Муниципальное бюджетное образовательное учреждение

дополнительного образования детей дом детского творчества

г. Зверева Ростовской области.

Муниципальное бюджетное образовательное учреждение

средняя образовательная школа №1

г.Зверева Ростовской области.

Исследовательская работа

по математике:

« Решение приведенных квадратных уравнений»

Работа педагога дополнительного

образования МБОУ ДОД ДДТ,

учителя математики МБОУ СОШ №1

Куца Фёдора Ивановича

г. Зверево

2013г.

Содержание работы:

1. История развития квадратных уравнений.

1.1 Квадратные уравнения в Древнем Вавилоне.

1.2 Как составлял и решал Диофант квадратные уравнения.

1.3 Квадратные уравнения в Индии.

1.4 Квадратные уравнения у ал – Хорезми.

2. Основная часть.

I способ. Общая формула для вычисления корней.

II способ. Корни уравнения при чётном коэффициенте *b*.

III способ. Формула корней приведенного квадратного уравнения.

IVспособ. Решение уравнений по теореме, обратной теореме Виета.

V способ. Свойство коэффициентов.

VI способ. Связь между коэффициентами. ( А )

VI способ. Связь между коэффициентами. ( Б )

VIII способ. Метод выделения полного квадрата.

IX способ. Разложение левой части уравнения на множители способом группировки.

X способ. Метод переброски.

XI способ. Использование следствия теоремы Безу.

XII способ. Графическое решение.

XIII способ. Геометрический способ.

XIV способ. Решение квадратных уравнений с применением циркуля и линейки.

XV способ. Решение квадратных уравнений с помощью номограммы.

Литература

**«Без упорного умственного труда никто не**

**может далеко продвинуться в математике.**

**Но каждый, кому знакома радость познания,**

**кто увидел красоту математики,**

**не будет жалеть затраченных усилий».**

**Галилео Галилей.**

**1. История развития квадратных уравнений.**

**1.1 Квадратные уравнения в Древнем Вавилоне.**

Необходимость решать уравнения не только первой, но и второй степени еще в древности была вызвана потребностью решать задачи, связанные с нахождением площадей земельных участков и с земляными работами военного характера, а также с развитием астрономии и самой математики. Квадратные уравнения умели решать около 2000 лет до н. э. вавилоняне.

Применяя современную алгебраическую запись, можно сказать, что в их клинописных текстах встречаются, например, квадратные уравнения:

*х2+х = х2- х =*14 *.*

 Правило решения этих уравнений, изложенное в вавилонских текстах, совпадает по существу с современным, однако неизвестно, каким образом дошли вавилоняне до этого правила. Почти все найденные до сих пор клинописные тексты приводят только задачи с решениями, изложенными в виде рецептов, без указаний относительно того, каким образом они были найдены.

 Несмотря на высокий уровень развития алгебры в Вавилоне, в клинописных текстах отсутствуют понятие отрицательного числа и общие методы решения квадратных уравнений.

**1.2 Как составлял и решал Диофант квадратные уравнения.**

В «Арифметике» Диофанта нет систематического изложения алгебры, однако в ней содержится систематизированный ряд задач, сопровождаемых объяснениями и решаемых при помощи составления уравнений разных степеней.

 При составлении уравнений Диофант для упрощения решения умело выбирает неизвестные.

 Вот, к примеру, одна из его задач: «Найти два числа, зная, что их сумма равна 20, а произведение - 96»

 Диофант рассуждает следующим образом: из условия задачи вытекает, что искомые числа не равны, так как если бы они были равны, то их произведение равнялось бы не 96, а 100. Таким образом, одно из них будет больше половины их суммы, т.е. 10 *+ х*, другое же меньше, т.е. 10 *- х*. Разность между ними 2*х*.

Отсюда уравнение: (10 + *х*)(10 - *х*) = 96; 100 - *х*2 = 96; *х*2 - 4 = 0 (1)

Откуда *х* = 2. Одно из искомых чисел равно 12, другое8. Решение *х = -* 2 для Диофанта не существует, так как греческая математика знала только положительные числа.

 Если мы решим эту задачу, выбирая в качестве неизвестного одно из искомых чисел, то мы придем к решению приведенного квадратного уравнения:

*у*(20 - *у*) = 96,  *у*2 - 20*у* + 96 = 0. (2)

Ясно, что, выбирая в качестве неизвестного полуразность искомых чисел, Диофант упрощает решение; ему удается свести задачу к решению неполного квадратного уравнения (1).

**1.3 Квадратные уравнения в Индии.**

Задачи на квадратные уравнения встречаются уже в астрономическом тракте «Ариабхаттиам», составленном в 499 г. индийским математиком и астрономом Ариабхаттой. Другой индийский ученный, Брахмагупта (VII в.), изложил общее правило решения квадратных уравнений, приведенных к единой канонической форме:

*х*2 *+ bх = с.*

В уравнении коэффициенты могут быть и отрицательными. Правило Брахмагупты по существу совпадает с нашим.

 В Древней Индии были распространены публичные соревнования в решении трудных задач. В одной из старинных индийских книг говорится по поводу таких соревнований следующее: «Как солнце блеском своим затмевает звезды, так ученый человек затмит славу другого в народных собраниях, предлагая и решая алгебраические задачи». Задачи часто облекались в стихотворную форму.

