Сообщение

на РМО учителей математики

на тему:

«Преподавание элементов теории вероятности и статистики в 5-9 классах. Система подготовки

учащихся к итоговой аттестации

по данной теме».

Подготовила

учитель математики

Сапа Т.В.

2015

В.И. Левин писал: «…Необходимую для… деятельности статистическую культуру надо воспи­тывать с ранних лет. Не случайно в развитых странах этому уделяется большое внимание: с элементами теории вероятностей и статистики учащиеся знакомятся уже с первых школьных лет и на протяже­нии всего обучения усваивают вероятностно-статистические подходы к анализу распространенных ситуаций, встречающихся в повседневной жизни»

На момент введения нового предмета среди учителей математики не было достаточного количества специалистов, свободно владеющих содержанием курса теории вероятностей и математической статистики, решающих вероятностные задачи на том же уровне, что и задачи по алгебре. Существование нескольких вариантов учебников не способно заменить недостающих методик изучения курса. Проблема усугубляется тем, что подавляющее большинство учителей математики не изучало методики преподавания теории вероятностей и математической статистики в педагогических высших учебных заведениях. Поэтому каждый педагог должен самостоятельно создавать эту методику методом проб и ошибок при необходимости получения однозначно положительного результата. Преподавание предметов, составляющих традиционный курс математики в средней общеобразовательной школе, базируется на ряде элементарных навыков, формирующих фундамент математического образования школьников, таких как решение уравнений, вычисления, решение задач на движение и ряда других. При этом при решении такого рода задач от учащихся, в первую очередь, требуется правильное определение и применение правил.

Преподавание курса «Теория вероятностей и статистика» требует от учителя кардинального изменения стиля своей работы. Оно подразумевает организацию дискуссий на уроке, интенсивную устную работу, а также расширение собственного кругозора в областях других наук, таких, как биология, география, история, литература и многих других, в дополнение к сложившимся методам и подходам к обучению. До определенной степени, подходы к изучению элементов теории вероятностей могут быть заимствованы из курса геометрии, где, также, часто необходимо решить несколько задач, абсолютно непохожих друг на друга. При этом задачи, стоящие в учебнике рядом, не аналогичны, и решение одной из задач не означает, что будет с легкостью решена следующая. Поэтому главным условием роста профессионализма учителя в области преподавания теории вероятностей и математической статистики является изменение технологии учительской деятельности при преподавании этого курса. Это положение является чрезвычайно актуальным для учителей математики, проработавших десятки лет в школе.

Процесс внедрения элементов теории вероятностей и математической статистики в обязательный курс школьной математики оказался делом специфическим и трудным. Существует тезис о том, что для усвоения начал теории ве­роятностей необходим предварительный запас идей, представлений, привы­чек, коренным образом отличающихся от тех, которые развиваются у школь­ников при традиционном обучении в рамках ознакомления с закономерно­стями строго детерминированных явлений. Изучение курса должно начинаться с изучения основ комбинаторики, причем параллельно должна изучаться теория вероятностей, так как комбинаторика используется при подсчете вероятностей. Комбинаторика – раздел математики, который изучает различные комбинации и перестановки предметов. Начинать обучения комбинаторике целесообразно с решения простых комбинаторных задач методом перебора. Начинать изучение комбинаторики следует с введения простейших формул. Перед тем как дать ученикам формулу следует поставить какую-либо проблемную задачу, например, перед тем как дать учащимся формулу перестановок можно предложить решить следующую задачу. Сколько чисел можно составить из цифр 1, 2, 3? Решая данную задачу систематическим перебором, можно определить, что количество таких чисел будет равно шести.

После того как учащиеся научаться составлять наборы из элементов заданного множества по заданному свойству, появляется следующая задача – подсчет количества возможных наборов. Такие задачи решаются с помощью применения принципа умножения. Хорошей наглядной иллюстрацией правила умножения является дерево возможных вариантов. Данная тема хорошо изложена в учебниках 5 и 7 классах.

Далее следует изменить условие задачи, увеличив количество цифр до 10. И сказать, что решать данную задачу перебором нерационально, так как на это уйдет слишком много времени. Для решения задач такого вида используется следующая теорема:

Пусть имеется, *k* групп элементов, причем каждая группа элементов содержит определенное количество элементов, например, 1-ая содержит *n1*элемент, 2-ая группа – *n2* элементов, тогда *i*-я группа содержит *ni* элементов. Тогда общее число *N* способов, которыми можно произвести такой выбор, равняется . Учитель должен обратить внимание учащихся на то, что правило умножения подсчитывает упорядоченные наборы, то есть порядок в них важен.

