

2012

Подготовка к ЕГЭ по математике

Решение прототипов задач В13

Задачи на движение с объяснением решения и необходимыми теоретическими выкладками. Задачи из единого банка задач ЕГЭ по математике аналогичны экзаменационным.



МАТЕМАТИКА? ЛЕГКО!!!

ЗАДАЧИ В13

Уважаемые выпускники, все задачи В13 из банка заданий ФИПИ решаются по единому алгоритму. Задания на движение или на работу однотипны. Главное — знать к ним подход. Всё, что нужно — это здравый смысл и умение решать квадратное уравнение.

Сначала предлагаем вам проверить себя – это важно.

Запишите в виде математического выражения:

1. x на 3 меньше y
2. x составляет 45% от y
3. z на 8 больше, чем x
4. x меньше y в 4 раза
5. x больше, чем y на 35%

Казалось бы, вопросы очень простые. Но почему-то у выпускников они вызывают затруднения. Ученики одиннадцатого класса думают, как записать, что « x на 10 больше y ». А в этот момент изучают интегралы, и другие «сложности».

Итак, правильные ответы:

1. $x + 3 = y$
2. $x = 0.45y$
3. $z - 8 = x$
4. $y = 4x$
5. $x = y + 0.35y = 1.35y$

Задачи на движение.

Здесь два правила:

1. Эти задачи решаются по формуле: $S = v \cdot t$,

то есть расстояние = скорость · время. Из этой формулы можно

выразить скорость $v = \frac{S}{t}$ или время $t = \frac{S}{v}$.

2. В качестве переменной x удобнее всего (в большинстве случаев) выбирать скорость. Тогда задача точно решится!

Для начала внимательно читайте условие. В нем всё уже есть. Помните, что текстовые задачи на самом деле труда не представляют.

5615. Из «А» в «В» одновременно выехали два автомобилиста. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью, меньшей скорости первого на 13 км/ч, а вторую половину пути — со скоростью 78 км/ч, в результате чего прибыл в «В» одновременно с первым автомобилистом. Найдите скорость первого автомобилиста, если известно, что она больше 48 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Примем скорость первого автомобилиста за x км/ч. Расстояние, которое он проезжает от пункта «А» до пункта «В» S (км). Значит время, затраченное им на дорогу $\frac{S}{x}$ (ч).

Скорость второго на первой половине на 13 км/ч меньше, то есть $x - 13$ (км/ч). На второй половине пути 78 км/ч, значит время, затраченное им на дорогу

$$\frac{0,5 \cdot S}{x - 13} + \frac{0,5 \cdot S}{78} \quad (\text{ч})$$

Заполним в таблицу:

	v		t	S
	1 половина	2 половина		
1	x		$\frac{S}{x}$	S
2	x - 13	78	$\frac{0,5 \cdot S}{x - 13} + \frac{0,5 \cdot S}{78}$	S

Известно, что в пункт «В» они прибыли одновременно, то есть затратили одинаковое время:

$$\frac{0,5S}{x - 13} + \frac{0,5S}{78} = \frac{S}{x}$$

Примечание: в таблице мы записали путь как S. Можно было записать 1, это можно делать, когда не задана длина пути. Суть не меняется (1 путь) или (S км) не важно. В уравнении эта величина сократится:

$$\frac{0,5S}{x - 13} + \frac{0,5S}{78} = \frac{S}{x}$$

$$\frac{0,5S}{x - 13} + \frac{0,5S}{78} - \frac{S}{x} = 0 \quad \left| \cdot \frac{1}{S} \right.$$

$$\frac{0,5}{x - 13} + \frac{0,5}{78} - \frac{1}{x} = 0 \quad | \cdot 78x(x - 13)$$

$$0,5 \cdot 78x + 0,5x(x - 13) - 78(x - 13) = 0$$

$$39x + 0,5x^2 - 6,5x - 78x + 78 \cdot 13 = 0$$

$$0,5x^2 - 45,5x - 78 \cdot 13 = 0 \quad | \cdot 2$$

$$x^2 - 91x + 2028 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = (-91)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2028 = 169$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-91) + \sqrt{169}}{2 \cdot 1} = \frac{104}{2} = 52$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-91) - \sqrt{169}}{2 \cdot 1} = \frac{78}{2} = 39$$

Получили два решения 52 (км/ч) и 39 (км/ч). Но в условии сказано, что искомая скорость больше 48(км/ч).

Ответ: 52

5625. Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города А в город В, расстояние между которыми равно 98 км. На следующий день он отправился обратно со скоростью на 7 км/ч больше прежней. По дороге он сделал остановку на 7 часов. В результате он затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из А в В. Найдите скорость велосипедиста на пути из А в В. Ответ дайте в км/ч.

Пусть скорость велосипедиста на пути из «А» в «В» равна x .

Тогда его скорость на обратном пути равна $x+7$.

Расстояние в обеих строчках таблицы пишем одинаковое: 98 километров.

