Решаем задачи по разделу «Молекулярная физика» при подготовке к ЕГЭ
Немного теории.
1. Уравнения состояния идеального газа (производные формы):

$$p = nkT,$$

$$pV = NkT,$$

$$p = \frac{\rho}{\mu}RT,$$

$$pV = \nu RT,$$

$$pV = \frac{m}{\mu}RT,$$

где p – давление;
n – концентрация молекул;
$k = 1{,}38\ 10^{-23}$ Дж/К; – постоянная Больцмана;
T – абсолютная температура;
V – объём;
N – число молекул;
ρ – плотность газа;
μ – молярная масса;
m – масса газа;
ν – число молей;
$R = 8{,}31$ Дж/(моль·К) – универсальная газовая постоянная.

2. Термодинамические процессы в идеальном газе постоянной массы:
а) изотермический, $T = const$, $p \cdot V = const$;
б) изобарный, $p = const$, $\frac{V}{T} = const$;
в) изохорный, $V = const$, $\frac{p}{T} = const$.

Примеры решения задач

Задача 1. В баллоне объёмом 20 л находится аргон под давлением 1,0 МПа и температуре 300 К. После того как из баллона было взято 20,0 г аргона, температура в баллоне понизилась до 280 К. Определить давление газа, оставшегося в баллоне.

Дано:
$V = 20$ *л* $= 2{,}0 \cdot 10^{-2}$ *м*^{3}
$p_1 = 1{,}0$ *МПа* $= 1{,}0 \cdot 10^6$ *Па*
$T_1 = 300$ *К*
$T_2 = 280$ *К*
$\Delta m = 20{,}0$ *г* $= 2{,}0 \cdot 10^{-2}$ *кг*

p_2 – ?

Решение:
Для решения задачи воспользуемся уравнением состояния идеального газа, применив его к начальному и конечному состояниям газа:

$$p_1 V = \frac{m_1}{\mu} R T_1, \qquad (1)$$

$$p_2 V = \frac{m_2}{\mu} R T_2. \qquad (2)$$

Из уравнений (1) и (2) выразим m_1 и m_2 и найдём их разность:

$$\Delta m = m_1 - m_2 = \left(\frac{p_1}{T_1} - \frac{p_2}{T_2}\right)\frac{\mu V}{R},$$

откуда находим

$$p_2 = p_1\frac{T_2}{T_1} - \frac{\Delta mRT_2}{\mu V} \ . \qquad (3)$$

Проверку решения проведем по размерности физических величин. В правую часть вместо символов величин подставим их единицы измерения. В правой части два слагаемых. Первое из них имеет размерность давления, так как состоит из двух множителей, первый из которых – давление, а второй – безразмерный. Проверим второе слагаемое:

$$\frac{[R]\cdot[m]\cdot[T]}{[\mu]\cdot[V]} = \frac{\frac{Дж}{моль\cdot кг}\cdot кг\cdot К}{\frac{кг}{моль}\cdot м^3} = \frac{Дж}{м^3} = \frac{Н}{м^2} = Па \ .$$

Вычисления произведём по формуле (3) с учётом, что для аргона $\mu = 40\cdot 10^{-3}$ *кг/моль*.

$$p_2 = 1{,}0\cdot 10^6\cdot\frac{280}{300} - \frac{8{,}31\cdot 2\cdot 10^{-2}\cdot 2{,}8\cdot 10^2}{40\cdot 10^{-3}\cdot 2\cdot 10^{-2}} = 93{,}3\cdot 10^4 - 5{,}8\cdot 10^4 =$$

$$= 87{,}5\cdot 10^4 \ Па = 875 \ кПа.$$

Ответ: *875 кПа.*

Задача 2. В сосуде находится смесь 14,0 г азота и 16,0 г кислорода при температуре 300 К и давлении 8,3 кПа. Определить плотность этой смеси, считая газы идеальными.

Дано:

$m_1 = 14{,}0 г = 1{,}40\cdot 10^{-2} кг$

$\mu_1 = 28\cdot 10^{-3} кг/моль$

$m_2 = 16{,}0 г = 1{,}60\cdot 10^{-2} кг$

$\mu_1 = 32\cdot 10^{-3} кг/моль$

$T = 300 К$

$P = 8{,}3 кПа = 8{,}3\cdot 10^3 \ Па$

$\rho - ?$

Решение:

Для каждого компонента в смеси газов можно записать уравнения состояния:

$$p_1 V = \frac{m_1}{\mu_1}RT \ , \qquad (1)$$

$$p_2 V = \frac{m_2}{\mu_2}RT \ . \qquad (2)$$

Давление смеси равно $p = p_1 + p_2$ (по закону Дальтона). Суммируя (1) и (2), с учётом закона Дальтона найдём объём газа

$$V = \left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}\right)\frac{RT}{p} \ .$$

