**МЕТОД РАЦИОНАЛИЗАЦИИ РЕШЕНИЯ НЕРАВЕНСТВ в задаче 15 ЕГЭ по математике**

**Бурмистрова Е.Ю., учитель математики**
**МАОУ Абатская СОШ №1**
**(на тьюторском семинаре для учителей**
**Абатского района 02.02.2016)**

## I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ.

**Метод рационализации заключается в замене сложного выражения $F(x)$ на более простое выражение $G(x)$**, при которой неравенство $G(x)\vee 0$ равносильно неравенству $F(x)\vee 0$ в области определения выражения.

Выделим некоторые выражения $F$ и соответствующие им рационализирующие выражения $G$, где $f, g, h, p, q$ - выражения от переменной $x$ $(h>0, h\neq 1;\ f>0,\ g>0)$, $a$ – фиксированное число $(a>0, a\neq 1)$.

| № | Выражение $F$ | Выражение $G$ |
|---|---|---|
| 1 | $\log_a f-\log_a g$ | $(a-1)(f-g)$ |
| 1а | $\log_a f-1$ | $(a-1)(f-a)$ |
| 1б | $\log_a f$ | $(a-1)(f-1)$ |
| 2 | $\log_h f-\log_h g$ | $(h-1)(f-g)$ |
| 2а | $\log_h f-1$ | $(h-1)(f-h)$ |
| 2б | $\log_h f$ | $(h-1)(f-1)$ |
| 3 | $\log_f h-\log_g h$ $(g\neq 1,\ f\neq 1)$ | $(f-1)(g-1)\times$ $\times(h-1)(g-f)$ |
| 4 | $h^f-h^g\quad(h>0)$ | $(h-1)(f-g)$ |
| 4а | $h^f-1$ | $(h-1)f$ |
| 5 | $f^h-g^h$ $(f>0; g>0)$ | $(f-g)h$ |
| 6 | $\lvert f\rvert-\lvert g\rvert$ | $(f-g)(f+g)$ |

Некоторые следствия ***(с учетом ОДЗ неравенства)***

- $\log_h f\cdot\log_p g\vee 0 \quad\Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow (h-1)(f-1)(p-1)(g-1)\vee 0.$
- $\log_h f+\log_h g\vee 0 \quad\Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow (fg-1)(h-1)\vee 0.$
- $\sqrt{f}-\sqrt{g}\vee 0 \quad\Leftrightarrow\quad f-g\vee 0.$
- $\dfrac{h^f-h^g}{h^p-h^q}\vee 0 \quad\Leftrightarrow\quad \dfrac{f-g}{p-q}\vee 0.$
- $f^h-g^p\vee 0 \quad\Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow (a-1)\left(\log_a f^h-\log_a g^p\right)\vee 0.$

В указанных равносильных переходах символ $\vee$ заменяет один из знаков неравенств: $>, <, \geq, \leq$.

# II. ПРАКТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ.

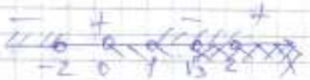
***Пояснение: ОБЯЗАТЕЛЬНОЕ УМЕНИЕ ОБУЧАЮЩИХСЯ РЕШАТЬ НЕРАВЕНСТВА МЕТОДОМ ИНТЕРВАЛОВ***

Рассмотрим примеры решения задач:

① $\log_x(x^2-3)<0$

$$\begin{cases} (x-1)(x^2-3-1)<0 \\ x>0 \\ x\neq 1 \\ x^2-3>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-1)(x-2)(x+2)<0 \\ x>0 \\ x\neq 1 \\ \left[\begin{array}{l} x>\sqrt{3} \\ x<-\sqrt{3} \end{array}\right. \end{cases}$$




Ответ: $(\sqrt{3};2)$

② $\log_{x-2}(x^2-1)>\log_{x-2}(2x^2+x-3)$

$$\begin{cases} (x-3)(x^2-1-2x^2-x+3)>0 \\ x-2>0 \\ x-2\neq 1 \\ x^2-1>0 \\ 2x^2+x-3>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-3)(-x^2-x+2)>0 \\ x>2 \\ x\neq 3 \\ \left[\begin{array}{l} x<-1 \\ x>1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x>1 \\ x<-\frac{3}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} (x-3)(x^2+x-2)<0 \\ x>2 \\ x\neq 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-3)(x-1)(x+2)<0 \\ x>2 \\ x\neq 3 \end{cases}$$