Осталось записать время. Поскольку $t = \frac{S}{v}$, то на путь из «А» в «В»

велосипедист затратит время $t_1 = \frac{98}{x}$, а на обратный путь время $t_2 = \frac{98}{x+7}$

	v	t	S
туда	x	$t_1 = \frac{98}{x}$	98
обратно	$x + 7$	$t_2 = \frac{98}{x + 7}$	98

На обратном пути велосипедист сделал остановку на 7 часов и в результате затратил столько же времени, сколько на пути из «А» в «В». Это значит, что на обратном пути он крутил педали (находился в движении) на 7 часов меньше.

Значит, t_2 на семь меньше, чем t_1 . Получается уравнение:

$$\frac{98}{x+7} + 7 = \frac{98}{x}$$

Или можно рассудить так: велосипедист на обратный путь затратил $\frac{98}{x+7}$ часов и ещё 7 часов простоял. Очевидно, что уравнение будет иметь вышеуказанный вид.

$$\frac{98}{x+7} + 7 = \frac{98}{x} \quad | \cdot x(x+7)$$

$$98x + 7x(x+7) - 98(x+7) = 0$$

$$98x + 7x^2 + 49x - 98x - 98 \cdot 7 = 0$$

$$7x^2 + 49x - 98 \cdot 7 = 0 \quad | \cdot \frac{1}{7}$$

$$x^2 + 7x - 98 = 0$$

$$D=441 \quad x_1 = 7 \quad x_2 = -14$$

Скорость величина положительная, значит скорость велосипедиста из А в В равна 7 (км/ч).

Ответ: 7

5659. Два велосипедиста одновременно отправились в 88-километровый пробег. Первый ехал со скоростью, на 3 км/ч большей, чем скорость второго, и прибыл к финишу на 3 часа раньше второго. Найти скорость велосипедиста, пришедшего к финишу вторым. Ответ дайте в км/ч.

Примем скорость второго велосипедиста за x . Тогда скорость первого равна $x+3$. Расстояние оба проехали одинаковое — 88 километров. Осталось записать время.

Поскольку $t = \frac{s}{v}$, первый затратит $t_1 = \frac{88}{x+3}$ часов, а второй $t_2 = \frac{88}{x}$ часов.

	v	t	S
1	$x + 3$	$t_1 = \frac{8}{x + 3}$	88
2	x	$t_2 = \frac{88}{x}$	88

Сказано, что первый прибыл на три часа раньше, то есть он затратил время на движение и ещё три часа ожидал, пока придёт второй. Значит время, затраченное первым на передвижение плюс три часа ожидания второго, равно времени нахождения в пути второго.

$$\frac{88}{x + 3} + 3 = \frac{88}{x}$$

Можно рассудить по-другому: выражение «первый прибыл на три часа раньше», означает, что он затратил на пробег на три часа меньше, чем второй. То есть $t_1 < t_2$ на 3, или

$$\frac{88}{x + 3} \text{ меньше, чем } \frac{88}{x} \text{ на } 3$$

$$\frac{88}{x + 3} = \frac{88}{x} - 3$$

Умножаем левую и правую части на $x(x + 3)$.

Приводим его к квадратному $x^2 + 3x - 88 = 0$

Решаем его, получим:

$$D = 361 \quad x_1 = 8 \quad x_2 = -11$$

$x = 8$ это вполне правдоподобная скорость велосипедиста. А ответ $x_2 = -11$ не подходит, так как скорость велосипедиста должна быть положительна.

Ответ: 8

5757. От пристани А к пристани В отправился с постоянной скоростью первый теплоход, а через 1 час после этого следом за ним со скоростью, на 1 км/ч большей, отправился второй. Расстояние между пристанями равно 420 км. Найдите скорость первого теплохода, если в пункт В оба теплохода прибыли одновременно. Ответ дайте в км/ч.

Примем скорость первого теплохода за x . Тогда скорость второго теплохода равна $x + 1$.

Расстояние оба проехали одинаковое — 420 километров. Осталось записать время.

Поскольку $t = \frac{S}{v}$, первый затратит $\frac{420}{x}$ часов, а второй $\frac{420}{x+1}$ часов.

	v	t	S
1	x	$\frac{420}{x}$	420
2	$x + 1$	$\frac{420}{x + 1}$	420

Сказано, что через час после отправления первого, в путь отправился второй, то есть он затратил время на движение на час меньше.

$$\frac{420}{x + 1} \text{ на час меньше, чем } \frac{420}{x}$$

$$\frac{420}{x + 1} = \frac{420}{x} - 1$$

Умножаем левую и правую части на $x(x + 1)$.

Приводим к квадратному, получим $x^2 + x - 420 = 0$

Решаем его: $D = 1681$ $x_1 = 20$ $x_2 = -21$

Скорость теплохода должна быть положительна, значит, она равна 20 (км/ч).

Ответ: 20

5687. Моторная лодка прошла против течения реки 255 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 2 часа меньше. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения равна 1 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Пусть скорость лодки в неподвижной воде равна x .

Тогда скорость движения моторки по течению равна $x + 1$, а скорость, с которой она движется против течения $x - 1$.

Расстояние и в ту, и в другую сторону одинаково и равно 255 км.

Занесем скорость и расстояние в таблицу.

Заполняем графу «время». Мы уже знаем, как это делать.

