 + 1 = 6), получим ответ: 58 х 11 = 638.

Правило5.3. Умножение двузначного числа на 101. Чтобы умножить двузначное число на 101, достаточно справа к нему приписать само число.

Пример. 73х101 = 7373.

Правило 5.4. Умножение двузначного числа на 99. Чтобы умножить двузначное число на 99, достаточно к предшествующему числу приписать его дополнение до 100.

Пример. 13х99 = 1287.

Прием 6. Умножение чисел меньших двадцати. Чтобы умножить два числа, которые меньше двадцати, достаточно прибавить к первому единицы второго, к результату приписать нуль и прибавить произведение единиц.

Пример. Для нахождения значения произведения 16х13 проделаем следующее:

1) к первому числу прибавляем единицы второго 16 + 3=19;

2) приписываем к результату нуль и прибавляем произведение единиц, получаем ответ: 190 + 6х3 =208.

IV. Приемы деления. Приемы рациональных вычислений для деления основаны на законах умножения и следующих свойствах изменения частного:

Свойство 4.1. Если делимое увеличить или уменьшить в несколько раз, то частное соответственно увеличится или уменьшится во столько же раз.

Свойство 4.2. Если делитель увеличить (уменьшить) в несколько раз, то частное уменьшится (увеличится) во столько же раз.

Рассмотрим приемы, основанные на данных свойствах, позволяющие упростить вычислительный процесс.

Прием 1. Представление делителя в виде частного двух чисел. Делитель представляют в виде частного двух чисел, делимое умножают на второе число, а затем этот результат делят на первое число.

Данный прием позволяет сформулировать ряд правил.

Правило 4. 1. Деление на 5 (50, 500).Чтобы разделить число на 5(50,500) достаточно умножить его на 2 и результат разделить на 10(100, 1000),.

а) 165:5=(165х2):10=330:10=33

б) 1650:50=(1650х2):100=3300:100=33

в) 16500:500=(16500х2):1000=33000:1000=33

Правило 4. 2. Деление на 25 (250). Чтобы разделить число на 25 (250), достаточно умножить его на 4 и разделить на 100 (1 000).

а) 1 100 : 25 = (1 100 х 4) : 100 =4400 : 100 = 44

б) 11000 : 250 = (11 000 х 4) : 1 000 =44 000: 1 000 = 44

Практически все рассмотренные выше приемы рациональных вычислений могут освоить учащиеся начальных классов, если учитель постоянно будет проводить соответствующую работу, начиная с I класса.

В методике работы над каждым отдельным приемом предусматривается ряд этапов.

I. Подготовка к введению нового приема.

На этом этапе создается готовность к усвоению вычислительного приема, а именно: учащиеся должны усвоить те теоретические положения, на которых основывается вычислительный прием, а также овладеть каждой операцией составляющей прием.

II. Ознакомление с вычислительным приемом.

На этом этапе ученики усваивают суть приема: какие операции надо выполнять, в каком порядке и почему именно так можно найти результат арифметического действия.

Выполнение каждой операции важно сопровождать пояснениями вслух. Сначала эти пояснения выполняются под руководством учителя, а затем учащиеся выполняют их самостоятельно.

Ш. Закрепление знания приема и выработка вычислительного навыка.

На этом этапе учащиеся должны твердо усвоить систему операций, составляющих прием, и предельно быстро выполнять эти операции, т. е. овладеть вычислительным навыком.

В процессе работы здесь важно предусмотреть ряд стадий в становлении у учащихся вычислительных навыков.

а) на первой из них закрепляется знание приема;

б) на второй – происходит частичное свертывание выполнения операций;

в) на третьей - происходит полное свертывание выполнения операций.

Овладение учащимися вычислительными навыками достигается в результате достаточного числа тренировочных упражнений.

Важно, чтобы они были разнообразными как по числовым данным, так и по форме, чтобы при этом предусматривались аналогии в приемах и в соответствии с ними предлагались упражнения на сравнение приемов, сходных в том или ином отношении.

Одной из важнейших задач обучения математике младших школьников является формирование у них вычислительных навыков, основу которых составляет осознанное и прочное усвоение приемов устных и письменных вычислений. Вычислительная культура является тем запасом знаний и умений, который находит повсеместное применение, является фундаментом изучения математики и других учебных дисциплин.

В век компьютерной грамотности значимость навыков письменных вычислений, несомненно, уменьшилась. Использование ЭВМ во многом облегчает процесс вычислений. Но пользоваться техникой без осознания вычислительных навыков невозможно, да и калькулятор не всегда может оказаться под рукой. Следовательно, владение вычислительными навыками необходимо. Научиться быстро и правильно выполнять письменные вычисления важно для младших школьников как в плане продолжающейся работы с числами, так и в плане практической значимости для дальнейшего обучения. Поэтому вооружение учащихся прочными вычислительными навыками продолжает оставаться серьезной педагогической проблемой. Но надо выявить, какими качествами должны обладать вычислительные навыки в современных условиях.

Характеристика вычислительных навыков.

Вычислительный навык - это высокая степень овладения вычислительными приемами. Приобрести вычислительные навыки - значит, для каждого случая знать, какие операции и в каком порядке следует выполнять, чтобы найти результат арифметического действия, и выполнять эти операции достаточно быстро.

Полноценный вычислительный навык характеризуется правильностью, осознанностью, рациональностью, обобщенностью, автоматизмом и прочностью.

Правильность - ученик правильно находит результат арифметического действия над данными числами, т.е. правильно выбирает и выполняет операции, составляющие прием.

Осознанность - ученик осознает, на основе каких знаний выбраны операции и установлен порядок их выполнения. Это для ученика своего рода доказательство правильности выбора системы операций. Осознанность проявляется в том, что ученик в любой момент может объяснить, как он решал пример и почему можно так решать. Это, конечно, не значит, что ученик всегда должен объяснять решение каждого примера. Как будет показано далее, в процессе овладения навыком объяснение должно постепенно свертываться.