 Вот одна из задач знаменитого индийского математика XII в. Бхаскары.

«Обезьянок резвых стая, А двенадцать по лианам…

Власть поевши, развлекалась. Стали прыгать, повисая…

Их в квадрате часть восьмая, Сколько ж было обезьянок,

На поляне забавлялась. Ты скажи мне, в этой стае?»

Решение Бхаскары свидетельствует о том, что он знал о двузначности корней квадратных уравнений. Соответствующее задаче уравнение имеет вид: + 12 = *x.*

Бхаскара пишет его под видом: *х*2 *-* 64*х = -*768 и, чтобы дополнить левую часть этого уравнения до квадрата, прибавляет к обеим частям 322, получая затем:

*х*2 *-* 64*х +* 322 *= -*768 *+* 1024*,* (*х* - 32)2 = 256, *х -* 32 *= ±* 16.

*х*1 *=* 16*, х*2 *=* 48*.*

**1.4 Квадратные уравнения у ал – Хорезми.**

При решении квадратных уравнений ал - Хорезми на частных числовых примерах излагает правила решения, а затем и геометрические доказательства.

«Квадрат и число 21 равны 10 корням. Найти корень» (*подразумевается корень уравнения х*2+ 21 *=* 10*х*)*.*

Решение автора гласит примерно так: раздели пополам число корней, получишь 5, умножишь 5 само на себя, от произведения отними 21, останется 4. Извлеки корень из 4, получишь 2. Отними 2 от 5, получишь 3, это и будет искомый корень. Или же прибавь 2 к 5, что даст 7, это тоже есть корень.

**2. Основная часть.**

**В работе рассматриваются уравнения имеющие корни, если нет оговорок.**

Определение.1 Квадратным уравнением с одним неизвестным называется уравнение вида: *ах*2 *+bх + с =* 0, где *х* – неизвестная величина; *а, b, с* - заданные числа, причём *а* ≠ 0.

Определение 2 . Квадратное уравнение, первый коэффициент которого равен 1, **т.е. *а* = 1, *называется приведенным*:**  *х*2 *+ bх + с =* 0.

Замечание. Любое квадратное уравнение *ax*2*+ bx + с  =* 0 можно свести к приведенному квадратному уравнению посредством деления на коэффициент *а*:

*х*2*+ х + =* 0*,* введя обозначения *p = , q =,* имеем *х*2 *+ рх + q =* 0.

**I способ. Общая формула для вычисления корней.**

Для нахождения корней квадратного уравнения в общем виде следует пользоваться приводимой ниже формулой: *x*1,2 = , где *b*2 *-* 4*ac = D*, причем, если  *D* > 0, то уравнение имеет два корня; если  *D* = 0, то уравнение имеет один корень; если  *D* < 0, то уравнение не имеет корней.

Так как **приведенное квадратное уравнение имеет вид:**  *х*2 *+ bх + с =* 0, где ***а* = 1, то общая формула примет вид:**  *x*1, 2 = .

Пример.  *х*2 *+* 8*х +* 7 *=* 0.

*x*1, 2 = = = .

*x*1 = = - 1, *x*2 = = - 7.

Ответ. *x*1  = - 1, *x*2 = - 7.

**II способ. Корни уравнения при чётном коэффициенте *b*.**

Для уравнения *х*2*+ bх + с =* 0, где *b,* откуда *k* = *b* вместо формулы *x*1, 2 = для нахождения корней можно использовать более простое выражение:

*x*1, 2 = - *k*.

Пример.  *х*2 *-* 10*х +* 9 *=* 0.

*x*1, 2 = 5 = 5 = 5 ± 4.

*x*1 = 1, *x*2 = .

Ответ. *x*1  = 1, *x*2 = 9.

**III способ. Формула корней приведенного квадратного уравнения.**

Для решения уравнения вида *х*2 *+ рх + q =* 0 имеет место формула:

*x*1, 2 = - .

Мнемонические правила:

* Из «[Радионяни](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A0%D0%B0%D0%B4%D0%B8%D0%BE%D0%BD%D1%8F%D0%BD%D1%8F)»:

1) «Пэ» со знаком взяв обратным, А под корнем, очень кстати,

Мы на два его разделим. Половина «пэ» в квадрате,

И от корня аккуратно Минус «ку». И вот решенье

Знаком плюс – минус отделим. Небольшого уравненья.

2) «Минус» напишем сначала Ну, а под корнем, приятель,

Рядом с ним «пэ» пополам, Cводится всё к пустяку:

«Плюс-минус» знак радикала, «Пэ» пополам и в квадрате

С детства знакомого нам. Минус прекрасное *«*ку*»*.

Пример.  *х*2 *+* 8*х -* 9 *=* 0.

*x*1, 2 = - 4 = - 4 = - 4 ± 5.

*x*1 = 1, *x*2 = - .

Ответ. *x*1  = 1, *x*2 = - 9.

**IVспособ. Решение уравнений о теореме, обратной теореме Виета.**

Между корнями и коэффициентами приведенного квадратного *х*2 *+ рх + q =* 0 уравнения существует следующая связь:

Если числа *х*1 и *х*2 таковы, что *х*1 + *х*2 = - *p*, *х*1*х*2 = *q*, то *х*1 и *х*2 – корни уравнения.

