МБОУ «СОШ № 143» г. Красноярска,

учитель математики высшей категории

Князькина Татьяна Викторовна

**Подготовка учащихся к ЕГЭ по математике- 2014 : задачи на проценты**

Математика, давно став языком науки и техники, в настоящее время все шире проникает в повседневную жизнь и обиходный язык, все более внедряется в традиционно далекие от нее области. Интенсивная математизация различных областей человеческой деятельности особенно усилилась с внедрением современных информационных технологий, требующих математической грамотности человека буквально на каждом рабочем месте. Понятие «проценты» вошло в нашу жизнь не только с уроками в средней школе и с проведением сложных научно-исследовательских работ, не только с выпечкой кулинарных изделий и приготовлением лакомств, солений и варений, оно буквально атакует нас в пору утверждения рыночных отношений в экономике, в пору банкротств, кредитов, инфляций, девальваций. «Брать ссуду в банке или купить в кредит? Может быть выгоднее накопить денег для покупки дорогостоящей вещи?» Чтобы ответить на эти вопросы, требуется умение решать задачи по теме «Проценты».

Понимание процентов и умение производить процентные расчеты в настоящее время необходимо каждому человеку, это способствует «вхождению» в современную информационно-экономическую среду и, в конечном счете, облегчает социализацию.

Тема «Проценты» является универсальной в том смысле, что она связывает между собой многие точные и естественные науки, бытовые и производственные сферы жизни. Обучающиеся встречаются с процентами на уроках физики, химии, чтении газет, просмотре телепередач. Умением грамотно и экономно проводить элементарные процентные вычисления обладают далеко не все люди. Практика показывает, что очень многие окончившие школу не только не имеют прочных навыков обращения с процентами в повседневной жизни, но даже не понимают смысла процентов, как доли от некоторой заданной величины. Происходит это потому, что проценты изучаются на первом этапе основной школы, в 5-6 классах, когда учащиеся в силу возрастных особенностей еще не могут получить полноценные представления о процентах, об их роли в повседневной жизни.

В последнее время экзамен по математике проводится в форме ЕГЭ, и в контрольно-измерительных материалах ЕГЭ присутствует задача на проценты. Специфика темы такова, что значительное позитивное влияние на знания и умения учащихся оказывает последующее обучение, причем не математике, а химии, где процентные расчеты являются существенным элементом содержания обучения, об этом свидетельствуют и приемы решения задач, и способы записи их решения.

**Как подготовить учащихся 11 классов к правильному решению задач ЕГЭ на проценты?**

Сначала надо систематизировать знания и умения по теме «Проценты», полученные в 5 и 6 классах.

Учащиеся должны уметь:

* преобразовывать десятичные и обыкновенные дроби,
* представлять проценты — в виде дроби и дробь – в виде процентов;
* находить проценты от величины, величину по ее проценту;
* выражать отношения в процентах;
* применять полученные математические знания в решении жизненных задач;

**тест по теме «Проценты»**

1. Найдите 25% от 56.

А) 14 Б) 22,04 В) 20 Г) 25

1. Найдите число, если 1% его равен 75.

А) 0,75 Б) 7,5 В) 7500 Г) 750

1. Клубника содержит 6% сахара. Сколько килограммов сахара в 27 кг клубники?

А) 1,82 кг Б) 1,62 кг В) 2,24 кг Г) 2,42 кг

1. Книга стоила 25 р. После повышения цены она стоит 30,25 р. На сколько процентов возросла стоимость книги?

А) на 21% Б) на 20% В) на 24% Г) на 25%

1. Найдите число, 34% которого равны 170.

А) 57,8 Б) 500 В) 56,5 Г) 510

1. На математической олимпиаде 32% участников получили грамоты. Сколько школьников приняло участие в олимпиаде, если наградили 416 человек?

А) 932 Б) 1300 В) 133,1 Г) 1340

1. Надо вспахать участок поля в 500 га. В первый день вспахали 150 га. Сколько процентов составляет вспаханный участок от всего участка?