Ответ: $(2;3)$

(3) $$\frac{(3^x-1)(2^{x^2}-16)}{x^2+x-2} \geq 0$$

$$\frac{(3^x-3^0)(2^{x^2}-2^4)}{x^2+x-2} \geq 0$$

$$\frac{2(x-0)\cdot 1(x^2-4)}{(x-1)(x+2)} \geq 0 \quad \Big| :2$$

$$\frac{x\cdot(x-2)(x+2)}{(x-1)(x+2)} \geq 0$$


Ответ: $[0;1)\cup[2;+\infty)$

(4) $$\log_{\frac{1}{49}}(26-x)\cdot\log_{6-x}\frac{1}{7} \geq 1$$

$$\log_{\frac{1}{7}}(26-x)\cdot\frac{1}{\log_{\frac{1}{7}}(6-x)}-1 \geq 0$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\log_{\frac{1}{7}}(26-x)}{\log_{\frac{1}{7}}(6-x)}-1 \geq 0 \quad \Big| \cdot 2$$

$$\log_{6-x}(26-x)-2 \geq 0$$

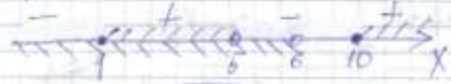
$$\log_{6-x}(26-x)-\log_{6-x}(6-x)^2 \geq 0$$

$$\begin{cases} 6-x>0 \\ 6-x\neq 1 \\ 26-x>0 \\ (6-x-1)(26-x-(6-x)^2)\geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x<6 \\ x\neq 5 \\ x<26 \\ (-x+5)(26-x-36+12x-x^2)\geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-5)(x^2-11x+10)\geq 0 \\ x<6 \\ x\neq 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-5)(x-1)(x-10)\geq 0 \\ x<6 \\ x\neq 5 \end{cases}$$




Ответ: $[1;5)$

5

$$\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-2x+5}-9^{x^2-x-2}}{0{,}25^{-3x^2+3x-2}-8^{-2x^2-x+\frac{1}{3}}}\le 0$$

$$\frac{3^{-x^2+2x-5}-3^{2x^2-2x-4}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{6x^2+6x-4}-\left(\frac{1}{2}\right)^{6x^2+3x-1}}\le 0$$

$$\frac{(3-1)\left(-x^2+2x-5-2x^2+2x+4\right)}{\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\cancel{6x^2}+6x-4-\cancel{6x^2}-3x+1\right)}\le 0$$

$$\frac{2\left(-3x^2+4x-1\right)}{-\frac{1}{2}(3x-3)}\le 0 \quad \Big|\cdot 4$$

$$\frac{3x^2-4x+1}{3(x-1)}\le 0$$

$$\frac{(x-1)\left(x-\frac{1}{3}\right)}{3(x-1)}\le 0$$


$\left(-\infty;\frac{1}{3}\right]$

6

$$\frac{\sqrt{x^2-4}-\sqrt{3x}}{\sqrt{x}-1}\ge 0$$

$$\begin{cases}\dfrac{(x^2-4-3x)}{(x-1)}\ge 0\\ x\ge 0\\ 3x\ge 0\\ x^2-4\ge 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{x^2-3x-4}{x-1}\ge 0\\ x\ge 0\\ (x-2)(x+2)\ge 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{(x+1)(x-4)}{x-1}\ge 0\\ x\ge 0\\ (x-2)(x+2)\ge 0\end{cases}$$

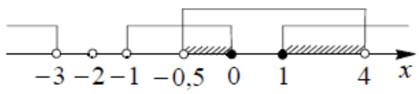

Ответ: $[4;+\infty)$

**7.** Решить неравенство $\log_{|x+2|}\left(4+7x-2x^2\right)\le 2$.

Решение:

$$\log_{|x+2|}\left(4+7x-2x^2\right)\le 2,\Leftrightarrow \log_{|x+2|}\left(4+7x-2x^2\right)-\log_{|x+2|}\left(x+2\right)^2\le 0,\Leftrightarrow \begin{cases}\left(|x+2|-1\right)\left(4+7x-2x^2-\left(x+2\right)^2\right)<0,\\ |x+2|>0,\ |x+2|\ne 1,\\ 4+7x-2x^2>0;\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left(\left(x+2\right)^2-1\right)\left(-3x^2+3x\right)\le 0,\\ x\ne -1,\, x\ne -2,\, x\ne -3\\ 2x^2-7x-4<0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\left(x+1\right)\left(x+3\right)\left(x-1\right)\ge 0,\\ x\ne -1,\, x\ne -2,\, x\ne -3,\\ -\dfrac{1}{2}<x<4;\end{cases}$$




Ответ: $\left(-\frac{1}{2};0\right]\cup[1;4)$.