Данную формулу можно применить к решению следующей задачи. Сколько существует пятизначных натуральных чисел. Решение.

Как известно всего существует 10 цифр. Представим пятизначное число, где на первой позиции могут стоять все цифры кроме 0, так как если там будет стоять 0, точисло будет четырехзначным. На второй позиции может находиться любая из 10 цифр. Аналогично на оставшихся трех позициях могут находиться любая из 10 цифр. Таким образом, имеется 5 групп элементов. При этом первая группа содержит 9 элементов, а оставшиеся 4 группы содержат по 10 элементов. Тогда, используя формулу, может быть определено количество пятизначных чисел: *N*=9.10.10.10.10=90000.Нужно дать несколько упражнений на вычисление выражений с факториалами, чтобы учащиеся лучше овладели навыками работы с ними.

Переходим к теории вероятностей. Одной из ключевых задач при этом задач является формирование понятия случайного события. Поэтому формирование представления о данном понятии должно начинаться с рассмотрения простейших вероятностных моделей. Сформировать данное понятие удобно на различных примерах из жизни. Например, мы не можем точно сказать при подбрасывании, монеты упадет ли она вверх гербом или цифрой. Тогда случайным событием будет называться любое событие, связанное со случайным экспериментом. Все эти понятия нужно вводить, опираясь на понятные примеры из жизни. После определения этих понятий следует привести пример. Например, при подбрасывании кубика, достоверное событие – падение кубика на грань, невозможное событие – кубик станет на ребро, случайное событие – выпадение какой либо грани. Далее опираясь на введенные определения и на жизненный опыт учащихся необходимо рассмотреть задачи на определение типа события.

Следует предложить задания на проведение серии экспериментов с целью оценить вероятности возможных исходов эксперимента. Примером такого задания может служить подбрасывание монеты. Это является простым и наглядным испытанием. Практика человека говорит о том, что при большом числе бросаний примерно в 50% испытаний выпадет «орёл», а в 50% – «решка».

Пусть испытание имеет *n* возможных исходов, то есть событий, которые могут появиться в результате данного испытания. Допустим теперь что при *n* равновозможных исходах интерес представляет событие *А*, которое появляется только при *m* исходах и не появляется при остальных исходах. Принято говорить, что в данном испытании имеется *n* случаев, из которых *m* благоприятствуют появлению события *А*. В таком случае вероятность можно вычислить, как отношение числа случаев благоприятствующих появлению события *А* (то есть *m*), к общему числу всех исходов *n*:



Одной из традиционных сложностей математических дисциплин является анализ текста условия задачи. Это особенно проявляется в курсе преподавания теории вероятностей и математической статистики, где все задачи являются сюжетными. В отличие от курса алгебры, где в контрольных работах, как правило, всегда присутствуют задачи на вычисления, решение уравнений и неравенств, контрольная работа по теории вероятностей содержит исключительно текстовые задачи. Даже несложные вероятностные задачи сводятся к одному или двум комбинаторным приемам, решение которых учащиеся должны освоить максимум за три урока. При этом необходимо иметь в виду, что сюжетные задачи по теории вероятности, комбинаторике и статистике гораздо разнообразнее, чем алгебраические. Помимо «классических» задач на бросание кубиков, монет, вытягивание наугад разноцветных карточек, существует огромное число прочих сюжетов. И для ученика часто очень трудно решая «новую» задачу, понять, что это «старая», только что решенная задача, но в «новой упаковке». Увидеть аналогию в задачах на вытаскивание из мешка разноцветных шариков или черных и белых пешек способны только достаточно подготовленные ученики.

На уроке математики в основной школе, в пятых-девятых классах, проводимых по привычной схеме и на традиционном материале, у ученика зачастую создается ощущение непроницаемой стены между изучаемыми объектами и окружающим миром. Именно вероятностно-статистическая линия, или, как ее стали называть в последнее время, - стохастическая линия, изучение которой невозможно без опоры на процессы, наблюдаемые в окружающем мире, на реальный жизненный опыт ребенка, способна содействовать возвращению интереса к самому предмету «математика», пропаганде его значимости и универсальности. Учащиеся видят непосредственную связь математики с окружающей действительностью, реальной жизнью.

Опираясь на государственные стандарты образования, анализ учебной и методической литературы можно выделены следующие моменты содержания и последовательности изложения материала.