А) 330% Б) 30% В) 125% Г) 45%

1. Число уменьшили на 20%. На сколько процентов надо увеличить полученное число, чтобы получить данное число?

А) на 20% Б) на 40% В) на 25% Г) на 30%

1. Число 56 составляет 80% от некоторого числа. Найдите среднее арифметическое этих чисел.

А) 63 Б) 44,8 В) 126 Г) 56

1. Сторону квадрата уменьшили на 20%. На сколько процентов уменьшилась его площадь?

А) на 20% Б) на 36% В) на 10% Г) на 40%

**Задания представлены в виде текстовых задач.**

1. Квартирная плата повысилась на 20%. За прошлый месяц заплачено 120рублей. Сколько надо заплатить за текущий месяц?

2. В референдуме приняли участие 18 тыс. человек, что составило 60% всех жителей города, имеющих право голоса. Сколько жителей имеют право голоса?

3. В 5 тысячах из выпущенных 20 тысяч коробочек с жевательной резинкой находится сюрприз. Сколько процентов составили коробочки с сюрпризами?

4. Банком установлен тариф на пролонгацию аккредитива в размере 0,2% за квартал от суммы аккредитива. Вычислите размер комиссионных за пролонгацию аккредитива на сумму 100000 рублей за один квартал?

5. В первом квартале литр молока стоил 10 рублей. Во втором квартале цена на молоко повысилась на 20%, а в третьем еще на 50%. Сколько стал стоить литр молока?

6. Фирма платит разносчикам рекламных изданий за первую партию 10 тыс. рублей, а за каждую следующую в тот же день – на 5% больше по сравнению с предыдущей. Сколько получит человек, если в течение одного дня он разнес 4 партии изданий?

7. 15% жителей города ежегодно слушают ВВС, 45% - радио «Свобода» и 40% - «Голос Америки». Можно ли сказать, что все жители города ежедневно слушают передачи западного радио?

8. Себестоимость товара 30 тыс. рублей. В магазине этот товар продается по цене 90 тыс. руб. Сколько процентов от себестоимости составляет розничная цена.

9. Валовой национальный продукт государства составил 33 млрд. долларов, что соответствует 75% от планировавшегося бюджетом. Найдите плановую величину НВП этого государства.

10. Подоходный налог установлен в размере 13%. До вычета подоходного налога 1% заработной платы отчисляется в пенсионный фонд. Работнику начислено 5420 рублей. Сколько он получит после указанных вычетов?

11. Инфляция составляет 10% каждый месяц. Сколько процентов составила инфляция за два месяца?

12. В результате мелиоративных мероприятий посевные площади увеличились на 150% по сравнению с прошлым годом. Найдите величину посевных площадей этого года, если в прошлом году она была 60 га

Затем необходимо развивать и углублять общеучебные навыки и умения за счет: решения дополнительных задач (на процентное содержание, процентный раствор и концентрацию); новых способов их решения (уравнение, система уравнений, геометрически, старинный способ); решения задач с практической ориентацией.

**ЗАДАНИЯ ИЗ ВАРИАНТОВ ЕГЭ**

1. Смешали 160 г раствора, содержащего 60% соли, и 240 г раствора, содержащего 40% соли. Сколько процентов соли в получившемся растворе?

2. В январе пакет акций стоил на 10% меньше, чем в феврале. В феврале этот же пакет акций стоил на 20% меньше, чем в марте. На сколько процентов меньше стоимость акций в январе, чем в марте?

3. Предприятие уменьшило выпуск продукции на 20%. На сколько процентов необходимо теперь увеличить выпуск продукции, чтобы достигнуть его первоначального уровня?

4. Зарплату повысили на р%. Затем новую зарплату повысили на 2р%. В результате двух повышений зарплата увеличилась в 1,32 раза. На сколько процентов зарплата была повышена во второй раз?