При движении по течению $t_1 = \frac{255}{x+1}$, при движении против течения

$t_2 = \frac{255}{x-1}$, причем t_1 на два часа меньше, чем t_2 . Да это и логично, что

время на движение по течению затрачивается меньше.

	v	t	S
По течению	$x + 1$	$t_1 = \frac{255}{x + 1}$	255
Против течения	$x - 1$	$t_2 = \frac{255}{x - 1}$	255

Условие t_1 на два часа меньше, чем t_2 можно записать в виде $t_2 - 2 = t_1$.

$$\frac{255}{x-1} - 2 = \frac{255}{x+1} \quad | \cdot (x+1)(x-1)$$

$$255(x+1) - 2(x+1)(x-1) - 255(x-1) = 0$$

$$x^2 = 256$$

Вообще-то это уравнение имеет два корня: $x_1 = 16$ и $x_2 = -16$ (оба этих числа при возведении в квадрат дают 256). Но, конечно же, отрицательный ответ не подходит — скорость лодки должна быть положительной.

Ответ: 16

5721. Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 336 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найдите скорость теплохода в неподвижной воде, если скорость течения равна 5 км/ч, стоянка длится 10 часов, а в пункт отправления теплоход возвращается через 48 часов после отплытия из него. Ответ дайте в км/ч.

Пусть скорость теплохода в неподвижной воде равна x (км/ч). Всего теплоход затрачивает 48 часов (на весь путь: туда, два часа стоянки, обратно).

То есть $48 =$ время движения по течению $+$ стоянка $+$ время движения против течения.

Скорость движения теплохода по течению равна $x + 5$, а скорость против течения $x - 5$.

Расстояние и в ту, и в другую сторону одинаково и равно 336 км.

Занесем скорость и расстояние в таблицу.

Заполняем графу «время».

Время, затраченное на путь до пункта назначения $\frac{336}{x+5}$,

Время, затраченное на путь обратно (против течения) $\frac{336}{x-5}$.

	v	t	S
По течению	$x + 5$	$\frac{336}{x + 5}$	366
Против течения	$x - 5$	$\frac{336}{x - 5}$	366

$$\frac{336}{x + 5} + 10 + \frac{336}{x - 5} = 48 \quad | \cdot (x + 5)(x - 5)$$

$$336(x - 5) + 10(x + 5)(x - 5) + 336(x + 5) - 48(x + 5)(x - 5) = 0$$

$$38x^2 - 672x - 950 = 0 \quad | \cdot \frac{1}{2}$$

$$19x^2 - 336x - 475 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = (-336)^2 - 4 \cdot 19 \cdot (-475) = 112896 + 36100 = 148996$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-336) + \sqrt{148996}}{2 \cdot 19} = \frac{336 + 386}{38} = 19$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-336) - \sqrt{148996}}{2 \cdot 19} = \frac{336 - 386}{38} = -\frac{50}{38}$$

Как извлечь корень из 148996, или из другого большого числа? Советую воспользоваться аналитическим методом. Каким бы большим ни было число (кстати, в подобных задачах на ЕГЭ больше 1000000 не будет), мы в любом случае можем определить, между какими значениями лежит результат корня. В нашем случае он находится между 300 и 400, $300^2 = 90000$, а $400^2 = 160000$. действительно

$$90000 < 148996 < 160000$$

Суть дальнейших рассуждений сводится к тому, чтобы определить, как число 148996 расположено (отстоит) относительно этих чисел. Разность $148996 - 90000 = 58996$, разность $160000 - 148996 = 11004$. Получается, что 148996 близко (на много ближе) к 160000. Поэтому,

результат корня однозначно будет больше 350 и даже 360. Далее пробуем возводить в квадрат, например 370, что называется «щупаем» результат.

$$\begin{array}{r} \times 370 \\ 370 \\ \hline 2590 \\ 1110 \\ \hline 136900 \end{array}$$

Значит, наш результат больше 370. Далее ясно, так как 148996 оканчивается на 6, то это означает, что в квадрат надо возводить число, оканчивающееся либо на 4, либо на 6, только эти числа при возведении в квадрат дают в конце 6. Поэтому проверяем числа 374, 376, 384, 386, 394...

$$\begin{array}{r} \times 374 \\ 374 \\ \hline 1496 \\ 2618 \\ 1122 \\ \hline 139876 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 376 \\ 376 \\ \hline 2256 \\ 2632 \\ 1128 \\ \hline 141376 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 384 \\ 384 \\ \hline 1536 \\ 3072 \\ 1152 \\ \hline 147456 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 386 \\ 386 \\ \hline 2316 \\ 3088 \\ 1158 \\ \hline 148996 \end{array}$$

Мы установили, что корень из 148996 равен 386. Конечно, есть и другие способы извлечения таких корней без калькулятора, но всё-таки произвести пять действий умножения столбиком это не так уж много (а больше и не понадобится, если вы грамотно оцените в каких пределах лежит искомое значение). Скорость теплохода в неподвижной воде 19(км/ч). Ответ: 19

5751. Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 216 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найдите скорость течения, если скорость теплохода в неподвижной воде равна 15 км/ч, стоянка длится 6 часов, а в пункт отправления теплоход возвращается через 36 часов после отплытия из него. Ответ дайте в км/ч.

От предыдущей эта задача отличается только тем, что нужно найти скорость течения, при известной скорости теплохода. Ход рассуждения тот же.

