***Задача B10: теория вероятностей.***

***Задачи только на определение вероятности***

*Вероятностью события А называется дробь* ***P(A)  =m / n***

*в числителе которой стоит число****m****элементарных событий,****благоприятствующих****событию А, а в знаменателе****n****- число****всех****элементарных событий.*

Таким образом, чтобы решить задачу нужно подсчитать число благоприятствующих и число всех возможных элементарных событий.  
Вспомним - элементарные события (исходы испытания) *попарно несовместимы* и *равновозможны*. Иногда это очевидно, а иногда стоит задуматься. "Попарно несовместимы" означает, например, что один человек не может одновременно ехать в двух автобусах. Не являются "равновозможными", например, встречи на улице с динозавром и собакой.

Обратите внимание на *выделенные*формулировки. Часто бывает, что условия двух задач отличаются только одним словом, а решения могут быть прямо противоположными. И наоборот, казалось бы разные вопросы, но фактически об одном и том же. ***Будьте внимательны!***

Не забудьте, что благоприятствующих событий не может быть больше, чем вообще всех возможных, а значит числитель дроби никогда не превысит знаменатель. В ответе на вопрос о вероятности события должно быть число, удовлетворяющее условию ***0 ≤ P ≤ 1***. Если вы получили другой ответ, он заведомо неверный.

**Задача 1.** В сборнике билетов по биологии всего 55 билетов, в 11 из них встречается вопрос по ботанике. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете *школьнику достанется*вопрос по ботанике. **Ответ: 0,2**

**Задача 2**.В сборнике билетов по математике всего 25 билетов, в 10 из них встречается вопрос по неравенствам. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете*школьнику не достанется* вопроса по неравенствам. **Ответ: 0,6**

**Задача 3.** В чемпионате по гимнастике участвуют 20 спортсменок: 8 из России, 7 из США, остальные - из Китая. Порядок, в котором выступают гимнастки, определяется жребием. Найдите вероятность того, чтоспортсменка, выступающая *первой*, окажется из Китая. Ответ: 0,25

**Задача 5.** На чемпионате по прыжкам в воду выступают 25 спортсменов, среди них 8 прыгунов из России и 9 прыгунов из Парагвая. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что *шестым* будет выступать прыгун из Парагвая**. Ответ: 0,36**

**Задача 6.** Конкурс исполнителей проводится в 5 дней. Всего заявлено 80 выступлений - по одному от каждой страны. В первый день 8 выступлений, остальные распределены поровну между оставшимися днями. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Какова вероятность, что выступление представителя России состоится в третий день конкурса? **Ответ**: **0,225**

**Задача 7.**Перед началом первого тура чемпионата по бадминтону участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 26 бадминтонистов, среди которых 10 участников из России, *в том числе* Руслан Орлов. Найдите вероятность того, что в первом туре Руслан Орлов будет играть с каким-либо бадминтонистом из России? **Ответ**: **0,36**

**Задачи с использованием элементов комбинаторики**

В этих задачах ответ также определяется по формуле ***P(A) = m/n***, но подсчет числа *n* всех возможных событий и числа *m*благоприятствующих событий заметно труднее, чем в предыдущих случаях. Для этого используют различные методы перебора вариантов и вспомогательные рисунки, таблицы, графы ("дерево возможностей"). Облегчить ситуацию могут правила сложения и умножения вариантов, а также готовые рецепты комбинаторики: [формулы для числа перестановок, сочетаний, размещений.](http://mathematichka.ru/school/combinatorics/combination.html)

**Формула для числа перестановок.**

***Перестановками****называются такие выборки элементов, которые отличаются только порядком расположения элементов, но не самими элементами.*

*Если перестановки производятся на множестве из n элементов,****их число****определяется по формуле****Pn = n·(n−1)·(n−2)...3·2·1 = n!***

***n*!** - обозначение, которое используют для краткой записи произведения всех натуральных чисел от 1 до *n* включительно и называют "*n*-факториал" (в переводе с английского "factor" - "множитель").