**ПРОЦЕНТНОЕ СОДЕРЖАНИЕ, ПРОЦЕНТНЫЙ РАСТВОР**

Тип задач на составление уравнений и систем уравнений – задачи на сплавы и смеси, решение которых связано с понятиями «концентрация», «процентное содержание», «проба», «влажность».

Процентное содержание вещества в растворе, иногда называют %-м раствором, например, 15%-й раствор соли.

***1. Сколько кг соли в 10 кг соленой воды, если %-е содержание соли 15%?***

Решение: 10∙0,15 = 1,5(кг).

Ответ: 1,5 кг.

*Процентное содержание вещества в сплаве – это часть, которую составляет вес данного вещества от веса всего сплава.*

***2. Сплав содержит 10 кг олова и 15 кг цинка. Каково процентное содержание олова и цинка в сплаве?***

Решение:

1) 10 + 15 = 25(кг) сплав;

2) 10: 25 ∙ 100% = 40% процентное содержание олова в сплаве.

3) 15: 25 ∙ 100% = 60% процентное содержание цинка в сплаве.

Ответ: 40%, 60%.

**КОНЦЕНТРАЦИЯ, СМЕСИ И СПЛАВЫ**

Если концентрация вещества в соединении по массе составляет р%, то это означает, что масса этого вещества составляет р% от массы всего соединения.

**Пример***. Концентрация серебра в сплаве 300 г составляет 87%. Это означает, что чистого серебра в сплаве 300∙0,87 = 261 г.*

В этом примере концентрация вещества выражена в процентах.

Отношение объема чистой компоненты в растворе ко всему объему смеси называется объемной концентрацией этой компоненты.

Сумма концентраций всех компонент, составляющих смесь, равна 1. В этом случае концентрация – безразмерная величина.

Если известно процентное содержание вещества, то его концентрация находится по формуле: к = р : 100%,

к – концентрация вещества;

р – процентное содержание вещества (в процентах).

**Задача 1.** ***Имеется два сплава, в одном из которых содержится 40%, а в другом 20% серебра. Сколько кг второго слава нужно добавить к 20 кг первого, чтобы после сплавления вместе получить сплав, содержащий 32% серебра?***

**Решение** (с помощью уравнения): Пусть к 20 кг первого сплава нужно добавить Х кг второго сплава. Тогда получим (20+Х) кг нового сплава. В 20 кг первого сплава содержится 0,4∙20 = 8 (кг) серебра, а в (20+Х) кг нового сплава содержится 0, 32∙(20+Х) кг серебра. Составим уравнение: 8+0,2Х = 0,32(20+Х), Х=13 1/3.

**Ответ:** 13 1/3 кг второго сплава нужно добавить к 20 кг первого, чтобы получить сплав, содержащий 32% серебра.

**Задача 2. *При смешивании 5%-ного раствора кислоты с 40%-ным раствором кислоты получили 140 г 30%-ного раствора. Сколько граммов каждого раствора было для этого взято?***

**Решение** (с помощью системы уравнений):

Проследим за содержанием кислоты в растворах. Возьмем для смешивания Х г 5%-ного раствора кислоты (или 0,05Х г) и Υ г 40%-ного раствора (или 0,4Υ г). Так как в 140 г нового раствора кислоты стало содержаться 30%, т. е. 0,3∙140 г, то получаем следующее уравнение 0,05Х + 0,4Υ = 0,3∙140. Кроме того Х + Υ = 140.

Таким образом, приходим к следующей системе уравнений:

0,05Х + 40Υ = 30∙140,

Х + Υ = 140.

Из этой системы находим Х = 40, Υ = 100. Итак, 5%-ного раствора кислоты следует взять 40 г, а 40%-ного раствора – 100 г.

**Ответ:** 40 г, 100 г.

Таким образом, задачи для старшеклассников содержат прагматическую ориентацию, их формулировки имеют практическое применение, представляют конкретные интересы.