Скорость течения реки как искомую величину принимаем за x (км/ч). Тогда скорость движения теплохода по течению равна $15 + x$, а его скорость против течения $15 - x$.

Расстояние в ту, и в другую сторону одинаковое и равно 216 км.

Всего теплоход затрачивает 36 часов (на весь путь: туда, 6 часов стоянки, обратно).

То есть $36 =$ время движения по течению $+$ стоянка $+$ время движения против течения.

Занесем скорость и расстояние в таблицу. Заполняем графу «время».

Время, затраченное на путь до пункта назначения $\frac{216}{15-x}$,

Время, затраченное на путь обратно (против течения) $\frac{216}{15-x}$.

	v	t	S
По течению	$15 + x$	$\frac{216}{15 + x}$	216
Против течения	$15 - x$	$\frac{216}{15 - x}$	216

Подставляем данные и получаем уравнение:

$$\frac{216}{15+x} + 6 + \frac{216}{15-x} = 36$$

$$\frac{216}{15+x} + \frac{216}{15-x} = 30$$

$$\frac{216}{15+x} + \frac{216}{15-x} = 30 \quad | \cdot (15+x)(15-x)$$

$$216(15-x) + 216(15+x) - 30(15+x)(15-x) = 0$$

Мы не будем подробно останавливаться на технике решения уравнения.

Всё уже понятно — раскрываем скобки, складываем подобные члены.

Получаем квадратное уравнение: $x^2 = 9$

Поскольку скорость течения положительна, получаем: $x = 3$ (км/ч).

Ответ: 3

5967. Байдарка в 10:00 вышла из пункта А в пункт В, расположенный в 15 км от А. Пробыв в пункте В 1 час 20 минут, байдарка отправилась назад и вернулась в пункт А в 16:00. Определите (в км/час) собственную скорость байдарки, если известно, что скорость течения реки 2 км/ч.

Данная задача от предыдущих двух отличается только тем, что в ней несказанно, сколько байдарка затратила время на путь (дан временной отрезок пути), и время стоянки задано не в целых часах. Сам тип задачи тот же.

Сразу определим время нахождения байдарки в пути $16-10=6$ (часов).

Так же выразим время стоянки в часах 1ч 20мин это $1\frac{1}{3}$ часа.

Можно осуществлять перевод в часы с помощью пропорции:

60мин – 1час

80 мин – x

$$x = \frac{1 \cdot 80}{60} = \frac{8}{6} = 1\frac{1}{3} \text{ ч}$$

Пусть скорость байдарки в неподвижной воде равна x (км/ч).

Тогда скорость движения по течению равна $x + 2$, а скорость против течения $x - 2$.

Расстояние и в ту, и в другую сторону одинаково и равно 15 км.

Всего время нахождения в пути 6 часов (на весь путь: туда, $1\frac{1}{3}$ часа стоянка, обратно).

То есть $6 =$ время движения по течению + стоянка + время движения против течения.

Занесем скорость и расстояние в таблицу. Заполняем графу «время».

Время, затраченное на путь до пункта назначения $\frac{15}{x+2}$,

Время, затраченное на путь обратно (против течения) $\frac{15}{x-2}$.

	v	t	S
По течению	$x + 2$	$\frac{15}{x + 2}$	15
Против течения	$x - 2$	$\frac{15}{x - 2}$	15

Составляем уравнение:

$$\frac{15}{x+2} + 1\frac{1}{3} + \frac{15}{x-2} = 6 \quad | \cdot (x+2)(x-2)$$

$$15(x-2) + \frac{4}{3}(x+5)(x-5) + 15(x+2) - 6(x+2)(x-2) = 0$$

$$7x^2 - 45x - 28 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 45^2 - 4 \cdot 7 \cdot (-28) = 2025 + 784 = 2809$$

$$x_1 = 7 \quad \text{и} \quad x_2 = -\frac{8}{14}$$

Не забываем, что скорость величина положительная. Таким образом, собственная скорость байдарки в неподвижной воде будет 7(км/ч).

Ответ: 7

99588. Из двух городов, расстояние между которыми равно 560 км, навстречу друг другу одновременно выехали два автомобиля. Через сколько часов автомобили встретятся, если их скорости равны 65 км/ч и 75 км/ч?

Принимаем искомую величину, то есть время, через которое автомобили встретятся за x . В данной задаче проще производить сравнение по расстоянию. Составим таблицу и найдём «расстояние», которое проехал каждый автомобиль.

	v	t	S
1	65	x	$65x$
2	75	x	$75x$

Один проехал до места встречи $65x$ км, другой $75x$ км. По условию расстояние между городами 560 км. Значит, сумма пройденных расстояний будет равна 560 км.

$$65x + 75x = 560$$

$$140x = 560$$

$$x = 4$$

Автомобили встретятся через 4 часа.

Рассмотрим второй способ:

Попробуем использовать сравнение по времени. Обозначаем расстояние пройденное первым авто как S_1 , расстояние пройденное вторым авто как S_2 . Занесем скорость и расстояние в таблицу. Заполняем графу «время».

	v	t	S
1	65	$\frac{S_1}{65}$	S_1
2	75	$\frac{S_2}{75}$	S_2

Известно, что ехали они одинаковое время (с момента выезда каждого из своего пункта и до момента встречи), так же понятно, что сумма расстояний пройденных ими равна 560 км.