**№8.** Решить неравенство $\log_{\frac{x}{3}}\left(\log_x\sqrt{3-x}\right)\ge 0$.

Решение:

$$\log_{\frac{x}{3}}\left(\log_x\sqrt{3-x}\right)\ge 0 \Leftrightarrow \log_{\frac{x}{3}}\left(\log_x\sqrt{3-x}\right)\ge \log_{\frac{x}{3}}1 \Leftrightarrow \begin{cases}\left(\frac{x}{3}-1\right)\left(\log_x\sqrt{3-x}-1\right)\ge 0\\ \log_x\sqrt{3-x}>0,\\ \frac{x}{3}>0,\ \frac{x}{3}\ne 1,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left(\frac{x}{3}-1\right)\left(\log_x\sqrt{3-x}-\log_x x\right)\ge 0\\ \log_x\sqrt{3-x}>0,\\ \frac{x}{3}>0,\ \frac{x}{3}\ne 1,\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\left(\frac{x}{3}-1\right)(x-1)\left(\sqrt{3-x}-x\right)\ge 0,\\ (x-1)\left(\sqrt{3-x}-1\right)>0,\\ x>0,\ x\ne 1,\\ \sqrt{3-x}>0,\\ x>0,\ \ x\ne 3,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-3)(x-1)\left(3-x-x^2\right)\ge 0,\\ (x-1)(3-x-1)>0,\\ x>0,\ x\ne 1,\\ x<3,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-3)(x-1)\left(x^2+x-3\right)\le 0,\\ (x-1)(2-x)>0,\\ 0<x<3,\ x\ne 1,\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x-3)(x-1)\left(x^2+x-3\right)\le 0,\\ (x-1)(2-x)>0,\\ 0<x<3,\ x\ne 1,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-3)(x-1)\left(x^2+x-3\right)\le 0,\\ 1<x<2,\\ 0<x<3,\ x\ne 1,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-3)(x-1)\left(x^2+x-3\right)\le 0,\\ 1<x<2,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2+x-3\ge 0,\\ 1<x<2,\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\ge \frac{-1+\sqrt{13}}{2},\\ x\le \frac{-1-\sqrt{13}}{2},\end{array}\right.\\ 1<x<2,\end{cases} \Leftrightarrow \frac{-1+\sqrt{13}}{2}\le x<2$$

<u>Ответ:</u> $\left[\frac{-1+\sqrt{13}}{2};\,2\right)$.

**№9.** Решить неравенство $(x^2-x-2)^{(2x^2-x-1)}\ge (x^2-x-2)^{(9-x^2)}$.

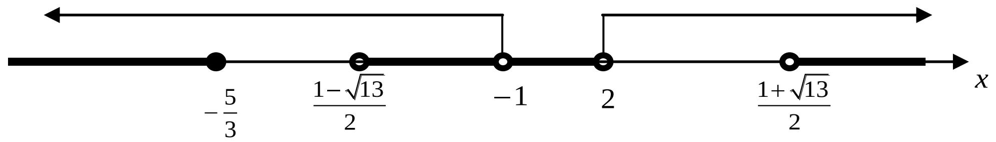
<u>Решение:</u>

$$\left(x^2-x-2\right)^{\left(2x^2-x-1\right)}\ge\left(x^2-x-2\right)^{\left(9-x^2\right)},\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2-x-2>0,\\ x^2-x-2\ne 1,\\ \left(x^2-x-2-1\right)\left(2x^2-x-1-9+x^2\right)\ge 0,\end{cases}\\ x^2-x-2=1,\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2-x-2>0,\\ x^2-x-3\ne 0,\\ \left(x^2-x-3\right)\left(3x^2-x-10\right)\ge 0,\end{cases}\\ x^2-x-3=0,\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x>2,\\ x<-1,\end{array}\right.\\ x\ne \frac{1\pm\sqrt{13}}{2},\\ \left(x^2-x-3\right)\left(3x^2-x-10\right)\ge 0,\end{cases}\\ x=\frac{1\pm\sqrt{13}}{2},\end{array}\right.$$

Рассмотрим решение системы:

$$\begin{cases} x^2-x-2>0, \\ x^2-x-3\neq 0, \\ \left(x^2-x-3\right)\left(3x^2-x-10\right)\geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x>2, \\ x<-1, \end{array}\right. \\ x\neq \dfrac{1\pm\sqrt{13}}{2}, \\ \left(x-\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}\right)\left(x-\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}\right)(x-2)\left(x+\dfrac{5}{3}\right)\geq 0, \end{cases}$$




Учитывая, решения уравнения $x^2-x-3=0$, получим полное решение исходного неравенства: $\left(-\infty;-\dfrac{5}{3}\right]\cup\left[\dfrac{1-\sqrt{13}}{2};-1\right)\cup\left[\dfrac{1+\sqrt{13}}{2};+\infty\right)$.