Познакомили поэта  
 С теоремою Виета.  
 Оба корня он сложил,  
 Минус «пэ» он получил,  
 А корней произведение  
Дает «ку» из уравнения.

По коэффициентам можно предсказать знаки корней:

1) Если свободный член приведенного квадратного уравнения положителен, то уравнение имеет два одинаковых по знаку корня и это зависит от второго коэффициента: при положительном *р* корни отрицательные, при отрицательном *р* корни положительные.

Если *q* > 0 и *р* > 0 , то оба корня отрицательны.

Пример.  *х*2 *+* 8*х +* 7 *=* 0.

*х*1*х*2 = 7, *х*1 + *х*2 = - 8,

*х*1 = - 1, *х*2 = - 7.

Ответ. *х*1 = - 1, *х*2 = - 7.

Если q > 0 и < 0 , то оба корня положительные.

Пример. *х*2  *-* 8*х +* 7 *=* 0.

*х*1*х*2 = 7, *х*1 + *х*2 = 8,

*х*1 = 1, *х*2 = 7.

Ответ. *х*1 = 1, *х*2 = 7.

2) Если свободный член приведенного квадратного уравнения отрицателен, то уравнение имеет два различных по знаку корня, знак меньшего по модулю корня совпадает со знаком второго коэффициента в уравнении.

Если *q* < 0 и *р* > 0 , то меньший по модулю корень будет положителен.

Пример.  *х*2 *+* 8*х -* 9 *=* 0.

*х*1*х*2 = - 9, *х*1 + *х*2 = - 8,

*х*1 = 1, *х*2 = - 9.

Ответ. *х*1 = 1, *х*2 = - 9.

Если *q* < 0 и *р* < 0, то меньший по модулю корень будет отрицателен.

Пример.  *х*2*-* 8*х -* 9 *=* 0.

*х*1*х*2 = -9, *х*1 + *х*2 = 8,

*х*1 = - 1, *х*2 = 9.

Ответ. *х*1 = -1, *х*2 = 9.

**Замечание.**  Зная, что при сложении чисел с разными знаками их модули вычитаются, то для нахождения корней приведенного уравнения необходимо выполнить следующие действия:

1. найти такие пары делителей числа *q*, чтобы их разность была равна числу *р*,
2. поставить пред меньшим из найденных чисел второй знак уравнения, другой корень будет иметь противоположный знак.

Пример.*х*2 - 2*х* - 15 = 0.

Из пар делителей числа 15 (1 и 15, 3 и 5) выбираем ту, разность которых равна 2. Это числа 3 и 5. Перед меньшим числом ставим знак второго коэффициента уравнения, т. е. "минус". Таким образом, *х*1 = - 3, *х*2 = 5.

Ответ. *х*1 = - 3, *х*2 = 5.

Такой алгоритм помогает очень быстро решать уравнения тем учащимся, у которых имеются проблемы с подобным знаком в теореме Виета.

**V способ. Свойство коэффициентов.**

Для коэффициентов уравнения вида *х*2 *+ рх + q =* 0 имеет место следующие соотношения:

1) если 1+ *p* + *q* = 0, то *x*1 = 1, *x*2 = *q* .

Пример.  *х*2 *-* 8*х +* 7 *=* 0.

Так как 1 + (- 8) + 7 = 0, то х1 = 1, х2 = 7.

Ответ. *x*1  = 1, *x*2 = 7.

2) если 1+ *q* = *p*, то *x*1 = - 1, *x*2 = - *q* .

Пример.  *х*2 *+* 8*х +* 7 *=* 0.

Так как 1 + 7 = 8, то х1 = - 1, х2 = - 7.

Ответ. *x*1  = - 1, *x*2 = - 7.

**VI способ. Связь между коэффициентами. (А)**

1) Если *q* = 1, *p* = , *a* > 0,

то *х*1 = - *m,* *х*2 = -. (Оба корня отрицательны).

Пример. *х*2 + *х* + 1= 0.

*p* = = = ,

*х*1= - 3, *х*2 = - .

Ответ. *х*1= - 3, *х*2 = - .

2) Если *q* = 1, p = -, *а* > 0,

то *х*1 = *m*, *х*2 = . (Оба корня положительны).

Пример. *х*2 - *х* + 1= 0.

*p* = - = - = - ,

*х*1 = 3, *х*2 = .

Ответ. *х*1 = 3, *х*2 = .

3) Если *q* = - 1, *p* = , *а* > 0,

то *х*1 = - *m,* *х*2 = . (Корни разных знаков).

Пример. *х*2 + *х* - 1= 0.

*p* = = = ,

*х*1= - 3, *х*2 = .

Ответ. *х*1= - 3, *х*2 = .

4) Если *q* = - 1, *p* = - , *а* > 0,

то *х*1 = *m*, *х*2 = - . (Корни разных знаков).

Пример. *х*2 - *х* - 1= 0.

*p* = - = - = - .

*х*1= 3, *х*2 = - .

Ответ. *х*1 = 3, *х*2 = - .

**VI способ. Связь между коэффициентами. (Б)**

1) Если *q* = *m*, *p* = , *a* > 0,

то *х*1 = - *m*2*,* *х*2 = -. (Оба корня отрицательны).