Можем составить два уравнения и решить систему:

$$\begin{cases} \frac{S_1}{65} = \frac{S_2}{75} \\ S_1 + S_2 = 560 \end{cases}$$

Решив систему, получим $S_1 = 260$ км и $S_2 = 300$ км

Найдём время: $t = \frac{S_1}{65} = \frac{260}{65} = 4$ часа.

Первый способ более рационален, решение сводится к линейному уравнению. Тем не менее, разумеется, что каждый выбирает для себя наиболее понятный ему путь решения.

Ответ: 4

99589. Из городов А и В, расстояние между которыми равно 330 км, навстречу друг другу одновременно выехали два автомобиля и встретились через 3 часа на расстоянии 180 км от города В. Найдите скорость автомобиля, выехавшего из города А. Ответ дайте в км/ч.

Вы, наверное, заметили, что это задача схожа с предыдущей.

Сразу отметим, что автомобили встретись в 180 км от города «В». Это значит, что тот, кто выехал из «В» проехал 180 км, а кто выехал из «А»

проехал $330-180=150$ км. Время движения 3 часа. Значит, что скорость выехавшего из «А» равна $\frac{150}{3} = 50$ (км/ч).

Составлять таблицу в данной задаче не обязательно.

Ответ: 50

99595. Два пешехода отправляются одновременно в одном направлении из одного и того же места на прогулку по аллее парка. Скорость первого на 1,5 км/ч больше скорости второго. Через сколько минут расстояние между пешеходами станет равным 300 метрам?

В этой задаче ни время движения, ни скорости пешеходов, ни расстояние, которое они прошли. Рекомендую сразу обратить внимание на то, дана разница пройденных расстояний, поэтому сравнение необходимо произвести по расстоянию.

Итак, искомую величину (время, через которое расстояние станет равным 300м) примем за x . Скорость первого пешехода обозначим y , тогда скорость второго $y + 1,5$.

Занесем скорость и время в таблицу. Заполняем графу «расстояние».

	v	t	S
1	y	x	yx
2	$y + 1,5$	x	$(y + 1,5)x$

Так как скорость второго больше, значит именно он пройдет на 300 метров больше. Не забываем перевести метры в километры $300\text{м}=0,3\text{км}$

$$(y + 1,5)x - yx = 0,3$$

$$yx + x1,5 - yx = 0,3$$

$$x1,5 = 0,3$$

$$x = \frac{1}{5}$$

Получили $\frac{1}{5}$ часа, это 12 минут.

Заметьте, что скорость, с которой двигались пешеходы, не играет роли. При разнице в 1,5 км/ч с какой бы скоростью они не двигались, расстояние между ними через 12 минут станет 300м. Вообще для упрощения условия в подобных задачах – при параллельном движении пешеходов, поездов, теплоходов и пр. (в дальнейшем вы это увидите на других примерах) можно принимать скорость одного из объектов движения за ноль. Смотрите, как преобразится задача.

Итак, искомую величину (время, через которое расстояние станет равным 300м) примем за x . Скорость первого пешехода обозначим 0 (он остаётся на месте), тогда скорость второго 1,5км/ч, так как по условию она на 1,5 км/ч больше.

Занесем скорость и время в таблицу. Заполняем графу «расстояние».

	v	t	S
1	0	x	0
2	1,5	x	$1,5x$

Так как расстояние между ними через время x будет 0,3 км, то уравнение приобретает вид: $1,5x = 0,3$ $x = \frac{1}{5}$ часа $x = 12$ минут

Ответ: 12

99596. Два мотоциклиста стартуют одновременно в одном направлении из двух диаметрально противоположных точек круговой трассы, длина которой равна 14 км. Через сколько минут

мотоциклисты поравняются в первый раз, если скорость одного из них на 21 км/ч больше скорости другого?

На первый взгляд тип задачи в сравнении с предыдущей кажется совершенно иным. Имеется круговое движение, длина трасы. Но это только на первый взгляд. Задача точно такая же.

Имеем двух мотоциклистов. Один от другого отстаёт на 7 км. Скорость отстающего на 21(км/ч) больше (он догоняет того, кто впереди). Вот вам и задача с прямолинейным движением.

Разница расстояния в 7 км между мотоциклистами (половина круга), поэтому сравнение будем проводить по расстоянию.

Итак, искомую величину (время, через которое они поравняются) примем за x . Скорость первого (находящегося впереди) обозначим y , тогда скорость второго (догоняющего) $y + 21$.

Занесем скорость и время в таблицу. Заполняем графу «расстояние»:

	v	t	S
1 (догоняемый)	y	x	yx
2 (догоняющий)	$y + 21$	x	$(y + 21)x$

Второй проезжает на 7 км больше, чем находящийся перед ним.

$$(y + 21)x = yx + 7$$

$$yx + 21x - yx = 7$$

$$21x = 7$$

$$x = \frac{1}{3}$$

$x = \frac{1}{3}$ часа это 20 минут

Как видим скорость мотоциклистов в данном случае тоже не имеет значение, как и в предыдущей задаче.