Рациональность - ученик, сообразуясь с конкретными условиями, выбирает для данного случая более рациональный прием, т.е. выбирает те из возможных операций, выполнение которых легче других и быстрее приводит к результату арифметического действия. Разумеется, что это качество навыка может проявляться тогда, когда для данного случая существуют различные приемы нахождения результата, и ученик, используя различные знания, может сконструировать несколько приемов и выбрать более рациональный. Как видим, рациональность непосредственно связана с осознанностью навыка.

Обобщенность - ученик может применить прием вычисления к большему числу случаев, т.е. он способен перенести прием вычисления на новые случаи. Обобщенность так же, как и рациональность, теснейшим образом связана с осознанностью вычислительного навыка, поскольку общим для различных случаев вычисления будет прием, основа которого - одни и те же теоретические положения.

Автоматизм (свернутость) - ученик выделяет и выполняет операции быстро и в свернутом виде, но всегда может вернуться к объяснению выбора работы системы операций.

Вычислительный навык можно считать эффективным, если в рамках данного способа вычислений получение правильного результата достигается минимизацией затрат умственных ресурсов. Т.е. ученик, используя различные знания, может выбрать не обязательно более рациональный вычислительный прием с точки зрения методики, а более удобный (легкий) для него в конкретной ситуации, быстрее других приводящий к результату.

Формирование вычислительных умений и навыков - сложный длительный процесс, эффективность которого во многом зависит от индивидуальных особенностей ребенка, уровня его подготовки и способов организации вычислительной деятельности.

Необходимо выбирать такие способы организации вычислительной деятельности младших школьников, которые способствуют не только формированию прочных осознанных вычислительных умений и навыков, но и всестороннему развитию личности ребенка.

Работа по поиску рациональных приемов вычислений должна проводиться постоянно, систематически и органически увязываться с изучаемым программным материалом. Это связано с тем, что для нахождения результата арифметического действия можно пользоваться в качестве теоретической основы различными теоретическими положениями, которые и приводят к разным приемам (способам) вычислений.

Например:

1) 13х 6=13+13+13+13+13+13= 78

2) 13х 6 = (10+3)х6 = 10х6 +3х6=78

3) 13х6 = 13х(2х3)= (13х 2)х3=78

Методика формирования вычислительных навыков.

В целях формирования осознанных, обобщенных и рациональных навыков начальный курс математики строится так, что изучение того или иного вычислительного приема происходит после того, как учащиеся усвоят материал являющийся теоретической основой этого вычислительного приема.

Вычислительные группы приемов.

1. Приемы, теоретической основой которых является конкретный смысл арифметических действий.

К ним относятся: приемы сложения и вычитания чисел в пределах 10 для случаев вида а±2, а±3, а±4, а±0; прием нахождения табличных результатов умножения, прием нахождения табличных результатов деления (только на начальной стадии) и деления с остатком, приемы умножения единицы и нуля.

Это первые приемы вычислений, которые вводятся сразу после ознакомления учащихся с конкретным смыслом арифметических действий и на основе выполнения операций над множествами.

2. Приемы, теоретической основой которых служат свойства арифметических действий.

К этой группе относится большинство вычислительных приемов. Это приемы сложения и вычитания для случаев вида: 53±20, 47 ± 3, 30-6, 9+3, 12-3, 35 ± 7, 40 ± 23, 57±32, 64±18, аналогичные приемы для случаев сложения и вычитания чисел, больших, чем 100, приемы умножения и деления для случаев вида 12 х 5, 5 х 12, 81:3, 18 х 40, 180:20, аналогичные приемы умножения или деления для чисел, больших ста.

Общая схема введения этих приемов одинакова: сначала изучаются соответствующие свойства и на их основе вводятся приемы вычислений.

3. Приемы, теоретической основой которых являются связи между компонентами и результатами арифметических действий.

К ним относятся приемы для случаев вида: 9 – 7, 24 : 3, 80 : 20, 54 : 18, 9: 3, 0:6.

При введении этих приемов сначала рассматриваются связи между компонентами и результатами действий сложения или умножения, а затем на этой основе вводится вычислительный прием.

4. Приемы, теоретической основой которых является изменение результатов арифметических действий в зависимости от изменения одного из компонентов. Это приемы округления при выполнении сложения и вычитания чисел (45+19, 612- 298) и приемы умножения и деления на 5, 25, 50.

Введение этих приемов также требует предварительного изучения соответствующих зависимостей.

5. Приемы, теоретической основой которых являются вопросы нумерации чисел. Это приемы для случаев вида: а±1, 10+7, 7+10, 17- 10,17 – 7, 67х10, 1200:100, аналогичные приемы для больших чисел. Введение этих приемов предусматривается после изучения соответствующих вопросов нумерации.

6. Приемы, теоретическая основа которых — правила.

К ним относятся приемы для двух случаев ах1 и ах0. Поскольку правила умножения чисел на единицу и нуль есть следствия из определения действия умножения целых неотрицательных чисел, то они просто сообщаются учащимся и в соответствии с ними выполняются вычисления.

Целый ряд случаев может быть отнесен не только к указанной группе приемов, но и к другой. Например, случаи вида 46+19 можно отнести не только к четвертой группе, но и ко второй. Это зависит от выбора теоретической основы вычислительного приема. Все вычислительные приемы строятся на той или иной теоретической основе, причем в каждом случае учащиеся осознают сам факт использования соответствующих теоретических положений, лежащих в основе вычислительных приемов. Это и есть реальная предпосылка овладения учащимися осознанными вычислительными навыками.

Общность подходов к раскрытию вычислительных приемов каждой группы — залог овладения учащимися обобщенными вычислительными навыками.

Возможность использования различных теоретических положений при конструировании различных приемов для одного случая вычисления (например, для случая сложении 56+19) является предпосылкой формирования рациональных гибких вычислительных навыков.

Приемы рациональных вычислений.

I. Приемы сложения.

Рациональные приемы сложения основываются на коммутативном (переместительном) и ассоциативном (сочетательном) законах сложения, а также на свойствах изменения суммы.

Коммутативный закон сложения. Сумма не изменяется от перемены мест слагаемых.

Ассоциативный закон сложения. Сумма не изменится, если заменить какую-либо группу рядом стоящих слагаемых их суммой.