**Содержание материала, обязательно изучаемого по данной теме в курсе средней общеобразовательной школы, должно включать:**

понятие и примеры случайных событий;

понятия частоты события и вероятности;

равновозможные события и подсчет их вероятности;

представление о геометрической вероятности;

представление данных в виде таблиц, диаграмм, графиков;

средние результаты измерений;

понятие о статистическом выводе на основе выборки.

понятие о комбинаторике и вероятности.

Согласно требованиям стандарта по математике после изучения данной темы **учащиеся должны уметь:**

находить вероятности случайных событий в простейших случаях;

находить частоту событий, используя собственные наблюдения и готовые статистические данные;

вычислять средние значения результатов измерений;

сравнивать шансы наступления случайных событий, оценки вероятности случайного события в практических ситуациях, сопоставление модели с реальной ситуацией;

понимать статистические рассуждения;

анализировать реальные числовые данные, представленные в виде диаграмм, графиков, таблиц.

решать простейшие комбинаторные задачи методом перебора, а также с использованием известных формул, треугольника Паскаля, вычислять коэффициенты бинома Ньютона по формуле и с использованием треугольника Паскаля;

вычислять, в простейших случаях, вероятности событий на основе подсчета числа исходов.

Учебник для 5 класса содержит достаточное количество прикладных и математических задач на составление комбинаций из нескольких элементов; числовых ребусов; задач на перебор элементов заданного множества, на выявление общего признака некоторого множества чисел, фигур. В учебнике 6 класса комбинаторных задач значительно меньше. Как в 5 классе, так и в 6 классе нет комбинаторно-лингвистических задач; задач на разрезание, разделение целого на определённые части; задач на составление «из частей» целого объекта с заданными свойствами.

***Методика реализации стохастической линии в 5 классе.***

Основными задачами на этом этапе являются:

Выработка умений и навыков работать с таблицей, извлекать из таблиц информацию и анализировать ее.

Выработка умений заполнять в таблице пустые графы (строки, столбцы).

Формирование умений читать диаграммы, извлекать необходимую информацию.

Формирование умений и навыков в составлении, выборе и упорядочении комбинаторных наборов.

Формирование умений подсчета комбинаторных объектов, методом непосредственного перебора.

Показать, что такое дерево возможных вариантов, его использование как один из методов решения КЗ.

Формирование представления о том, какое событие является достоверным, какое невозможным, и какое событие мы можем назвать случайным.

Формирование у учащихся понимания степени случайности в различных событиях и явлениях и использование для ее оценки адекватных вероятностных терминов («достоверно», «маловероятно» и т.д.).

В 5 классе предлагаются простейшие комбинаторные задачи, решая которые должна вестись либо работа по перебору возможных вариантов, либо по упорядочиванию, либо их объединение - перебор и упорядочивание вместе. Очень важным элементом стохастики является анализ данных и начальным этапом анализа данных является работа с таблицами и диаграммами, которую необходимо начинать в 5 классе.

Начинать рассмотрение таблиц нужно с рассмотрения уже известных учащимся таблиц, в частности: страница классного журнала, расписание уроков и т.п. С такими таблицами учащиеся чаще всего уже уметь работать и извлекать из нее всю необходимую им информацию.

Рассмотрим расписание уроков. Учащиеся уже наверняка умеют им пользоваться, извлекать из него необходимую информацию. Из расписания можно узнать, в каком кабинете будет проходить нужный урок, определить количество уроков в день. Рассмотрим такую ситуацию: Оля – учится в 5-А классе, а ее подружка из соседнего дома в 5-Б классе, нужно узнать, по каким дням они могут вместе возвращаться домой. Имея перед собой расписание, можно быстро определить такие дни.

Таблица является одним из способов представления информации, но более наглядным является графическое представление данных. Это различные диаграммы: линейные, столбчатые и круговые.

***Методика реализации стохастической линии в 6 классе.***

Основные задачи:

Отработка умений и навыков в составлении и подсчете числа комбинаторных наборов.

Показать учащимся как можно решать комбинаторные задачи с помощью рассуждений. Познакомить учащихся с правилом умножения при подсчете числа возможных вариантов, сформировать умения по его применению.

Познакомить с правилом суммы

Формирование умений строить дерево возможных вариантов.

Формирование умений сравнения вероятностей разных событий (более вероятно, менее вероятно)

Познакомить с понятиями статистической частоты и вероятности, с методом оценки вероятности через статистические испытания.

В 6 классе в теме комбинаторика продолжаем рассматривать комбинаторные задачи, на первый план выходят задачи по подсчету числа возможных вариантов.

Решая задачи, иногда очень удобно использовать кодирование, то есть обращение к лексико-графическому подходу.