Ответ: 20

99597. Первый велосипедист выехал из поселка по шоссе со скоростью 15 км/ч. Через час после него со скоростью 10 км/ч из того же поселка в том же направлении выехал второй велосипедист, а еще через час после этого — третий. Найдите скорость третьего велосипедиста, если сначала он догнал второго, а через 2 часа 20 минут после этого догнал первого. Ответ дайте в км/ч.

Пусть скорость третьего велосипедиста x (км/ч), t — время, которое ему понадобилось, чтобы догнать второго. До встречи на трассе они проехали одинаковое расстояние. Известно, что второй ехал на 1 час больше. Составим таблицу:

	v	t	S
3	x	t	xt
2	10	$t + 1$	$10(t + 1)$

Таким образом, можем составить уравнение:

$$xt = 10(t + 1)$$

Продолжаем рассуждение. До встречи на трассе третий и первый проехали одинаковое расстояние. Третий догнал первого через 2 часа 20 минут ($2\frac{1}{3}$ часа или $\frac{7}{3}$) после того, как догнал второго. Значит, до встречи с первым третий затратил $t + \frac{7}{3}$ часов, а первый на этот момент уже находился в пути $2 + t + \frac{7}{3}$ (так как третий выехал через 2 часа после

первого, догнал второго, затратив t часов, и ещё через $\frac{7}{3}$ часа догнал первого).

	v	t	S
3	x	$t + \frac{7}{3}$	$x \left(t + \frac{7}{3} \right)$
1	15	$t + \frac{7}{3} + 2$	$15 \left(t + \frac{7}{3} + 2 \right)$

Таким образом, можем составить уравнение:

$$x \left(t + \frac{7}{3} \right) = 15 \left(t + \frac{7}{3} + 2 \right)$$

Имеем два уравнения, решаем систему:

$$\begin{cases} xt = 10(t + 1) \\ x \left(t + \frac{7}{3} \right) = 15 \left(t + \frac{7}{3} + 2 \right) \end{cases}$$

Выразим t в первом уравнении и подставим во второе:

$$x = \frac{10 + 10t}{t}$$

$$\frac{10 + 10t}{t} \cdot \left(t + \frac{7}{3} \right) = 15 \left(t + \frac{7}{3} + 2 \right) \quad | \cdot 3t$$

$$(10 + 10t)(3t + 7) = 15t(3t + 7 + 6)$$

$$30t + 70 + 30t^2 + 70t = 45t^2 + 105t + 90t$$

$$15t^2 + 95t - 70 = 0 \quad | \cdot \frac{1}{5}$$

$$3t^2 + 19t - 14 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 19^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-14) = 361 + 168 = 529$$

$$t_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-19 + \sqrt{529}}{2 \cdot 3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$t_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-19 - \sqrt{529}}{2 \cdot 3} = \frac{-42}{6} = -7$$

$t=2/3$, так как время не может быть числом отрицательным.

Таким образом, $x = \frac{10+10t}{t} = \frac{10+10 \cdot \frac{2}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{10 \cdot 3}{2} + \frac{20}{3} \cdot \frac{3}{2} = 15 + 10 = 25$ (км/ч)

Скорость третьего велосипедиста 25 (км/ч).

Ответ: 25

99598. Из одной точки круговой трассы, длина которой равна 14 км, одновременно в одном направлении стартовали два автомобиля. Скорость первого автомобиля равна 80 км/ч, и через 40 минут после старта он опережал второй автомобиль на один круг. Найдите скорость второго автомобиля. Ответ дайте в км/ч.

Данную задачу так же можно интерпретировать (представить её, как задачу на линейное движение):

Два автомобиля одновременно начинают движение в одном направлении. Скорость первого равна 80 км/ч. Через 40 минут он опережает второго на 14 км (т.к. сказано, что на один круг). Найти скорость второго. Очень важно в задачах на движение представить сам процесс этого движения.

Сравнение так же производим по расстоянию.

За x принимаем искомую величину – скорость второго. Время движения 40 минут ($2/3$ часа) для обоих. Заполним графу «расстояние»:

	v	t	S
1	80	$\frac{2}{3}$	$80 \cdot \frac{2}{3}$
2	x	$\frac{2}{3}$	$x \cdot \frac{2}{3}$

Расстояние, пройденное первым, больше расстояния, который прошёл второй на 14 км.

$$80 \cdot \frac{2}{3} \text{ больше, чем } x \cdot \frac{2}{3} \text{ на } 14$$

$$80 \cdot \frac{2}{3} = x \cdot \frac{2}{3} + 14$$

$$\frac{160}{3} - \frac{14 \cdot 3}{3} = x \cdot \frac{2}{3}$$

$$160 - 42 = x \cdot 2$$

$$x = 59$$

Скорость второго автомобиля 59(км/ч).

Ответ: 59

99599. Из пункта А круговой трассы выехал велосипедист, а через 30 минут следом за ним отправился мотоциклист. Через 10 минут после отправления он догнал велосипедиста в первый раз, а еще через 30 минут после этого догнал его во второй раз. Найдите скорость мотоциклиста, если длина трассы равна 30 км. Ответ дайте в км/ч.