Пример. *х*2 + *х* + 5 = 0.

*p* = = = ,

*х*1= - 25, *х*2 = - .

Ответ. *х*1= - 25, *х*2 = - .

2) Если *q* = *m*, *p* = - , *a* > 0,

то *х*1 = *m*2*,* *х*2 = . (Оба корня положительные).

Пример. *х*2 - *х* + 5 = 0.

*p* = - = - = - ,

*х*1= 25, *х*2 = .

Ответ. *х*1= 25, *х*2 = .

3) Если *q* = - *m*, *p* = , *a* > 0,

то *х*1 = - *m*2*,* *х*2 = . (Корни разных знаков).

Пример. *х*2 + *х* - 5 = 0.

*p* = = = ,

*х*1= - 25, *х*2 = .

Ответ. *х*1= - 25, *х*2 = .

4) Если *q* = - *m*, *p* = - , *a* > 0,

то *х*1 = *m*2*,* *х*2 = - . (Корни разных знаков).

Пример. *х*2 - *х* - 5 = 0.

*p* = - = - = - ,

*х*1= 25, *х*2 = - .

Ответ. *х*1= 25, *х*2 = - .

**VII способ. Использование формулы квадрата суммы (разности):**

**(*a* ± *b*)2 = *a*2 ± 2*ab* + *b*2.**

Пример. 1) *х*2*+* 10*х +* 25 *=* 0.

(*х* + 5)2 = 0, *х* + 5 = 0, *х* = -5.

Ответ. *х* = -5

**VIII способ. Метод выделения полного квадрата.**

Пример. 1) *х*2*-* 6*х -* 7 *=* 0.

*х*2 - 2∙*х*∙3 + 9 - 9 - 7 = 0, (*х* - 3)2 = 16.

*х* - 3 = 4, или *х* - 3 = - 4.

*х*1 = 7, *х*2 = -1.

Ответ. *х*1 = 7, *х*2 = - 1.

**IX способ. Разложение левой части уравнения на множители способом группировки.**

а) Если *q* < 0, то модуль *p* представляют в виде разности.

Пример. 1) *х*2 *+* 10*х -* 24 *=* 0. 2) *х*2*-* 6*х -* 7 *=* 0.

*х*2 + (12 – 2)*х -* 24 = 0, *х*2 - (7 - 1) *х* - 7 = 0,

*х*2 + 12*х* - 2*х* - 24 = 0, *х*2 - 7*х* + *х* - 7 = 0,

(*х*2 + 12*х*) - (2*х* + 24) = 0, (*х*2 - 7*х*) + (*х* - 7) = 0,

*х* (*х* + 12) - 2(*х* + 12) = 0, *х* (*х* - 7) + (*х* - 7) = 0,

(*х* + 12)(*х* - 2) = 0, (*х* - 7)(*х* + 1) = 0 ,

*х* + 12 = 0 или *х* - 2 = 0. *х* - 7 = 0 или *х* + 1 = 0.

*х*1 = - 12, *х*2 = 2.*х*1 = 7, *х*2 = -1.

Ответ. *х*1 = - 12, *х*2 = 2.Ответ.*х*1 = 7, *х*2 = -1.

б) Если q > 0, то модуль *p* представляют в виде суммы.

Пример. 1) *х*2*+* 10*х +* 24 *=* 0. 2) *х*2 *-* 6*х +* 5*=* 0.

*х*2  + (6 + 4)*х* + 24 = 0, *х*2 - (5 + 1)*х* + 5 =0,

*х*2  + 6*х* + 4*х* + 24 = 0, *х*2 - 5*х* - *х* + 5 = 0,

(*х*2  + 6*х*) + (4*х* + 24) = 0, (*х*2 - 5*х*) - (*х* - 5) = 0,

*х* (*х* + 6) + 4(*х* + 6) = 0, *х* (*х* - 5) - (*х* - 5) = 0,

(*х* + 6)(*х* + 4) = 0, (*х* - 5)(*х* - 1) = 0 ,

*х*+ 6 = 0 или *х* + 4 = 0, *х* - 5 = 0 или *х* - 1 = 0,

*х*1 = - 6, *х*2 = - 4. *х*1 = 5, *х*2 = 1.

Ответ. *х*1 = - 6, *х*2 = - 4.Ответ.*х*1 = 5, *х*2 = 1.

**X способ. Метод переброски.**

Так называемый метод «переброски» позволяет сводить решение неприведённых и непреобразуемых к виду приведённых с целыми коэффициентами путём их деления на старший коэффициент уравнений к решению приведённых с целыми коэффициентами. Он заключается в следующем:

1) умножаем обе части уравнения на *а*:

*ах*2*+ bх + с =* 0 | ∙*а*

(*ах*)2*+ bах + ас =* 0.

2) вводим новую переменную *y = ax*, получаем уравнение:  *у*2 *+ bу + ас* = 0.

Происходит «переброска» старшего коэффициента *а* к свободному члену *с*.

3) решая приведенное уравнение, находим корни *у*1 и *у*2.

4) возвращаясь к переменной *х*, имеем: *x*1 = , *x*2 = .

Пример. 2*х*2 *-* 9*х +* 7 *=* 0.