Свойство 1.1. Если одно из слагаемых увеличить или уменьшить на некоторое число, то сумма соответственно увеличится или уменьшится на это число

Свойство 1.2. Если одно из слагаемых увеличить на некоторое число, а другое уменьшить на это же число, то сумма не изменится.

Свойство 1.3. Если все слагаемые данной суммы увеличить или уменьшить в одно и то же число раз, то сумма соответственно увеличится или уменьшится во столько же раз.

1) Сложение, основанное на ассоциативном законе:

а) 7+4+8+6+2=7+(8+2)+(4+6)=7+10+10=27

б) 13+18+7+22= (13+7)+(18+22)=20+40=60

в) 73+106+27+204=(73+27)+(106+204)=100+310=410

2) Округление одного или нескольких слагаемых. Одно или несколько слагаемых заменяют ближайшим к нему «круглым» числом, находят сумму «круглых» чисел, а затем соответствующее дополнение (дополнения) до «круглого» числа прибавляют к полученной сумме или вычитают из нее.

а)37+49=37+50-1=86

б)198+299=200-2+300-1=500-3=497

3) Поразрядное сложение.

При сложении нескольких многозначных чисел сначала находят суммы соответствующих разрядных единиц всех чисел, а затем складывают полученные суммы. В частности, при сложении нескольких двузначных чисел сначала находят сумму всех десятков, потом — всех единиц, а затем складывают полученные суммы.

а) 13+47+29=(10+40+20)+(3+7+9)=70+19=89

4) Группировка вокруг одного и того же «корневого» числа.

Пусть требуется найти сумму 37 + 34 + 29 + 35.

Легко заметить, что все эти числа близки к числу 30, поэтому его считают «корневым», а искомую сумму вычисляют в следующей последовательности:

1) находят сумму «корневых» чисел: 30 х 4 =120, так как в сумме 4 слагаемых;

2) находят сумму отклонений каждого числа от «корневого»; при этом, если число больше «корневого», отклонение берется со знаком «плюс», если число меньше «корневого» — со знаком «минус»: 7+4-1+5=15

II. Приемы вычитания. Все приемы рациональных вычислений, связанные с вычитанием, основываются на законах сложения, правилах вычитания числа из суммы и суммы из числа, свойствах изменения разности.

Свойство 2.1. Если уменьшаемое увеличилось или уменьшилось на некоторое число, то разность соответственно увеличится или уменьшится на это число.

Свойство 2.2. Если вычитаемое увеличить или уменьшить на несколько единиц, то разность изменится в противоположном смысле на столько же единиц.

Свойство 2.3. Если уменьшаемое и вычитаемое увеличить или уменьшить на одно и то же число, то разность не изменится.

Свойство 2.4. Если уменьшаемое и вычитаемое увеличить или уменьшить в одно и то же число раз, то разность соответственно увеличится или уменьшится во столько же раз.

1) Увеличение или уменьшение уменьшаемого и вычитаемого на одно и то же число единиц.

142 - 26 = (142 - 2) - (26 - 2) = 140-24 = 116.

Этот прием особенно хорош тогда, когда вычитаемое близко к «круглому» числу.

585 - 296 = (585 + 4) - (296 + 4) = 589 - 300 = 289

2) Округление вычитаемого. Вычитаемое заменяют ближайшим к нему «круглым» числом, находят разность, а затем соответствующее дополнение до «круглого» числа прибавляют к полученной разности или вычитают из нее.

а) 506-198=506-200+2=306+2=308

б) 506-208=506-200-8=306-8=298

3) Округление уменьшаемого.

102-36=100+2-36=(100-36)+2=64+2=66

402-156=400+2-156=(400-156)+2=244+2=246

4) Разложение вычитаемого на части.

371-175=371-170-5=201-5=196

III. Приемы умножения. Все приемы рациональных вычислений для умножения основаны на законах умножения и на свойствах изменения произведения.

Коммутативный (переместительный) закон умножения. Произведение не изменится от перемены мест множителей.

Ассоциативный (сочетательный) закон умножения. Произведение не изменится, если заменить какую-либо группу рядом стоящих множителей их произведением.

Дистрибутивный (распределительный) закон умножения относительно сложения. Произведение данного числа на сумму двух чисел не изменится, если заменить его суммой произведений данного числа на каждое из этих слагаемых.

а) 15х4+15х6=15х(4+6)=15х10=150

Дистрибутивный (распределительный) закон умножения относительно

вычитания. Произведение данного числа на разность двух чисел не изменится, если заменить его разностью произведений данного числа на каждый компонент разности.

б)199х4=(200-1)х4=200х4-1х4=800-4=796 (при округлении одного из множителей)

Свойство 3.1. Если один из множителей увеличить или уменьшить в несколько раз, то произведение соответственно увеличится или уменьшится во столько же раз.

Свойство 3.2. Если один из множителей произведения умножить на какое-нибудь число, а другой разделить на это же число, то произведение не изменится.

Свойство 3.3. Если два или несколько множителей данного произведения умножить или разделить на какие-либо числа, то данное произведение соответственно умножится или разделится на произведение этих чисел.

Из рассмотренных свойств изменения произведения вытекают следующие приемы, позволяющие рационализировать вычислительный процесс.

Прием 1. Разложение одного из множителей на множители. Один из множителей представляют в виде произведения нескольких множителей, а затем последовательно умножают второй множитель на эти множители.

Данный прием позволяет сформулировать ряд правил.

Правило 1.1. Умножение на 4 (8, 16). Умножение на 4 (8, 16) сводится к двукратному (трехкратному, четырехкратному) умножению на 2.

а) 29х4=(29х2)х2=58х2=116

б) 29х8=(29х2)х4=58х4=232

с) 29х16=(29х2)х8=58х8=464

Прием 2. Увеличение одного из множителей произведения в несколько раз и одновременное уменьшение второго множителя во столько же раз. Один из множителей произведения увеличивают в несколько раз, второй — уменьшают во столько же раз, а затем находят произведение полученных чисел.

Данный прием позволяет сформулировать ряд правил.

Правило 2.1. Умножение четного числа на 15 (25, 35, 45). Чтобы умножить четное число на 15 (25, 35, 45), достаточно его разделить на два и частное умножить на 30 (50, 70, 90).