**Задача 1.**

***Стоимость компьютера 1250 долларов. Какова будет его стоимость после снижения цены на 20%?***

**Задача 2.**

***Торт стоил 100 рублей. Сначала цену повысили на 10%, а затем снизили на 10% (от новой цены). Сколько теперь стоит торт?***

В первую очередь изучению – на основной или старшей ступени – подлежат «сложные» проценты. Понятия «простых» и «сложных» процентов, при условии достаточного овладения учащимися этими понятиями, могут послужить мощным источником мотивации введения многих математических понятий. Основой для введения арифметической и геометрической прогрессий. Приведу в качестве примера три задачи.

**Задача 3.**

***Скорость тела, движущегося равноускоренно, каждую секунду увеличивается на 10%. В данный момент его скорость10,00 м/сек. Какова будет его скорость через три секунды?***

**Задача 4.**

***При внесении квартирной платы на один день позже установленного срока начисляется пеня в размере 0,1% от суммы платежа. Сколько придется заплатить в случае задержки квартирной платы на три месяца, если квартирная плата составила 100 рублей?***

**Задача 5.**

***Банком установлена процентная ставка из расчета 3% в месяц. Сколько денег должен получить гражданин, вложивший в этот банк 100 рублей на 3 месяца?***

Следует заметить, что самые естественные примеры могут служить «материальным» доказательством сравнения скорости роста арифметической и геометрической прогрессий. Этот факт оказывается, таким образом, не чисто математическим, причем достаточно сложным «изысканием», а совершенно очевидным «на практике» утверждением.

***Задача 6.***

***Выгодно ли гражданину задержать на три месяца внесение квартирной платы (задача 4), вложив эти 100 рублей в банк (задача 5)?***

**Решение задач с помощью уравнения**

Проблема заключается в том, что даже при решении несложных задач, возникают затруднения при переводе текста задачи на язык уравнений.

**Систематизируем знания по данному вопросу.**

Неизвестную величину обозначим через Х, тогда

* чтобы найти 20% от нее, надо 0,2Х;
* чтобы увеличить ее, например, на 10%, надо Х+0,1Х=1,1Х;
* чтобы уменьшить ее, например, на 30%, надо Х-0,3Х=0,7Х,
* в общем виде: если 0 < Р < 100,
* чтобы найти Р% от Х, надо 0,РХ;
* чтобы увеличить ее на Р%, надо Х+0,РХ=1,РХ;
* чтобы уменьшить ее на Р%, надо Х-0,РХ=(1-0,Р)Х, далее составляем уравнение, соответствующее условию задачи.

**Задача**

***В двух школах поселка было 1500 учащихся. Через год число учащихся первой школы увеличилось на 10%, а второй – на 20%, и в результате общее число стало равным 1720. Сколько учащихся было в каждой школе первоначально?***

**Решение:**

Пусть Х учащихся было в первой школе, тогда (1500-Х) учащихся было во второй школе. После увеличения на 10% учащихся первой школы их стало Х+0,1Х=1,1Х, а во второй школе стало (1500-Х)+0,2(1500-Х)=1500-Х+300-0,2Х=1800-1,2Х учащихся. В результате их общее число стало равным 1720. Составим уравнение

1,1Х+1800-1,2Х=1720

-0,1Х=-80

Х=800

Таким образом получили, что 800 учащихся было в первой школе, тогда 700 учащихся было во второй школе первоначально.

**Ответ:** 800 и 700 учащихся.

**Решение с помощью системы уравнений**

Когда в условии задачи неизвестными являются две величины, то можно решить задачу с помощью системы уравнений. Решим предыдущую задачу с помощью системы уравнений.

**Решение:**

Пусть Х учащихся было в первой школе, тогда Υ учащихся было во второй школе. В двух школах поселка было 1500 учащихся. После увеличения учащихся первой школы их стало 1,1Х, а во второй стало 1,2Υ учащихся, в результате их общее число стало равным 1720. Составим систему уравнений и решим ее способом подстановки

Х+Υ=1500, Х=1500-Υ, Х=1500-Υ, Х=800,

1,1Х+1,2Υ=1720; 1,1(1500-Υ)+1,2Υ=1720; Υ=700; Υ=700.