Ответ: $\left(-\infty;-\dfrac{5}{3}\right]\cup\left[\dfrac{1-\sqrt{13}}{2};-1\right)\cup\left[\dfrac{1+\sqrt{13}}{2};+\infty\right)$

**№10.** Решить неравенство $\log_{12x^2-41x+35}(3-x)\geq\log_{2x^2-5x+3}(3-x)$.

Решение:

$$\log_{12x^2-41x+35}(3-x)\geq\log_{2x^2-5x+3}(3-x),\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{\log_{3-x}\left(12x^2-41x+35\right)}\geq\dfrac{1}{\log_{3-x}\left(2x^2-5x+3\right)}, \\ \begin{cases} 3-x=1, \\ 12x^2-41x+35>0, 12x^2-41x+35\neq 1, \ -\varnothing \\ 2x^2-5x+3>0, 2x^2-5x+3\neq 1, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

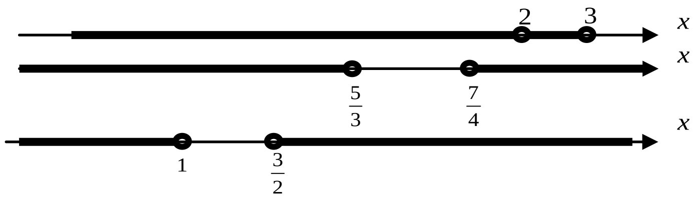
$$\Leftrightarrow\frac{\log_{3-x}\left(2x^2-5x+3\right)-\log_{3-x}\left(12x^2-41x+35\right)}{\log_{3-x}\left(12x^2-41x+35\right)\log_{3-x}\left(2x^2-5x+3\right)}\geq 0,\Leftrightarrow\begin{cases} \dfrac{(3-x-1)\left(2x^2-5x+3-12x^2+41x-35\right)}{(3-x-1)\left(12x^2-41x+35-1\right)(3-x-1)\left(2x^2-5x+3-1\right)}\geq 0, \\ 3-x>0, 3-x\neq 1, \\ 12x^2-41x+35>0, \\ 2x^2-5x+3>0, \end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} \dfrac{-10x^2+36x-32}{\left(12x^2-41x+34\right)(2-x)\left(2x^2-5x+2\right)}\geq 0, \\ x<3, \quad x\neq 2, \\ 12x^2-41x+35>0, \\ 2x^2-5x+3>0, \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \dfrac{10x^2-36x+32}{\left(12x^2-41x+34\right)(2-x)\left(2x^2-5x+2\right)}\leq 0, \\ x<3, \quad x\neq 2, \\ \left(x-\dfrac{5}{3}\right)\left(x-\dfrac{7}{4}\right)>0, \\ (x-1)\left(x-\dfrac{3}{2}\right)>0, \end{cases}$$

Разобьем решение системы на части:

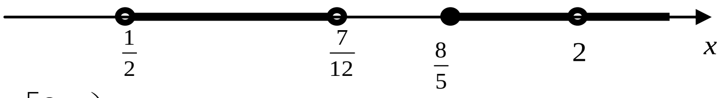
1.

$$\begin{cases} \left(x-\dfrac{5}{3}\right)\left(x-\dfrac{7}{4}\right)>0, \\ (x-1)\left(x-\dfrac{3}{2}\right)>0, \\ x<3, \quad x\neq 2, \end{cases}$$



Откуда $x \in (-\infty; 1) \cup \left(\frac{3}{2}; \frac{5}{3}\right) \cup \left(\frac{7}{4}; 2\right) \cup (2; 3)$

2. $\dfrac{10x^2 - 36x + 32}{\left(12x^2 - 41x + 34\right)(2 - x)\left(2x^2 - 5x + 2\right)} \le 0 \Leftrightarrow \dfrac{(x-2)\left(x - \frac{8}{5}\right)}{\left(x - \frac{17}{12}\right)(x-2)(2-x)(x-2)\left(x - \frac{1}{2}\right)} \le 0 \Leftrightarrow \dfrac{x - \frac{8}{5}}{\left(x - \frac{17}{12}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-2)^2} \ge 0$




Откуда $x \in \left(\frac{1}{2}; \frac{7}{12}\right) \cup \left[\frac{8}{5}; 2\right) \cup (2; +\infty)$

Пересекая полученные результаты, получим решение системы $\left(\frac{1}{2}; 1\right) \cup \left[\frac{8}{5}; \frac{5}{3}\right) \cup \left(\frac{7}{4}; 2\right) \cup (2; 3)$.

Ответ: $\left(\frac{1}{2}; 1\right) \cup \left[\frac{8}{5}; \frac{5}{3}\right) \cup \left(\frac{7}{4}; 2\right) \cup (2; 3)$.