а) 26 х 15 = (26 : 2) х (15 х 2) = 13 х 30 =390

б) 26 х 25 = (26 : 2) х (25 х 2) = 13 х 50 =650

в) 26 х 35 = (26 : 2) х (35 х 2) = 13 х 70 =910

г) 26 х 45 = (26 : 2) х (45 х 2) = 13 х 90 =1170

Прием 3. Представление одного из множителей произведения в виде частного двух чисел. Один из множителей произведения представляют в виде частного двух чисел, второй множитель умножают на делимое, а затем делят на делитель.

Данный прием позволяет сформулировать ряд правил.

Правило 3.1. Умножение на 5 (50, 500). Чтобы умножить число на 5 (50, 500), достаточно умножить его на 10 (100, 1 000) и результат разделить на 2.

а) 27х5=27х10:2=270:2=135

б) 27х50=27х100:2=2700:2=1350

в) 27х500=27х1000:2=13500

Правило 3.2.Умножение на 25 (250, 2500). Чтобы умножить число на 25,250, 2500), достаточно умножить его на 100, 1 000, 10 000) и результат разделить на 4.

а) 28х25=28х100:4=700

б) 28х250=28х1000:4=7000

в) 28х2500=28х10 000:4=70 000

Правило 3.3. Умножение на 125 (1 250). Чтобы умножить число на 125

(1250), достаточно умножить его на 1 000 (10 000) и результат разделить на 8.

а) 64х125=(64х1000):8=8000

б) 64х1250=(64х10000):8=80000

Небольшие изменения приема 3 позволяют сформулировать следующее правило умножения на 75.

Правило 3.4. Умножение на 75. Чтобы умножить число на 75, достаточно разделить его на 4, умножить частное на 3 и результат умножить на 100, т.к.

75=100:4 х3

104 х 75 = (104 : 4) х 3 х 100 = 26х3 х100 = 78х100 = 7800

Прием 4. Представление одного из множителей произведения в виде разности двух чисел. Один из множителей произведения представляют в виде разности двух чисел, второй множитель умножают на уменьшаемое и вычитаемое, а затем находят разность получившихся произведений.

Данный прием позволяет сформулировать ряд правил.

Правило 4.1. Умножение на 9 (99, 999). Чтобы умножить число на 9 (99, 999), достаточно увеличить его в 10 (100, 1 000) раз и из полученного результата вычесть само число.

а) 57 х 9 = 57 х 10 - 57 = 570 - 57 = 513;

б) 57 х 99 = 57 х 100 - 57 = 5700 - 57 = 5643

в) 57 х 999 = 57 х 1000 - 57 = 57000 - 57 = 56943

Прием 5. Представление одного из множителей произведения в виде суммы двух чисел. Один из множителей произведения представляют в виде суммы двух чисел, второй множитель умножают на каждое слагаемое, а затем складывают получившиеся произведения.

Данный прием позволяет сформулировать ряд правил.

Правило 5.1. Умножение на 11 (101, 1001). Чтобы умножить число на 11 (101, 1001), достаточно увеличить его в 10 раз и к полученному результату прибавить это число.

а) 67 х11 = 67 х 10 + 67 = 670 + 67 = 737

б) 67х 101 =67 х 100 + 67 = 6700 + 67 =6 767

в) 67 х1001 = 67 х 1000 + 67 = 67000 + 67 = 67067

Существуют еще интересные правила умножения двузначных чисел на 11, 101, 99.

Правило 5.2. Умножение двузначного числа на 11. Чтобы умножить двузначное число на 11, достаточно раздвинуть его цифры и вставить между ними их сумму. Причем, если эта сумма сама является двузначной, то ее единицы вставляются между цифрами данного числа, а десятки прибавляются к первой цифре.

Пример. Для нахождения значения произведения 63х11 проделаем следующее

1) находим сумму 6 + 3 = 9;

2) раздвигаем цифры числа 63, вставив между ними цифру 9, получим ответ:

63 х 11 = 693.

Пример. Для нахождения значения произведения 58 х 11 проделаем следующее:

1) находим сумму 5 + 8 = 13;

2) раздвигаем цифры числа 58, вставив между ними цифру 3, десятки увеличиваем на 1 (5 + 1 = 6), получим ответ: 58 х 11 = 638.

Правило5.3. Умножение двузначного числа на 101. Чтобы умножить двузначное число на 101, достаточно справа к нему приписать само число.

Пример. 73х101 = 7373.

Правило 5.4. Умножение двузначного числа на 99. Чтобы умножить двузначное число на 99, достаточно к предшествующему числу приписать его дополнение до 100.

Пример. 13х99 = 1287.

Прием 6. Умножение чисел меньших двадцати. Чтобы умножить два числа, которые меньше двадцати, достаточно прибавить к первому единицы второго, к результату приписать нуль и прибавить произведение единиц.

Пример. Для нахождения значения произведения 16х13 проделаем следующее:

1) к первому числу прибавляем единицы второго 16 + 3=19;

2) приписываем к результату нуль и прибавляем произведение единиц, получаем ответ: 190 + 6х3 =208.

IV. Приемы деления. Приемы рациональных вычислений для деления основаны на законах умножения и следующих свойствах изменения частного:

Свойство 4.1. Если делимое увеличить или уменьшить в несколько раз, то частное соответственно увеличится или уменьшится во столько же раз.

Свойство 4.2. Если делитель увеличить (уменьшить) в несколько раз, то частное уменьшится (увеличится) во столько же раз.

Рассмотрим приемы, основанные на данных свойствах, позволяющие упростить вычислительный процесс.

Прием 1. Представление делителя в виде частного двух чисел. Делитель представляют в виде частного двух чисел, делимое умножают на второе число, а затем этот результат делят на первое число.

Данный прием позволяет сформулировать ряд правил.

Правило 4. 1. Деление на 5 (50, 500).Чтобы разделить число на 5(50,500) достаточно умножить его на 2 и результат разделить на 10(100, 1000),.

а) 165:5=(165х2):10=330:10=33

б) 1650:50=(1650х2):100=3300:100=33

в) 16500:500=(16500х2):1000=33000:1000=33

Правило 4. 2. Деление на 25 (250). Чтобы разделить число на 25 (250), достаточно умножить его на 4 и разделить на 100 (1 000).