**Ответ:** 800 и 700 учащихся.

**Задачи из открытого банка заданий ЕГЭ (В13)**

***Задача 1. Одной машинистке на перепечатку рукописи требуется на 12 ч больше, чем другой. Если 25% рукописи перепечатает первая машинистка, а затем к ней присоединится вторая машинистка, то на перепечатку рукописи им понадобиться 35 ч, считая от момента начала работы первой машинистки. За сколько часов могла бы перепечатать рукопись каждая машинистка, работая отдельно?***

Решение: Пусть на перепечатку рукописи первой машинистке требуется  ч, тогда второй потребуется  ч. На перепечатку 25% рукописи первая машинистка затратит  ч. Выясним теперь, сколько времени потребуется двум машинисткам на перепечатку оставшихся 75% рукописи. Первая машинистка перепечатывает за один час  часть рукописи, вторая –  часть рукописи, а вместе за час они перепечатывают  часть рукописи. На перепечатку  рукописи им потребуется ч, т.е.  ч. Отсюда получаем уравнение: 

Решив это уравнение, найдем, что оно имеет два корня:  и .

Второй корень не соответствует условию задачи.

Ответ: первой машинистке на перепечатку рукописи требуется 60 ч, а второй – 48 ч.

***Задача 2. Положив в банк деньги, вкладчик получил через год прибыль в 240 тысяч рублей. Однако он не стал забирать деньги из банка, а, добавив к ним еще 60 тысяч, снова оставил деньги на год. В результате спустя еще год он получил в банке 1 миллион 100 тысяч рублей. Какая сумма была положена в банк первоначально и какой процент прибыли в год давал банк?***

Решение: Допустим, что первоначальный вклад составляет  тысяч рублей. Тогда процент прибыли за год равен . Сумма вклада, положенного в банк через год, составила  тысяч рублей, т.е.  тысяч рублей. Этот вклад принес доход, равный  тысячам рублей. Всего вкладчик получил 1100 тысяч рублей.

Получаем уравнение: 

Решив его, найдем, что это уравнение имеет два корня: ,  Выполнив расчеты, можно убедиться, что оба корня соответствуют условию задачи.

Ответ: задача имеет два решения: вкладчик вложил первоначально 200 тысяч рублей и получил доход 120% в год или вкладчик вложил первоначально 360 тысяч рублей и получил доход  в год.

***Задача 3. Имелось два слитка меди. Процент содержания меди в первом слитке был на 40 меньше, чем процент содержания меди во втором. После того как оба слитка сплавили, получили слиток, содержащий 36% меди. Найдите процентное содержание меди в первом и во втором слитках, если в первом слитке было 6 кг меди, а во втором – 12 кг.***

Решение: Обозначим за  массу первого слитка в кг, за  массу второго слитка в кг, получим систему уравнений:



В результате получим: х=30, у=20.

Ответ: 30 кг, 20 кг

***Задача 4. Для определения оптимального режима снижения цен социологи предложили фирме с 1 января снижать цену на один и тот же товар в двух магазинах двумя способами. В одном магазине – в начале каждого месяца (начиная с февраля) на 10%, в другом – через каждые два месяца, в начале третьего (начиная с марта) на одно и то же число процентов, причем такое, чтобы через полгода (1 июля) цены снова стали одинаковыми. На сколько процентов надо снижать цену товара через каждые два месяца во втором магазине?***

Решение: Пусть  руб. - стоимость товара,  - число процентов. Тогда,

I магазин

Февраль 

Март 

……………………………………

Июль 

II магазин

Март 

Май 

Июль 

По условию задачи через полгода (1 июля) цены снова стали одинаковые, составляем уравнение:





Ответ: на 21%.

***Задача 5. В соответствии с договором фирма с целью компенсации потерь от инфляции была обязана в начале каждого квартала повышать сотруднику зарплату на 3%. Однако в связи с финансовыми затруднениями она смогла повышать ему зарплату только раз в полгода (в начале следующего полугодия). На сколько процентов фирма должна повышать зарплату каждые полгода, чтобы 1 января следующего года зарплата сотрудника была равна той зарплате, которую он получил бы при режиме повышения, предусмотренной договором.***

Решение: Пусть  руб. - зарплата,  - процент повышения зарплаты. Тогда,

По плану: I квартал  руб.