«Перебросим» коэффициент 2 к свободному члену:

*у*2 - 9*у* + 14 = 0.

Согласно теореме, обратной теореме Виета *у*1= 2 и *у*2 = 7.

Следовательно: *x*1 = = 1, *x*2 = = 3,5.

Ответ. *x*1 = 1, *x*2 = 3,5.

**XI способ. Использование следствия****теоремы Безу.**

Свободный член многочлена с целыми коэффициентами делится на любой целый корень многочлена.

Пример. *х*2 *-* 6*х +* 8 *=* 0.

Делители числа 8: ±1, ±2, ±4, ±8.

*P*2 (1) = 1 - 6 + 8 = 3 ≠ 0.

*P*2 (-1) = 1 + 6 + 8 = 15 ≠ 0.

*P*2 (2) = 4 -12 + 8 = 0, *x* = 2 корень уравнения.

Понизим степень уравнения, разделив трехчлен *х*2 *-* 6*х +* 8 на двучлен *x* – 2.

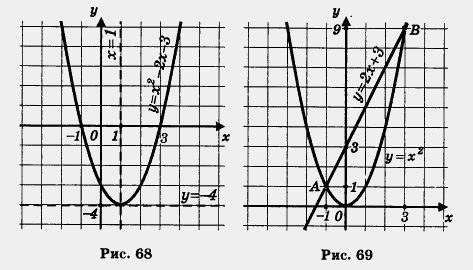
|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *x*2 - 6*x* + 8  -  *x*2 - 2*x* | | | *x* - 2 |
| *x* - 4 |
| 0 | - 4*x* + 8  -  - 4*x* + 8 | |
|  | 0 |

Частное *x* – 4 приравняем к нулю.

*x* – 4 = 0, откуда *x* = 4.

Ответ. *x*1 = 2, *x*2 = 4.

**XII способ. Графическое решение.**



**Iспособ.** Строим график функции *у* = *х*2 + *pх* + *q* и находим абсциссы точек его пересечения с осью О*х*. Пример. *х*2 *-* 2*х -* 3 *=* 0.

Строим график функции *у* = *х*2 - 2*х* - 3.

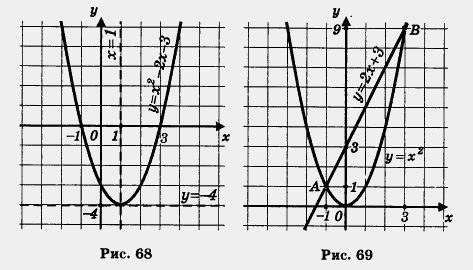
1) *х*0 = - = - = 1, *у*0 =*y*(*x*0) = *y*(1) = 12 - 2∙1- 3 = - 4.

Значит, вершиной параболы служит точка (1; -4), а осью параболы – прямая *х* = 1.

2) Возьмем на оси О*х* две точки, симметричные относительно оси параболы, например *х* = - 1 и *х* = 3. Имеем: *у*(-1) = *у*(3) = 0. Построим на координатной плоскости точки (-1;0) и (3;0). Через точки (-1;0),

(1; - 4), (3;0) проводим параболу.

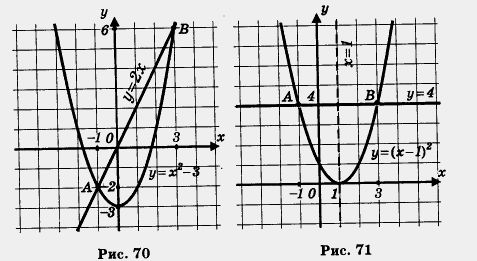
Корнями уравнения *х*2 - 2*х* - 3 = 0 являются абсциссы точек пересечения параболы с осью О*х*; значит, корни уравнения: *х*1= - 1, *х*2 = 3.



**IIспособ.** Преобразуем уравнение к ввиду *х*2 = - *pх* - *q*, строим параболу *у* = *х*2 и прямую *у* = - *pх* - *q*, находим точки их пересечения (корнями служат абсциссы точек пересечения, если, разумеется, таковые имеются).

Пример. *х*2 *-* 2*х -* 3 *=* 0.

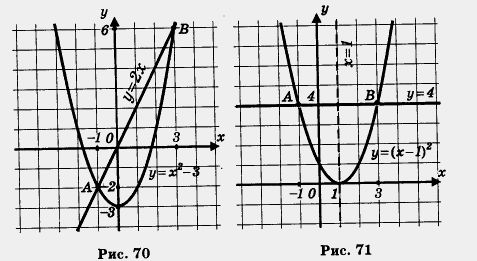
Преобразуем уравнение к виду *х*2 = 2*х* + 3. Построим в одной системе координат графики функций *у* = *х*2  и *у* = 2*х* + 3. Они пересекаются в двух точках: А(-1;1) и В(3;9). Корнями уравнения служат абсциссы точек А и В, значит, *х*1= - 1, *х*2 = 3.



**III способ.** Преобразуем уравнение к ввиду *х*2 + *q* = - *pх*, строим параболу *у* = *х*2 + *q*  и прямую *у* = - *pх* (она проходит через начало координат); находим точки их пересечения.

Пример. *х*2 *-* 2*х -* 3 *=* 0.