Во-первых, переведем минуты в часы, поскольку скорость надо найти в км/ч. Скорости участников обозначим за x и y . В первый раз мотоциклист обогнал велосипедиста через 10 минут, то есть через $1/6$ часа после старта. До этого момента велосипедист был в пути 40 минут, то есть $2/3$ часа.

Запишем эти данные в таблицу:

	v	t	S
велосипедист	x	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}x$
мотоциклист	y	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}y$

Оба проехали одинаковые расстояния, то есть $\frac{2}{3}x = \frac{1}{6}y$.

Затем мотоциклист второй раз обогнал велосипедиста. Произошло это через 30 минут, то есть через $\frac{1}{2}$ часа после первого обгона.

Нарисуем вторую таблицу:

	v	t	S
велосипедист	x	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}x$
мотоциклист	y	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}y$

А какие же расстояния они проехали? Мотоциклист обогнал велосипедиста. Значит, он проехал на один круг больше. Это и есть секрет данной задачи. Один круг — это длина трассы, она равна 30 км. Получим второе уравнение:

$$\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}x = 30$$

Решим получившуюся систему:
$$\begin{cases} \frac{2}{3}x = \frac{1}{6}y \\ \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}x = 30 \end{cases}$$

Получим, $x = 30$ $y = 80$. В ответ запишем скорость мотоциклиста.

Ответ: 80.

Часы со стрелками показывают 8 часов 00 минут. Через сколько минут минутная стрелка в четвертый раз поравняется с часовой?

Это, возможно, самая сложная задача В13. Конечно, есть простое решение — взять часы со стрелками и убедиться, что в четвертый раз стрелки поравняются через 4 часа, ровно в 12.00. Что и рекомендую сделать. Да, возьмите с собой механические часы, и вы решите задачу за

полминуты. В противном случае есть риск ошибиться и потерять бал. Если все-таки механических часов не найти не сможете, вот ход решения. За один час минутная стрелка проходит один круг, а часовая $1/12$ часть круга. Пусть их скорости равны 1 (круг в час) и $1/12$ (круга в час). Старт — в 8.00. Найдем время, за которое минутная стрелка в первый раз догонит часовую.

Минутная стрелка пройдет на $2/3$ круга больше, поэтому уравнение будет таким:

$$1 \cdot t - \frac{1}{12}t = \frac{2}{3}$$

Решив его, получим, что $t = \frac{8}{11}$ часа. Итак, в первый раз стрелки поравняются через $\frac{8}{11}$ часа. Пусть во второй раз они поравняются через время z . Минутная стрелка пройдет расстояние $1 \cdot z$, а часовая $\frac{1}{12}z$, причем минутная стрелка пройдет на один круг больше. Запишем уравнение: $1 \cdot z - \frac{1}{12}z = 1$

Решив его, получим, что $z = \frac{12}{11}$ часа. Итак, через $\frac{12}{11}$ часа стрелки поравняются во второй раз, еще через $\frac{12}{11}$ часа — в третий, и еще через $\frac{12}{11}$ часа — в четвертый. Значит, если старт был в 8.00, то в четвертый раз стрелки поравняются через $\frac{8}{11} + 3 \cdot \frac{12}{11} = 4$ часа (240 минут). Данная задача в прототипах ЕГЭ 2012 отсутствует, приводим её на всякий случай.

Ответ: 240

На экзамене по математике вам может также встретиться задача о нахождении средней скорости. Запомним, что средняя скорость **не равна** среднему арифметическому скоростей. Она находится

по специальной формуле:

$$V_{\text{средняя}} = \frac{S_{\text{общее}}}{t_{\text{общее}}}$$

Если участков пути было два, то

$$V_{\text{средняя}} = \frac{S_1 + S_2}{t_1 + t_1}$$

Путешественник переплыл море на яхте со средней скоростью 20 км/ч. Обрато он летел на спортивном самолете со скоростью 480 км/ч. Найдите среднюю скорость путешественника на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

Мы не знаем, каким было расстояние, которое преодолел путешественник. Знаем только, что это расстояние было одинаковым на пути туда и обратно. Когда расстояние не указано его принимают за 1 (одно море). Тогда время, которое путешественник плыл на яхте, равно $\frac{1}{20}$, а время, затраченное на полет, равно $\frac{1}{480}$.

$$\text{Общее время равно } \frac{24}{480} + \frac{1}{480} = \frac{25}{480} = \frac{5}{96}$$