Рассмотрим следующую задачу: *При встрече 8 приятелей обменялись рукопожатиями. Сколько всего было сделано рукопожатий?*

Данную задачу можно решать методом непосредственного перебора, и уже в самом начале заметим, что довольно сложно перебирать все возможные варианты и не запутаться, не говоря уже о записи решения этой задачи. Но, введя определенные обозначения - кодирование, решение будет очень легко представить

Каждому приятелю даем номер от 1 до 8, а рукопожатия закодируем следующим образом: например число 24 означает что 2-ой приятель пожал руку 4-му. При чем число 35 и 53 означают одно и тоже рукопожатие, и брать будем меньшее из них. Коды рукопожатий мы можем оформить следующей таблицей:

12, 13, 14, 15, 16, 17, 18,

23, 24, 25, 26, 27, 28,

34, 35, 36, 37, 38,

45, 46, 47, 48,

56, 57, 58,

67, 68,

78.

Таким образом, у нас получилось 1+2+3+4+5+6+7=28 рукопожатий.

После того как учащиеся научились составлять всевозможные наборы, на первый план выдвигается задача подсчета числа возможных вариантов.

***Методика реализации стохастической линии в 7 классе.***

Основные задачи:

Введение понятия перестановки и вывод формулы числа перестановок.

Познакомить учащихся с основными статистическими характеристиками: среднее арифметическое, мода, размах.

Умение находить основные статистические характеристики для конкретного ряда данных, а также из таблиц и диаграмм.

Выработка умений находить основные статистические характеристики в несложных случаях, учащиеся должны понимать их практический смысл в конкретных ситуациях.

В 7 классе мы вводим первые статистические характеристики. Можно использовать ряд чисел, составленный из оценок полученных за четверть. Для школьников очень актуален вопрос о том, какая оценка выйдет у них за четверть. Каждому учащемуся заранее можно выписать его оценки за четверть. Учитель выписывает на доске некоторый ряд оценок, и на его примере вводит понятия среднего арифметического и моды ряда чисел. Дети для закрепления этих понятий, находят эти статистические характеристики каждый для своего ряда.

Рассмотрим задачу, которая позволяет увидеть практическую значимость данных статистических характеристик.

*В отделе мужской обуви универмага в течение дня производился учет размеров купленной обуви. Были получены следующие результаты: 44, 40, 43, 39, 42, 42, 45, 41, 43, 43, 41, 42, 46, 40, 41, 42, 39, 42, 45, 42, 43, 44, 44, 41, 42. Представьте эти результаты в виде таблицы:*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *Размер* | *Количество купленной обуви* | *Итого* |
| *39* |  |  |
| *40* |  |  |
| *41* |  |  |
| *…* |  |  |

*Какой размер обуви наиболее распространен?*

Исходя из вопроса, делаем вывод, что в данной задаче нам требуется найти моду ряда размеров, то есть узнать, какой размер пользуется большим спросом. Таблица позволяет быстро это сделать.

***Методика реализации стохастической линии в 8 классе.***

Основные задачи:

По статистическим данным, представленным в таблице необходимо уметь находить основные статистические характеристики.

Познакомить с еще одной статистической характеристикой – медианой ряда, формирование умений по ее нахождению

Рассмотрение равновероятных событий, и введение классического определения вероятности.

Представление о геометрической вероятности

В 7 классе мы уже рассматривали примеры, в которых основные статистические характеристики находили по таблицам.

В 8 классе вводится новая статистическая характеристика – медиана. Введем это понятие на примере: в таблице №1 показан расход электроэнергии в январе жильцами девяти квартир.

Таблица №1.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Номер квартиры | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| Расход электроэнергии  в кВт/ч. | 85 | 64 | 78 | 93 | 72 | 91 | 72 | 75 | 82 |

Составим из полученных данных упорядоченный ряд:

64, 72, 75, 78, 82, 85, 91, 93.

В нем девять чисел. В середине ряда расположено число 78: слева от него записаны четыре числа и справа тоже четыре. Говорят, что число 78 является *медианой*.

Пусть к данным о расходе электроэнергии добавились данные для десятой квартиры: 10 квартира – 83 кВт/ч.

Получим новый упорядоченный ряд данных:

64, 72, 75, 78, 82, 83, 85, 91, 93. Этот ряд состоит из четного числа цифр и имеет два числа расположенных в середине – 78 и 82, тогда медианой этого ряда будет среднее арифметическое этих двух чисел – (78+82):2 = 80

Таким образом, медианой ряда, состоящего из нечетного количества чисел, называется число данного ряда, которое окажется посередине, если его упорядочить. Медианой ряда, состоящего из четного количества чисел, называется среднее арифметическое двух стоящих посередине чисел этого ряда.