а) 1 100 : 25 = (1 100 х 4) : 100 =4400 : 100 = 44

б) 11000 : 250 = (11 000 х 4) : 1 000 =44 000: 1 000 = 44

Практически все рассмотренные выше приемы рациональных вычислений могут освоить учащиеся начальных классов, если учитель постоянно будет проводить соответствующую работу, начиная с I класса.

В методике работы над каждым отдельным приемом предусматривается ряд этапов.

I. Подготовка к введению нового приема.

На этом этапе создается готовность к усвоению вычислительного приема, а именно: учащиеся должны усвоить те теоретические положения, на которых основывается вычислительный прием, а также овладеть каждой операцией составляющей прием.

II. Ознакомление с вычислительным приемом.

На этом этапе ученики усваивают суть приема: какие операции надо выполнять, в каком порядке и почему именно так можно найти результат арифметического действия.

Выполнение каждой операции важно сопровождать пояснениями вслух. Сначала эти пояснения выполняются под руководством учителя, а затем учащиеся выполняют их самостоятельно.

Ш. Закрепление знания приема и выработка вычислительного навыка.

На этом этапе учащиеся должны твердо усвоить систему операций, составляющих прием, и предельно быстро выполнять эти операции, т. е. овладеть вычислительным навыком.

В процессе работы здесь важно предусмотреть ряд стадий в становлении у учащихся вычислительных навыков.

а) на первой из них закрепляется знание приема;

б) на второй – происходит частичное свертывание выполнения операций;

в) на третьей - происходит полное свертывание выполнения операций.

Овладение учащимися вычислительными навыками достигается в результате достаточного числа тренировочных упражнений.

Важно, чтобы они были разнообразными как по числовым данным, так и по форме, чтобы при этом предусматривались аналогии в приемах и в соответствии с ними предлагались упражнения на сравнение приемов, сходных в том или ином отношении.

Одной из важнейших задач обучения математике младших школьников является формирование у них вычислительных навыков, основу которых составляет осознанное и прочное усвоение приемов устных и письменных вычислений. Вычислительная культура является тем запасом знаний и умений, который находит повсеместное применение, является фундаментом изучения математики и других учебных дисциплин.

В век компьютерной грамотности значимость навыков письменных вычислений, несомненно, уменьшилась. Использование ЭВМ во многом облегчает процесс вычислений. Но пользоваться техникой без осознания вычислительных навыков невозможно, да и калькулятор не всегда может оказаться под рукой. Следовательно, владение вычислительными навыками необходимо. Научиться быстро и правильно выполнять письменные вычисления важно для младших школьников как в плане продолжающейся работы с числами, так и в плане практической значимости для дальнейшего обучения. Поэтому вооружение учащихся прочными вычислительными навыками продолжает оставаться серьезной педагогической проблемой. Но надо выявить, какими качествами должны обладать вычислительные навыки в современных условиях.

Характеристика вычислительных навыков.

Вычислительный навык - это высокая степень овладения вычислительными приемами. Приобрести вычислительные навыки - значит, для каждого случая знать, какие операции и в каком порядке следует выполнять, чтобы найти результат арифметического действия, и выполнять эти операции достаточно быстро.

Полноценный вычислительный навык характеризуется правильностью, осознанностью, рациональностью, обобщенностью, автоматизмом и прочностью.

Правильность - ученик правильно находит результат арифметического действия над данными числами, т.е. правильно выбирает и выполняет операции, составляющие прием.

Осознанность - ученик осознает, на основе каких знаний выбраны операции и установлен порядок их выполнения. Это для ученика своего рода доказательство правильности выбора системы операций. Осознанность проявляется в том, что ученик в любой момент может объяснить, как он решал пример и почему можно так решать. Это, конечно, не значит, что ученик всегда должен объяснять решение каждого примера. Как будет показано далее, в процессе овладения навыком объяснение должно постепенно свертываться.

Рациональность - ученик, сообразуясь с конкретными условиями, выбирает для данного случая более рациональный прием, т.е. выбирает те из возможных операций, выполнение которых легче других и быстрее приводит к результату арифметического действия. Разумеется, что это качество навыка может проявляться тогда, когда для данного случая существуют различные приемы нахождения результата, и ученик, используя различные знания, может сконструировать несколько приемов и выбрать более рациональный. Как видим, рациональность непосредственно связана с осознанностью навыка.

Обобщенность - ученик может применить прием вычисления к большему числу случаев, т.е. он способен перенести прием вычисления на новые случаи. Обобщенность так же, как и рациональность, теснейшим образом связана с осознанностью вычислительного навыка, поскольку общим для различных случаев вычисления будет прием, основа которого - одни и те же теоретические положения.

Автоматизм (свернутость) - ученик выделяет и выполняет операции быстро и в свернутом виде, но всегда может вернуться к объяснению выбора работы системы операций.

Вычислительный навык можно считать эффективным, если в рамках данного способа вычислений получение правильного результата достигается минимизацией затрат умственных ресурсов. Т.е. ученик, используя различные знания, может выбрать не обязательно более рациональный вычислительный прием с точки зрения методики, а более удобный (легкий) для него в конкретной ситуации, быстрее других приводящий к результату.

Формирование вычислительных умений и навыков - сложный длительный процесс, эффективность которого во многом зависит от индивидуальных особенностей ребенка, уровня его подготовки и способов организации вычислительной деятельности.

Необходимо выбирать такие способы организации вычислительной деятельности младших школьников, которые способствуют не только формированию прочных осознанных вычислительных умений и навыков, но и всестороннему развитию личности ребенка.

Работа по поиску рациональных приемов вычислений должна проводиться постоянно, систематически и органически увязываться с изучаемым программным материалом. Это связано с тем, что для нахождения результата арифметического действия можно пользоваться в качестве теоретической основы различными теоретическими положениями, которые и приводят к разным приемам (способам) вычислений.

Например:

1) 13х 6=13+13+13+13+13+13= 78

2) 13х 6 = (10+3)х6 = 10х6 +3х6=78

3) 13х6 = 13х(2х3)= (13х 2)х3=78

Методика формирования вычислительных навыков.