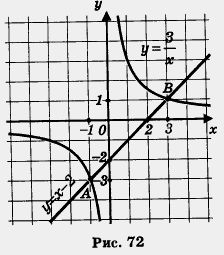
Преобразуем уравнение к виду *х*2 - 3 = 2*х.* Построим в одной системе координат графики функций *у* = *х*2 - 3 и *у* = 2*х.* Они пересекаются в двух точках: А (-1;-2) и В(3;6). Корнями уравнения служат абсциссы точек А и В, поэтому, *х*1= - 1, *х*2 = 3.

 **IVспособ.**  Применяя метод выделения полного квадрата, преобразуем уравнение к виду (*х* + *n*)2 + *m* = 0 и далее ( *х* + *n*)2 = - *m* . Строим параболу *у* = ( *х* + *n*)2 и прямую *у* = - *m,* параллельную оси Ох; находим точки пересечения параболы и прямой.

Пример. *х*2 *-* 2*х -* 3 *=* 0.

Преобразуем уравнение к виду *х*2 - 2*х* + 1- 4 = 0, *х*2 - 2*х* + 1= 4, (*х* -1)2 = 4.

Построим в одной системе координат графики функций *у* = (*х* - 1)2 и *у* = 4. Они пересекаются в двух точках: А (-1;4) и В (3;4). Корнями уравнения служат абсциссы точек А и В, поэтому, *х*1= - 1, *х*2 = 3.

**Vспособ.** Преобразуем уравнение к виду + + = 0,т.е. *х* + *р* + = 0 и далее = -*x* - *p*.

Строим гиперболу *у* = ( это гипербола при условии, что *q* ≠ 0) и прямую *у = - х - р*; находим точки их пересечения..

Пример. *х*2 *-* 2*х -* 3 *=* 0.

Разделив почленно обе части уравнения на *х*, получим: *х* - 2 - = 0, *х* - 2 = . Построим в одной системе координат гиперболу *у* = и прямую *у* = *х* - 2. Они пересекаются в двух точках:

А(-1;-3) и В (3;1). Корнями уравнения являются абсциссы точек А и В, следовательно, *х*1= - 1, *х*2 = 3.

Замечание. При решении уравнения графическим способом необходимо сделать проверку найденных корней.

**XIII способ. Геометрический способ.**

Пример. 1) *х*2 + 10*х -* 39 *=* 0.

Представим уравнение в виде: *х*2 + 10*х =* 39. Строим квадрат площадью *х*2. На его сторонах достраиваем четыре равных прямоугольника общей площадью 10*х* (10*х* = 4∙*х*).

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | *x* |  |
| *x* | *x*2 | *x* |
|  | *x* |  |

Площадь каждого прямоугольника *х*, а стороны: *х* и . Теперь дополняем полученную фигуру до квадрата четырьмя равными квадратами. Площадь каждого из них равна ,а площадь всех четырех: 4∙ = 25. Итак, площадь составленного из девяти фигур квадрата (*х*+5)2 = 39 + 25,т.е. (*х* + 5)2 = 64.

Сторона этого квадрата *х* + 5 = 8, откуда *х*1 = 3.

Другой корень будет *х* + 5 = - 8, т.е**.** *х*2 = - 13.

Ответ. *х*1 = 3,*х*2 = - 13.

Пример. 2) *х*2 - 6*х -* 16 *=* 0.

Представим уравнение в виде: *х*2 - 6*х =* 16.

Строим квадрат со стороной *х*, его площадь S = *х*2. Внутри его строим квадрат площадью

|  |  |
| --- | --- |
| S=(x-3)2 | S S=3∙(x-3) |
| S= 3∙(x – 3) | S = 9 |

S= (*х* - 3)2. Кроме полученного квадрата, внутри большого квадрата находятся квадрат с площадью S = 9 и два прямоугольника с площадями S = 3(*х -* 3) = 3*х* - 9. Следовательно, площадь данного квадрата равна сумме площадей внутренних фигур:

(*х* - 3)2 + 2∙(3*х* - 9) + 9 = *х*2,

(*х* - 3)2 + 6*х* - 18 + 9 = *х*2,

(*х* - 3)2 + 6*х* - 9 = *х*2,

(*х* - 3)2 = *х*2- 6*х* + 9, но *х*2- 6*х* = 16, следовательно, (*х* - 3)2 = 16 + 9,

(*х* - 3)2 = 25, откуда сторона квадрата

*х* - 3 = 5, т.е. *х*1 = 8.

Другой корень будет *х* - 3 = - 5, т.е**.** *х*2 = - 2.

Ответ. *х*1 = 8, *х*2 = - 2.

**XIV способ. Решение квадратных уравнений с применением циркуля и линейки.**

Корни квадратного уравнения *х*2+ *pх* + *q* = 0 можно рассматривать как абсциссы точек пересечения окружности с центром Q, проходящей через точку

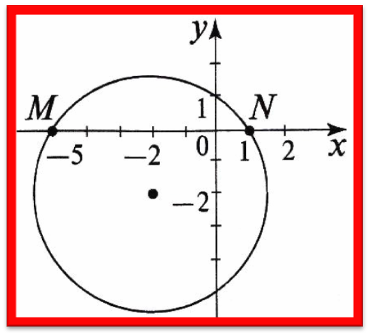
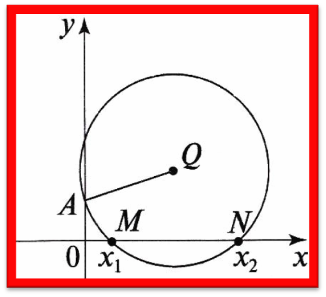
А (0;1), и оси О*х*.