……………………………

IV квартал  руб.

Фактически

I полугодие  руб.

II полугодие  руб.

По условию задачи зарплата сотрудника была равна той зарплате, которую он получил бы при режиме повышения, предусмотренного договором, составляем уравнение:





Ответ: на 6,09 %.

***Задача 6. На заводе было введено рационализаторское предложение. В результате время, необходимое для изготовления рабочими некоторой детали, уменьшилось на 20%. На сколько процентов возросла производительность труда этого рабочего?***

Решение: Пусть  - производительность труда, а  - весь объем работы. Тогда работа будет выполнена за время . В результате роста производительности труда время на изготовление детали стало равно , соответственно производительность , или . Соответственно рост производительности труда составил: 

Ответ: 25%

***Задача 7. Из жителей города одни говорят только на украинском, другие – только на русском, третьи – на обоих языках. По-украински говорят 85% всех жителей, а по-русски – 75%. Сколько процентов всех жителей этого города говорят на обоих языках?***

Решение:

100%-85%=15% - не говорят на украинском;

100%-75%=25% - не говорят на русском;

100%-15%-25%=60% - говорят на обоих языках.

Ответ: 60%

**Старинный способ решения**

Таким способом можно решать задачи на смешивание (сплавление) любого числа веществ. Задачам подобного типа уделялось значительное внимание в старинных рукописях и «Арифметике» Л. Ф. Магницкого. Данный способ позволяет получить правильный ответ.

Решим **задачу 1** старинным способом.

**Задача 2. *При смешивании 5%-ного раствора кислоты с 40%-ным раствором кислоты получили 140 г 30%-ного раствора. Сколько граммов каждого раствора было для этого взято?***

Друг под другом пишутся содержания кислот имеющихся растворов, слева от них и примерно посередине – содержание кислоты в растворе, который должен получиться после смешивания. Соединив написанные числа черточками, получим такую схему:

5

30

40

Рассмотрим пары 30 и 5; 30 и 40. В каждой паре из большего числа вычтем меньшее, и результат запишем в конце соответствующей черточки. Получится такая схема:

5 10

30

40 25

Из нее делается заключение, что 5%-ного раствора следует взять 10 частей, а 40%-ного – 25 частей (140 : 35 = 4 г приходится на одну часть), т. е. для получения 140 г 30%-ного раствора нужно взять 5%-ного раствора 40 г, а 40%-ного – 100 г.

**Ответ:** 40 г, 100 г.

**Задача 2.**

В общем виде решим задачу старинным способом.

***Предположим, что смешиваются Х г а%-ного раствора кислоты (или а:100Х г) и Υ г b%-ного раствора кислоты (или b:100Υ г). При этом необходимо получить с%-ный раствор****.*

**Решение:** Пусть для определенности, а < с < b,

а b - с

с

b с - а

**Задача 3. *К 15 л 10%-ного раствора соли добавили 5%-ный раствор соли и получили 8%-ный раствор. Какое количество литров 5%-ного раствора добавили?***

**Решение** (старинным способом):

10 3

8

5 2

Таким образом 15 л – это 3 части, 15 : 3 = 5 л приходится на одну часть, тогда 5 ∙ 2 = 10 л добавили 5%-ного раствора.

**Ответ**: 10 л.

Математические знания, безусловно, должны носить четко выраженный **прагматический характер.** К такому кругу относятся знания, связанные с процентами. Их прагматическая значимость очевидна, в особенности для современного общества. В частности, вполне практические задачи повседневной жизни человека, возникающие, в том числе и у старшеклассников и непосредственным образом связанные с процентами, требуют для своего решения не только первичных знаний о процентах, получаемых в основной школе, но и значительно большего круга математических понятий.