В целях формирования осознанных, обобщенных и рациональных навыков начальный курс математики строится так, что изучение того или иного вычислительного приема происходит после того, как учащиеся усвоят материал являющийся теоретической основой этого вычислительного приема.

Вычислительные группы приемов.

1. Приемы, теоретической основой которых является конкретный смысл арифметических действий.

К ним относятся: приемы сложения и вычитания чисел в пределах 10 для случаев вида а±2, а±3, а±4, а±0; прием нахождения табличных результатов умножения, прием нахождения табличных результатов деления (только на начальной стадии) и деления с остатком, приемы умножения единицы и нуля.

Это первые приемы вычислений, которые вводятся сразу после ознакомления учащихся с конкретным смыслом арифметических действий и на основе выполнения операций над множествами.

2. Приемы, теоретической основой которых служат свойства арифметических действий.

К этой группе относится большинство вычислительных приемов. Это приемы сложения и вычитания для случаев вида: 53±20, 47 ± 3, 30-6, 9+3, 12-3, 35 ± 7, 40 ± 23, 57±32, 64±18, аналогичные приемы для случаев сложения и вычитания чисел, больших, чем 100, приемы умножения и деления для случаев вида 12 х 5, 5 х 12, 81:3, 18 х 40, 180:20, аналогичные приемы умножения или деления для чисел, больших ста.

Общая схема введения этих приемов одинакова: сначала изучаются соответствующие свойства и на их основе вводятся приемы вычислений.

3. Приемы, теоретической основой которых являются связи между компонентами и результатами арифметических действий.

К ним относятся приемы для случаев вида: 9 – 7, 24 : 3, 80 : 20, 54 : 18, 9: 3, 0:6.

При введении этих приемов сначала рассматриваются связи между компонентами и результатами действий сложения или умножения, а затем на этой основе вводится вычислительный прием.

4. Приемы, теоретической основой которых является изменение результатов арифметических действий в зависимости от изменения одного из компонентов. Это приемы округления при выполнении сложения и вычитания чисел (45+19, 612- 298) и приемы умножения и деления на 5, 25, 50.

Введение этих приемов также требует предварительного изучения соответствующих зависимостей.

5. Приемы, теоретической основой которых являются вопросы нумерации чисел. Это приемы для случаев вида: а±1, 10+7, 7+10, 17- 10,17 – 7, 67х10, 1200:100, аналогичные приемы для больших чисел. Введение этих приемов предусматривается после изучения соответствующих вопросов нумерации.

6. Приемы, теоретическая основа которых — правила.

К ним относятся приемы для двух случаев ах1 и ах0. Поскольку правила умножения чисел на единицу и нуль есть следствия из определения действия умножения целых неотрицательных чисел, то они просто сообщаются учащимся и в соответствии с ними выполняются вычисления.

Целый ряд случаев может быть отнесен не только к указанной группе приемов, но и к другой. Например, случаи вида 46+19 можно отнести не только к четвертой группе, но и ко второй. Это зависит от выбора теоретической основы вычислительного приема. Все вычислительные приемы строятся на той или иной теоретической основе, причем в каждом случае учащиеся осознают сам факт использования соответствующих теоретических положений, лежащих в основе вычислительных приемов. Это и есть реальная предпосылка овладения учащимися осознанными вычислительными навыками.

Общность подходов к раскрытию вычислительных приемов каждой группы — залог овладения учащимися обобщенными вычислительными навыками.

Возможность использования различных теоретических положений при конструировании различных приемов для одного случая вычисления (например, для случая сложении 56+19) является предпосылкой формирования рациональных гибких вычислительных навыков.

Приемы рациональных вычислений.

I. Приемы сложения.

Рациональные приемы сложения основываются на коммутативном (переместительном) и ассоциативном (сочетательном) законах сложения, а также на свойствах изменения суммы.

Коммутативный закон сложения. Сумма не изменяется от перемены мест слагаемых.

Ассоциативный закон сложения. Сумма не изменится, если заменить какую-либо группу рядом стоящих слагаемых их суммой.

Свойство 1.1. Если одно из слагаемых увеличить или уменьшить на некоторое число, то сумма соответственно увеличится или уменьшится на это число

Свойство 1.2. Если одно из слагаемых увеличить на некоторое число, а другое уменьшить на это же число, то сумма не изменится.

Свойство 1.3. Если все слагаемые данной суммы увеличить или уменьшить в одно и то же число раз, то сумма соответственно увеличится или уменьшится во столько же раз.

1) Сложение, основанное на ассоциативном законе:

а) 7+4+8+6+2=7+(8+2)+(4+6)=7+10+10=27

б) 13+18+7+22= (13+7)+(18+22)=20+40=60

в) 73+106+27+204=(73+27)+(106+204)=100+310=410

2) Округление одного или нескольких слагаемых. Одно или несколько слагаемых заменяют ближайшим к нему «круглым» числом, находят сумму «круглых» чисел, а затем соответствующее дополнение (дополнения) до «круглого» числа прибавляют к полученной сумме или вычитают из нее.

а)37+49=37+50-1=86

б)198+299=200-2+300-1=500-3=497

3) Поразрядное сложение.

При сложении нескольких многозначных чисел сначала находят суммы соответствующих разрядных единиц всех чисел, а затем складывают полученные суммы. В частности, при сложении нескольких двузначных чисел сначала находят сумму всех десятков, потом — всех единиц, а затем складывают полученные суммы.

а) 13+47+29=(10+40+20)+(3+7+9)=70+19=89

4) Группировка вокруг одного и того же «корневого» числа.

Пусть требуется найти сумму 37 + 34 + 29 + 35.

Легко заметить, что все эти числа близки к числу 30, поэтому его считают «корневым», а искомую сумму вычисляют в следующей последовательности:

1) находят сумму «корневых» чисел: 30 х 4 =120, так как в сумме 4 слагаемых;

2) находят сумму отклонений каждого числа от «корневого»; при этом, если число больше «корневого», отклонение берется со знаком «плюс», если число меньше «корневого» — со знаком «минус»: 7+4-1+5=15

II. Приемы вычитания. Все приемы рациональных вычислений, связанные с вычитанием, основываются на законах сложения, правилах вычитания числа из суммы и суммы из числа, свойствах изменения разности.