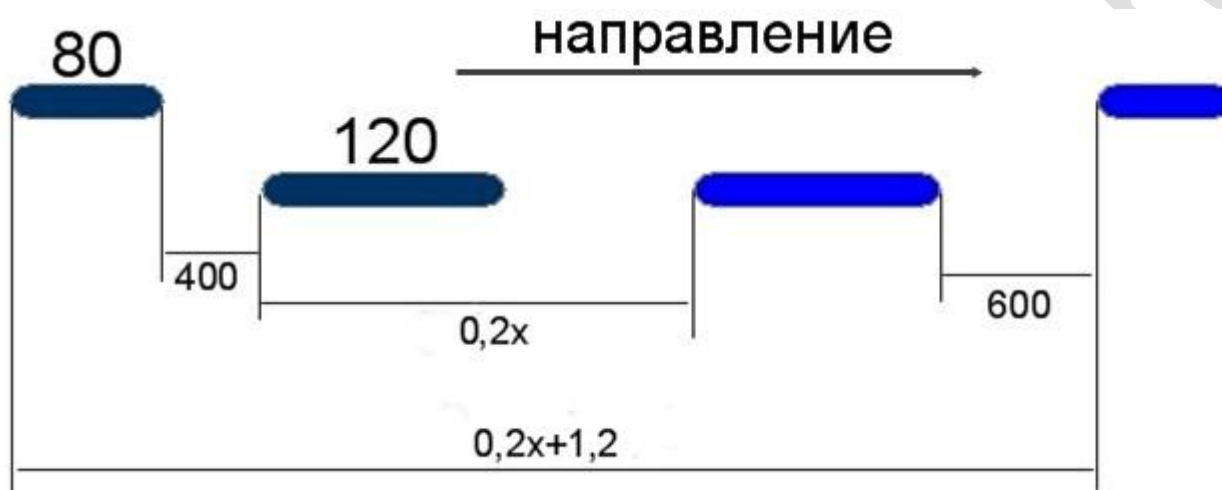
$$\text{Средняя скорость равна } \frac{1+1}{\frac{5}{96}} = \frac{192}{5} = 38,4 \text{ км/ч.}$$

Ответ: 38,4.

99610. По морю параллельными курсами в одном направлении следуют два сухогруза: первый длиной 120 метров, второй — длиной 80 метров. Сначала второй сухогруз отстает от первого, и в некоторый момент времени расстояние от кормы первого сухогруза до носа второго составляет 400 метров. Через 12 минут после этого

уже первый сухогруз отстаёт от второго так, что расстояние от кормы второго сухогруза до носа первого равно 600 метрам. На сколько километров в час скорость первого сухогруза меньше скорости второго?

На первый взгляд условие очень запутано, может возникнуть мысль, не пропустить ли эту задачу. Рекомендую сделать эскиз (обязательно), обозначить известные величины, наглядность помогает очень часто.



Тёмным цветом обозначена исходная позиция, синим – конечная.

Пусть скорость первого сухогруза будет x , второго y (км/ч). Время, которое двигались сухогрузы одинаковое 12 минут, переведём минуты в часы: 12 минут это $1/5$ часа или $0,2$.

Заполним графу «расстояние»:

	v	t	S
1	x	$0,2$	$0,2x$
2	y	$0,2$	$0,2y$

Отметим на эскизе расстояние, которое пройдёт первый, оно равно $0,2x$.

Подсчитаем по эскизу расстояние, на которое второй уйдёт вперёд.

Считать будем с кормы (задней части) $80+400+0,2x+120+600=0,2x+1,2$

(метры перевели в километры), теперь мы можем приравнять табличное значение и полученное (имеется ввиду расстояние пройденное вторым):

$$0,2y = 0,2x + 1,2 \quad | \cdot 5 \quad \Leftrightarrow \quad y - x = 6$$

Как видим, в данной задаче совсем не обязательно находить сами скорости, достаточно найти их разность, что и требуется по условию.

Можно было упростить условие - принять скорость первого сухогруза за 0 км/ч (стоит на месте), об этом приёме уже говорили в одной из предыдущих задач. Скорость второго обозначить любой переменной, оставим y .

	v	t	S
1	0	$\frac{1}{5}$	0
2	y	$\frac{1}{5}$	$\frac{y}{5}$



Второй прошёл мимо первого и переместился на 1,2 км (за 0,2 часа)

$$0,2y = 1,2$$

$$y = 6 \quad (\text{км/ч})$$

Найдём разность скоростей $y - x = 6 - 0 = 6$ (км/ч)

Ответ: 6

99611. По двум параллельным железнодорожным путям в одном направлении следуют пассажирский и товарный поезда, скорости которых равны соответственно 90 км/ч и 30 км/ч. Длина товарного поезда равна 600 метрам. Найдите длину пассажирского поезда, если время, за которое он прошел мимо товарного поезда, равно 1 минуте. Ответ дайте в метрах.

Пассажирский (90км/ч) следует в одном направлении с товарным (30км/ч) и обгоняет его. Получается, что пассажирский относительно товарного проезжает со скоростью 60 км/ч. Таким образом, задача не изменится, если принять скорость товарного 0 км/ч, пассажирского 60 км/ч (это относительная скорость). За одну минуту (1/60 часа) пассажирский со скоростью 60км/ч пройдёт:

$$\frac{1}{60} \cdot 60 = 1 \text{ км или } 1000 \text{ метров.}$$



Длина пассажирского поезда равна $1000 - 600 = 400$ метров.

Ответ: 400

Заметим, что если в задаче будет сказано, что транспортные средства движутся навстречу друг другу, то тогда приняв за ноль скорость одного из них, скорость другого будет равна сумме скоростей. Например,

составы движутся навстречу друг другу со скоростями 120 и 150 км/ч, понятно, что один относительно другого будет передвигаться со скоростью 270 км/ч.

Задачи на работу, смеси, сплавы, прогрессии и проценты вы можете получить совершенно бесплатно на странице <http://matematikalegko.ru>

<http://mathege.ru>

Открытый банк заданий по математике, документы, тренировочные работы, задания по всем группам, аналогичные тем, которые будут на ЕГЭ.