Для плотности смеси находим

$$\rho = \frac{m_1 + m_2}{V} = \frac{m_1 + m_2}{\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}}\frac{p}{RT} \ .$$

Проверка размерности:

$$\frac{[m]\cdot[P]}{[v]\cdot[R]\cdot[T]} = \frac{кг\cdot Па}{моль\cdot(Дж/(моль\cdot К))\cdot К} = \frac{кг\cdot Па}{Дж} = \frac{кг}{м^3} \ .$$

Вычисления:

$$\rho = \frac{30\cdot 10^{-3}}{\frac{14}{28} + \frac{16}{32}}\cdot\frac{8{,}3\cdot 10^3}{8{,}3\cdot 3\cdot 10^2} = 0{,}1\frac{кг}{м^3} \ .$$

Ответ: *0,1 кг/м³*.

Задача 3. Поршневым воздушным насосом откачивают баллон объёмом 10,0 л. За один цикл (ход поршня) насос захватывает объём 0,4 л. Через сколько циклов давление в баллоне уменьшится от 0,1 МПа до 0,1 кПа? Процесс считать изотермическим, газ – идеальным.

Дано:

$V = 10$ *л* $= 1{,}0\ 10^{-2}$ *м*^{3}

$\Delta V = 0{,}4$ *л* $= 0{,}4\ 10^{-3}$ *м*^{3}

$p_0 = 0{,}1$ *МПа* $= 1{,}0\ 10^5$ *Па*

$p_N = 0{,}1$ *кПа* $= 100$ *Па*

$T = const$

N – ?

Решение:

Для изотермического процесса в первом и следующих циклах можно записать

$$p_0 V = p_1 (V + \Delta V),$$

$$p_1 V = p_2 (V + \Delta V),$$

$$p_{N-1} V = p_N (V + \Delta V).$$

Получаем рекуррентную формулу

$$p_0 = p_N \left(1 + \frac{\Delta V}{V}\right)^N, \qquad (1)$$

где N – число циклов. Прологарифмировав соотношение (1), получим для числа циклов

$$N = \frac{\lg \frac{p_0}{p_N}}{\lg\left(1 + \frac{\Delta V}{V}\right)}. \qquad (2)$$

Правая часть (2) содержит отношения однородных величин и является безмерной.

Вычисления:

$$N = \frac{\lg 10^3}{\lg\left(1 + \frac{0{,}4}{10}\right)} = \frac{3}{0{,}017} = 176.$$

Ответ: *176 циклов.*

Задача 4. Идеальный газ совершает процесс, в котором давление изменяется в зависимости от объёма по закону $p = p_0 - \alpha V^2$, где $p_0 = 0{,}1$ МПа, $\alpha = 1{,}0 \cdot 10^7$ Па·моль^2/м^6. Количество вещества газа равно 1 моль. Определить максимальную температуру газа в процессе.

Дано:

$p = p_0 - \alpha V^2$

$p_0 = 0{,}1$ *МПа* $= 10^5$ *Па*

$\alpha = 1{,}0 \cdot 10^7$ *Па·моль*^{2}/*м*^{6}

T_{max} – ?

Решение:

Найдём зависимость $T(V)$. Для этого воспользуемся уравнением состояния для одного моля газа

$$pV = RT.$$

Исключая давление, получим

$$T = \frac{p_o}{R} V - \frac{\alpha}{R} V^3. \qquad (1)$$

Из условий

$$\frac{dT}{dV} = 0, \qquad \frac{d^2 T}{dV^2} < 0$$

находим максимум функции *T(V)*. Получается, что в области положительных значений *V* и *T* зависимость (1) при объёме моля газа

$$V = \sqrt{\frac{p_o}{3\alpha}}$$

имеет максимальную температуру, равную

$$T_{\max} = \frac{2p_o}{3R}\sqrt{\frac{p_o}{3\alpha}}\,.$$

Проверка размерности:

$$\frac{\left[p^{3/2}\right]}{[R]\cdot\left[\alpha^{1/2}\right]} = \frac{Па^{3/2}}{\dfrac{Дж}{моль\cdot К}\;\dfrac{Па^{1/2}\cdot моль}{м^3}} = \frac{Па\cdot К}{\dfrac{Дж}{м^3}} = К\,.$$

Вычисления:

$$T_{\max} = \frac{2\cdot 10^5}{3\cdot 8{,}31}\sqrt{\frac{10^5}{3\cdot 10^7}} = 465К\,.$$

Ответ: *465 К*.