Решение уравнения сводится к построению на координатной плоскости окружности с центром Q и радиусом QA ( для этого и понадобятся инструменты) и определению абсцисс точек пересечения окружности с осью Ох. Возможны три случая:

1) Если QA > , то окружность пересекает ось О*х* в двух точках M(*х*1;0) и N(*х*2;0), уравнение имеет корни *х*1 , *х*2.

Пример. *х*2 + 4*х -* 5 *=* 0.

х0 = = = - 2; у0 = = = - 2.



Корни уравнения *х*1 = 1, *х*2 = - 5.

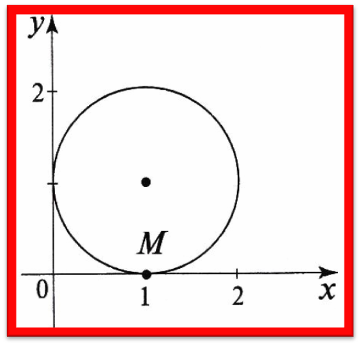
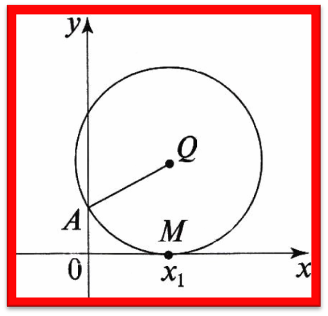
Ответ. *х*1 = 1, *х*2 = - 5.

2) Если QA = , то окружность касается оси О*х* в точке M(*х*;0) ,

уравнение имеет корень *х*.

Пример. *х*2 - 2*х +* 1*=* 0.

х0 = - = - = 1; у0 = = = 1.



Корень *х* = 1.

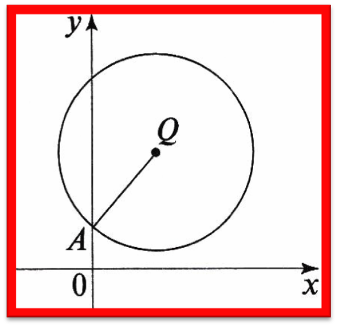
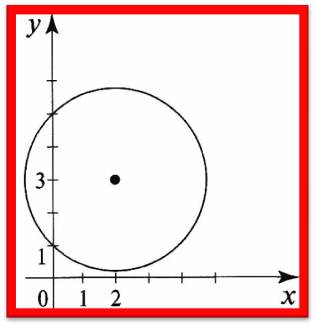
Ответ. *х* = 1.

3) Если QA < , то окружность не имеет общих точек с осью О*х,*

уравнение не имеет корней.

Пример. *х*2 - 4*х +* 5 *=* 0.

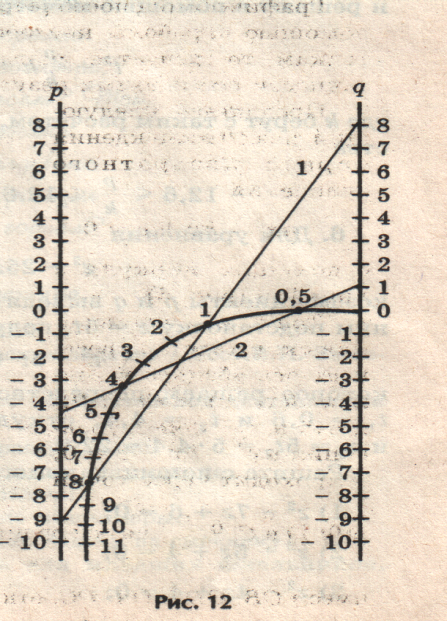
х0 = - = - = 2; у0 = = = 3.

Ответ. Корней нет.

**XV способ. Решение квадратных уравнений с помощью номограммы.**

Номограмма для решения уравнения *z* 2+ *pz* + *q* = 0.



1) Значение q > 0, p < 0.

( Оба корня положительны, если они существуют)

Пример. 1) *z*2 – 9*z* + 8 = 0.

Номограмма дает корни

*z*1 = 8, *z*2 = 1(рис.1).

Ответ. *z*1 = 8, *z*2 = 1.

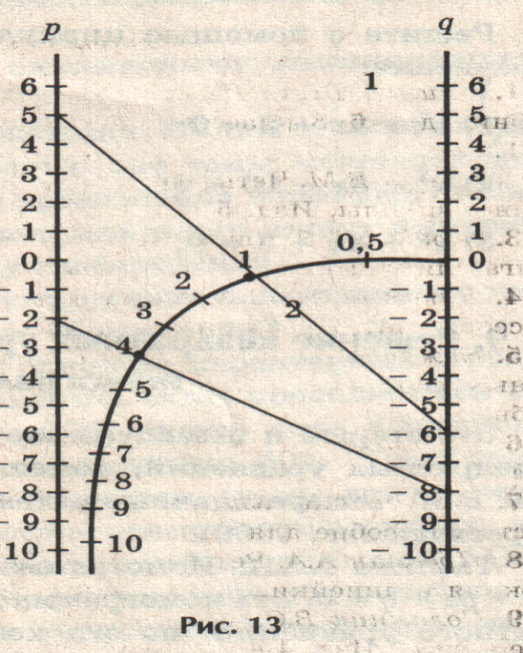
2) *z*2 - 4,5*z* + 2 = 0.