Свойство 2.1. Если уменьшаемое увеличилось или уменьшилось на некоторое число, то разность соответственно увеличится или уменьшится на это число.

Свойство 2.2. Если вычитаемое увеличить или уменьшить на несколько единиц, то разность изменится в противоположном смысле на столько же единиц.

Свойство 2.3. Если уменьшаемое и вычитаемое увеличить или уменьшить на одно и то же число, то разность не изменится.

Свойство 2.4. Если уменьшаемое и вычитаемое увеличить или уменьшить в одно и то же число раз, то разность соответственно увеличится или уменьшится во столько же раз.

1) Увеличение или уменьшение уменьшаемого и вычитаемого на одно и то же число единиц.

142 - 26 = (142 - 2) - (26 - 2) = 140-24 = 116.

Этот прием особенно хорош тогда, когда вычитаемое близко к «круглому» числу.

585 - 296 = (585 + 4) - (296 + 4) = 589 - 300 = 289

2) Округление вычитаемого. Вычитаемое заменяют ближайшим к нему «круглым» числом, находят разность, а затем соответствующее дополнение до «круглого» числа прибавляют к полученной разности или вычитают из нее.

а) 506-198=506-200+2=306+2=308

б) 506-208=506-200-8=306-8=298

3) Округление уменьшаемого.

102-36=100+2-36=(100-36)+2=64+2=66

402-156=400+2-156=(400-156)+2=244+2=246

4) Разложение вычитаемого на части.

371-175=371-170-5=201-5=196

III. Приемы умножения. Все приемы рациональных вычислений для умножения основаны на законах умножения и на свойствах изменения произведения.

Коммутативный (переместительный) закон умножения. Произведение не изменится от перемены мест множителей.

Ассоциативный (сочетательный) закон умножения. Произведение не изменится, если заменить какую-либо группу рядом стоящих множителей их произведением.

Дистрибутивный (распределительный) закон умножения относительно сложения. Произведение данного числа на сумму двух чисел не изменится, если заменить его суммой произведений данного числа на каждое из этих слагаемых.

а) 15х4+15х6=15х(4+6)=15х10=150

Дистрибутивный (распределительный) закон умножения относительно

вычитания. Произведение данного числа на разность двух чисел не изменится, если заменить его разностью произведений данного числа на каждый компонент разности.

б)199х4=(200-1)х4=200х4-1х4=800-4=796 (при округлении одного из множителей)

Свойство 3.1. Если один из множителей увеличить или уменьшить в несколько раз, то произведение соответственно увеличится или уменьшится во столько же раз.

Свойство 3.2. Если один из множителей произведения умножить на какое-нибудь число, а другой разделить на это же число, то произведение не изменится.

Свойство 3.3. Если два или несколько множителей данного произведения умножить или разделить на какие-либо числа, то данное произведение соответственно умножится или разделится на произведение этих чисел.

Из рассмотренных свойств изменения произведения вытекают следующие приемы, позволяющие рационализировать вычислительный процесс.

Прием 1. Разложение одного из множителей на множители. Один из множителей представляют в виде произведения нескольких множителей, а затем последовательно умножают второй множитель на эти множители.

Данный прием позволяет сформулировать ряд правил.

Правило 1.1. Умножение на 4 (8, 16). Умножение на 4 (8, 16) сводится к двукратному (трехкратному, четырехкратному) умножению на 2.

а) 29х4=(29х2)х2=58х2=116

б) 29х8=(29х2)х4=58х4=232

с) 29х16=(29х2)х8=58х8=464

Прием 2. Увеличение одного из множителей произведения в несколько раз и одновременное уменьшение второго множителя во столько же раз. Один из множителей произведения увеличивают в несколько раз, второй — уменьшают во столько же раз, а затем находят произведение полученных чисел.

Данный прием позволяет сформулировать ряд правил.

Правило 2.1. Умножение четного числа на 15 (25, 35, 45). Чтобы умножить четное число на 15 (25, 35, 45), достаточно его разделить на два и частное умножить на 30 (50, 70, 90).

а) 26 х 15 = (26 : 2) х (15 х 2) = 13 х 30 =390

б) 26 х 25 = (26 : 2) х (25 х 2) = 13 х 50 =650

в) 26 х 35 = (26 : 2) х (35 х 2) = 13 х 70 =910

г) 26 х 45 = (26 : 2) х (45 х 2) = 13 х 90 =1170

Прием 3. Представление одного из множителей произведения в виде частного двух чисел. Один из множителей произведения представляют в виде частного двух чисел, второй множитель умножают на делимое, а затем делят на делитель.

Данный прием позволяет сформулировать ряд правил.

Правило 3.1. Умножение на 5 (50, 500). Чтобы умножить число на 5 (50, 500), достаточно умножить его на 10 (100, 1 000) и результат разделить на 2.

а) 27х5=27х10:2=270:2=135

б) 27х50=27х100:2=2700:2=1350

в) 27х500=27х1000:2=13500

Правило 3.2.Умножение на 25 (250, 2500). Чтобы умножить число на 25,250, 2500), достаточно умножить его на 100, 1 000, 10 000) и результат разделить на 4.

а) 28х25=28х100:4=700

б) 28х250=28х1000:4=7000

в) 28х2500=28х10 000:4=70 000

Правило 3.3. Умножение на 125 (1 250). Чтобы умножить число на 125

(1250), достаточно умножить его на 1 000 (10 000) и результат разделить на 8.

а) 64х125=(64х1000):8=8000

б) 64х1250=(64х10000):8=80000

Небольшие изменения приема 3 позволяют сформулировать следующее правило умножения на 75.

Правило 3.4. Умножение на 75. Чтобы умножить число на 75, достаточно разделить его на 4, умножить частное на 3 и результат умножить на 100, т.к.

75=100:4 х3

104 х 75 = (104 : 4) х 3 х 100 = 26х3 х100 = 78х100 = 7800

Прием 4. Представление одного из множителей произведения в виде разности двух чисел. Один из множителей произведения представляют в виде разности двух чисел, второй множитель умножают на уменьшаемое и вычитаемое, а затем находят разность получившихся произведений.