В предыдущих классах мы рассмотрели, как можно оценивать вероятность, исходя их статистических данных. Существуют и другие способы вычисления вероятностей. Если все исходы случайного эксперимента равновероятны, тогда вероятности каждого такого исхода можно подсчитать, не проводя экспериментов. Примером является подбрасывание монеты. Этот эксперимент имеет два исхода – «орел» и «решка», и они равновероятны. Тогда можно сказать, что вероятность каждого из них равна ½, почти такой же результат получен и при проведении экспериментов. Аналогично для «правильного» кубика, все шесть исходов равновозможны, тогда вероятность каждого из них равна 1/6.

*Какова вероятность того, что при бросании правильного кубика выпадет четное число очков?*

Мы знаем, что при бросании кубика возможны 6 равновероятных исходов. При этом только три из них приводят к наступлению события «выпадет четное число очков». Поэтому вероятность такого события равна 3/6 = 1/2.

Исходы наступления события, для которого вычисляем вероятность, будем называть благоприятными. И дадим такое определение вероятности:

Вероятностью *Р* наступления случайного события *А* называется отношение *m/n*, где *п* – число всех возможных исходов эксперимента, а *m* – число всех благоприятных исходов: *Р(А) =* *т/п*.

Это классическое определение вероятности.

*Из 25 экзаменационных билетов по геометрии ученик успел подготовить 11 первых и 8 последних билетов. Какова вероятность того, что на экзамене ему достанется билет, который он не подготовил?*

Общее число равновозможных исходов при выборе билетов на экзамене равно 25. Пусть *А* – событие «учащемуся достался билет, к которому он не готов». Число таких исходов равно 25-(11+8) = 6. значит Р(А) = 6/25 = 0,24.

***Методика реализации стохастической линии в 9 классе.***

Основные задачи:

На основе всех ранее полученных знаний показать их применение для статистического исследования

Познакомить с такими понятиями как генеральная совокупность. Интервальный ряд.

Познакомить с новым видом графического представления результатов статистического исследования – полигонами и гистограммами.

В 9 классе рассматриваются статистические исследования, на примерах, близких жизненному опыту учащихся. Это – «Исследование качества знаний школьников», «Удобно ли расположена школа?» и «Куда пойти работать?».

**Система подготовки учащихся к итоговой аттестации по данной теме.**

В соответствии с государственными стандартами общего образования с 2010 года в контрольные измерительные материалы по математике уже включены задания стохастической линии.

Содержание и структура контрольно-измерительных материалов (КИМ) единого государственного экзамена (ЕГЭ и ГИА) продолжает совершенствоваться. Аттестация за курс средней школы проходит не по алгебре, а по математике. В контрольно-измерительные материалы ГИА по математике включены задания по алгебре, геометрии (планиметрия), реальной математики. Сближаются концепции экзаменов по математике в 9 и 11 классах, так как стало больше практико-ориентированных заданий, в которых проверяются не только формальные знания , но и общематематическую компетентность выпускников основной и средней школы. Существует большое количество учебно-методических пособий, задачников, связанных с теорией вероятностей, можно рекомендовать следующие издания:

Вероятность и статистика. 5-9 кл.:Пособие для обшеобразоват. учеб.заведений./ Е.А. Бунимович, В.А. Булычев. – М.: Дрофа, 2002-2010.

Алгебра: элементы статистики и теории вероятностей: учеб. пособие для учащихся 7-9 кл. общеобразоват. учреждений / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк; под ред. С.А. Теляковского. – М.: Просвещение, 2011.

Элементы статистики и вероятность: учеб. пособие для 7-9 кл. обшеобразоват. Учреждений /М.В. Ткачева, Н.Е. Федорова. – М.: Просвещение, 2011.

Государственная итоговая аттестация выпускников 9 классов в новой форме. Математика. 2015. Учебное пособие. / А.В. Семенов и др.; под ред. И.В. Ященко; МЦНМО. – М.: Интеллект-Центр, 2015. –с. 38-41.

Теория вероятностей и статистика: Методическое пособие для учителя / Ю.Н. Тюрин, А.А. Макаров, И.Р. Высоцкий, И.В. Ященко. – М.: МЦНМО: МИОО, 2015.

Решение задач по статистике, комбинаторике и теории вероятностей. 7- 9 классы. /авт.-сост. В.Н. Студенецкая. – Волгоград: Учитель, 2006-2010.