Номограмма дает корни

*z*1 = 4, *z*2 = 0,5 (рис.1)

Ответ. *z*1 = 8, *z*2 = 1.

рис.1

 2) Значение q < 0.

(Корни разных знаков)

Пример. 1) *z*2 + 5*z* - 6 = 0.

Номограмма даетположительный корень *z*1 = 1,

а отрицательный корень находим, вычитая

положительный корень из -*p,*

т.е*. z*2 = *- p* -1 = -5 - 1 = -6 (рис.2).

Ответ. *z*1 = 1, *z*2 = - 6.

2) *z*2 - 2*z* - 8 = 0.

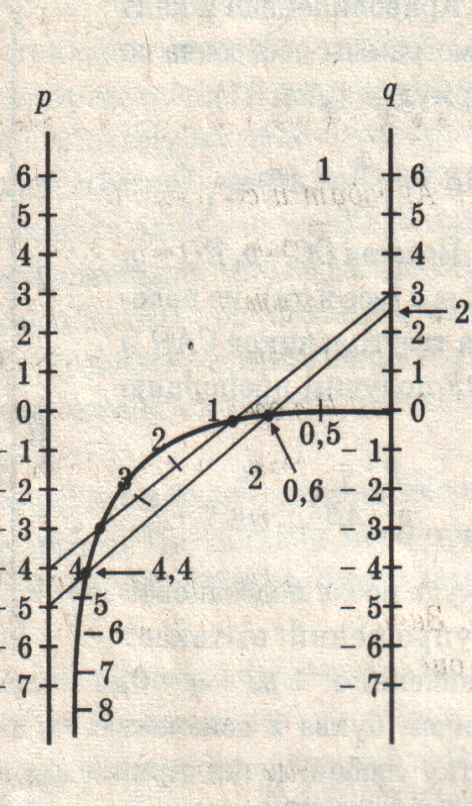
Номограмма даетположительный корень *z*1 = 4,

отрицательный равен *z*2 = *- p* - *z*1,

*z*2 = 2 -4 = - 2. (рис.2).

Ответ. *z*1 = 4, *z*2 = - 2.

рис.2



3) значения q > 0, p > 0.

( Оба корня отрицательны, если они существуют).

Пример.1)  *z*2 + 4*z* + 3= 0.

Оба корня уравнения отрицательные числа,

берем *z = - t* и находим по номограмме два положительных корня *t*1 и *t*2 уравнения

*t*2 -4*t*+ 3 = 0, это *t*1 = 1 и *t*2 = 3,

а затем *z***1** = - *t*1 **= -**1 и *z***2** = *- t*2 = **-** 3 (рис.3).

Ответ. *z*1 = - 1, *z*2 = - 3.

Замечание.

Если коэффициенты *p* и *q* выходят за пределы

шкалы, то выполняют подстановку *z = kt*

и решают с помощью номограммы

уравнение *t*2 + *t* + = 0, где *k* берут с таким расчетом,

чтобы имели место неравенства :

-12,6 ≤ ≤ 12,6; 12,6 ≤ ≤ 12,6; рис.3

2) Для уравнения *z*2 - 25*z* + 66 = 0 коэффициенты *p* и *q*  выходят за пределы шкалы, выполним подстановку *z* = 5*t,* получим уравнение

*t* 2 - 5*t* + 2,64 = 0, которое решаем посредством номограммы и получим

*t*1 = 0,6 и *t*2 = 4,4( рис.3); откуда*z*1 = 5∙*t*1 = 5 ∙ 0,6 = 3 и *z*2 = 5∙*t*2 = 5 ∙ 4,4 = 22.

Ответ. *z*1 = 3, *z*2 = 22.

Список использованной литературы.

1.Брадис В.М. Четырехзначные математические таблицы для средней школы. – М., Просвещение, 1990.с. 83.

2. Журнал « Математика в школе», № 6, 2008г.

3.Мордкович А.Г.Алгебра 8 класс. М., Мнемозина, 2010.

4.Кружепов А.К., Рубанов А.Т. Задачник по алгебре и элементарным функциям. Учебное пособие для средних специальных учебных заведений. - М., высшая школа, 1969.

5. Окунев А.К. Квадратичные функции, уравнения и неравенства. Пособие для учителя. - М., Просвещение, 1972.

6. Пресман А.А. Решение квадратного уравнения с помощью циркуля и линейки. - М., Квант, № 4/72. С. 34.

Интернет- ресурсы:

http://www.zavuch.info/methodlib/358/75891/

<http://do.gendocs.ru/docs/index-1919.html>

<http://ru.wikipedia.org/wiki>

<http://detishka.ru/current.php?id=4209>

http://www.referat-web.ru/referat61866.html

http://referat.antiarm.ru/ref-119893.shtml

<http://rpp.nashaucheba.ru/docs/index-1512.html>