Данный прием позволяет сформулировать ряд правил.

Правило 4.1. Умножение на 9 (99, 999). Чтобы умножить число на 9 (99, 999), достаточно увеличить его в 10 (100, 1 000) раз и из полученного результата вычесть само число.

а) 57 х 9 = 57 х 10 - 57 = 570 - 57 = 513;

б) 57 х 99 = 57 х 100 - 57 = 5700 - 57 = 5643

в) 57 х 999 = 57 х 1000 - 57 = 57000 - 57 = 56943

Прием 5. Представление одного из множителей произведения в виде суммы двух чисел. Один из множителей произведения представляют в виде суммы двух чисел, второй множитель умножают на каждое слагаемое, а затем складывают получившиеся произведения.

Данный прием позволяет сформулировать ряд правил.

Правило 5.1. Умножение на 11 (101, 1001). Чтобы умножить число на 11 (101, 1001), достаточно увеличить его в 10 раз и к полученному результату прибавить это число.

а) 67 х11 = 67 х 10 + 67 = 670 + 67 = 737

б) 67х 101 =67 х 100 + 67 = 6700 + 67 =6 767

в) 67 х1001 = 67 х 1000 + 67 = 67000 + 67 = 67067

Существуют еще интересные правила умножения двузначных чисел на 11, 101, 99.

Правило 5.2. Умножение двузначного числа на 11. Чтобы умножить двузначное число на 11, достаточно раздвинуть его цифры и вставить между ними их сумму. Причем, если эта сумма сама является двузначной, то ее единицы вставляются между цифрами данного числа, а десятки прибавляются к первой цифре.

Пример. Для нахождения значения произведения 63х11 проделаем следующее

1) находим сумму 6 + 3 = 9;

2) раздвигаем цифры числа 63, вставив между ними цифру 9, получим ответ:

63 х 11 = 693.

Пример. Для нахождения значения произведения 58 х 11 проделаем следующее:

1) находим сумму 5 + 8 = 13;

2) раздвигаем цифры числа 58, вставив между ними цифру 3, десятки увеличиваем на 1 (5 + 1 = 6), получим ответ: 58 х 11 = 638.

Правило5.3. Умножение двузначного числа на 101. Чтобы умножить двузначное число на 101, достаточно справа к нему приписать само число.

Пример. 73х101 = 7373.

Правило 5.4. Умножение двузначного числа на 99. Чтобы умножить двузначное число на 99, достаточно к предшествующему числу приписать его дополнение до 100.

Пример. 13х99 = 1287.

Прием 6. Умножение чисел меньших двадцати. Чтобы умножить два числа, которые меньше двадцати, достаточно прибавить к первому единицы второго, к результату приписать нуль и прибавить произведение единиц.

Пример. Для нахождения значения произведения 16х13 проделаем следующее:

1) к первому числу прибавляем единицы второго 16 + 3=19;

2) приписываем к результату нуль и прибавляем произведение единиц, получаем ответ: 190 + 6х3 =208.

IV. Приемы деления. Приемы рациональных вычислений для деления основаны на законах умножения и следующих свойствах изменения частного:

Свойство 4.1. Если делимое увеличить или уменьшить в несколько раз, то частное соответственно увеличится или уменьшится во столько же раз.

Свойство 4.2. Если делитель увеличить (уменьшить) в несколько раз, то частное уменьшится (увеличится) во столько же раз.

Рассмотрим приемы, основанные на данных свойствах, позволяющие упростить вычислительный процесс.

Прием 1. Представление делителя в виде частного двух чисел. Делитель представляют в виде частного двух чисел, делимое умножают на второе число, а затем этот результат делят на первое число.

Данный прием позволяет сформулировать ряд правил.

Правило 4. 1. Деление на 5 (50, 500).Чтобы разделить число на 5(50,500) достаточно умножить его на 2 и результат разделить на 10(100, 1000),.

а) 165:5=(165х2):10=330:10=33

б) 1650:50=(1650х2):100=3300:100=33

в) 16500:500=(16500х2):1000=33000:1000=33

Правило 4. 2. Деление на 25 (250). Чтобы разделить число на 25 (250), достаточно умножить его на 4 и разделить на 100 (1 000).

а) 1 100 : 25 = (1 100 х 4) : 100 =4400 : 100 = 44

б) 11000 : 250 = (11 000 х 4) : 1 000 =44 000: 1 000 = 44

Практически все рассмотренные выше приемы рациональных вычислений могут освоить учащиеся начальных классов, если учитель постоянно будет проводить соответствующую работу, начиная с I класса.

В методике работы над каждым отдельным приемом предусматривается ряд этапов.

I. Подготовка к введению нового приема.

На этом этапе создается готовность к усвоению вычислительного приема, а именно: учащиеся должны усвоить те теоретические положения, на которых основывается вычислительный прием, а также овладеть каждой операцией составляющей прием.

II. Ознакомление с вычислительным приемом.

На этом этапе ученики усваивают суть приема: какие операции надо выполнять, в каком порядке и почему именно так можно найти результат арифметического действия.

Выполнение каждой операции важно сопровождать пояснениями вслух. Сначала эти пояснения выполняются под руководством учителя, а затем учащиеся выполняют их самостоятельно.

Ш. Закрепление знания приема и выработка вычислительного навыка.

На этом этапе учащиеся должны твердо усвоить систему операций, составляющих прием, и предельно быстро выполнять эти операции, т. е. овладеть вычислительным навыком.

В процессе работы здесь важно предусмотреть ряд стадий в становлении у учащихся вычислительных навыков.

а) на первой из них закрепляется знание приема;

б) на второй – происходит частичное свертывание выполнения операций;

в) на третьей - происходит полное свертывание выполнения операций.

Овладение учащимися вычислительными навыками достигается в результате достаточного числа тренировочных упражнений.

Важно, чтобы они были разнообразными как по числовым данным, так и по форме, чтобы при этом предусматривались аналогии в приемах и в соответствии с ними предлагались упражнения на сравнение приемов, сходных в том или ином отношении.