Таким образом, общее число перестановок 5-ти книг ***P5*** = 5! = 1·2·3·4·5 = 120, что мы и получили выше. Фактически мы выводили эту формулу для маленького примера. Теперь решим пример побольше.

***Правило сложения:****если некоторый объект A можно выбрать k способами, а объект B - l способами (не такими как А), то объект "или А****или****В" можно выбрать m + l способами.*

***Правило умножения:****если объект А можно выбрать k способами, а после каждого такого выбора другой объект В можно выбрать (независимо от объекта А) l способами, то пары объектов А****и****B можно выбрать m·l способами.*

*Правило умножения еще называют "И-правилом", а правило сложения "ИЛИ-правилом". Не забывайте проверить независимость способов для "И" и несовместимость (не такими) для "ИЛИ".*

*Следующие задачи можно решать как перебором вариантов, так и с помощью формул. Я даю несколько способов решения для каждой задачи, потому что одним способом её можно решить быстро, а другим долго, и потому что кому-то понятнее один подход, а кому-то другой. Но это не значит, что обязательно нужно разбирать все способы. Лучше хорошо усвоить один любимый. Выбор за вами.*

***Задача 10****. В случайном эксперименте симметричную монету бросают трижды. Найдите вероятность того, что орел не выпадет ни разу****. Ответ: 0,125***

***Задача 11.*** В случайном эксперименте симметричную монету бросают трижды. Найдите вероятность того, что орел выпадет ровно один раз. **Ответ: 0,375**

**Задача 12.** В случайном эксперименте симметричную монету бросают трижды. Найдите вероятность того, что орел выпадет *хотя бы один раз.* ***Ответ: 0,875***

**Задача 13**. В случайном эксперименте симметричную монету бросают четырежды. Найдите вероятность того, что орел не выпадет ни разу. **Ответ: 0,0625**

**Задача 14**. В случайном эксперименте бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 8 очков. Результат округлите до сотых. **Ответ: 0,14**

**Решение задач с применением таблиц**

задачи по теории вероятности типа В10 можно решать по единственной формуле в одно действие, если сумеете подсчитать числа возможных и благоприятствующих событий "на пальцах", схемах, таблицах... Однако, чем сложнее эксперимент ("... монету бросают четырежды ...", "... бросают три игральные кости ..."), тем более громоздко "простое" решение и тем короче "сложное" - с использованием формул, правил и теорем.

**Задачи на правила сложения и умножения вероятностей**

В разделах, касающихся использования [формул и правил комбинаторики,](http://mathematichka.ru/school/combinatorics/combination.html) я неоднократно упоминала правила умножения и правила сложения вариантов, называя их И-правилом и ИЛИ-правилом. Этот же подход можно распространить на правила теории вероятностей.

***Правило сложения вероятностей****: если A и В несовместимые события, то вероятность того, что наступит хотя бы одно из двух событий А или В, равна сумме их вероятностей.*

**P(A + B) = P(A) + P(B)**

***Правило умножения вероятностей****: если A и В независимые события, то вероятность одновременного наступления обоих событий А и В, равна произведению их вероятностей.*

**P(A·B) = P(A) · P(B)**

Обратите внимание:  
Мы говорим о ***сумме*** *событий*, когда может наступить хотя бы одно из двух событий или А, или В, или оба вместе. Но приведенную формулу применяем только для несовместимых событий, т.е. в случае, если они не могут произойти вместе. Например, не может один ученик писать экзамен сразу в двух аудиториях.  
Мы говорим о ***произведении событий***при наступлении и А, и В одновременно. Но приведенную формулу применяем только для независимых событий, когда результат одного из них не связан с результатом другого. Например, при бросании двух игральных костей ни одна из них "не знает", какое число очков выпало на другой.  
Если указанные условия не выполняются, то правила сложения и умножения вероятностей приобретают более сложный вид.

*Правило сложения вероятностей для совместимых событий: вероятность суммы двух совместимых событий равна сумме их вероятностей за вычетом вероятности их произведения.*

P(A + B) = P(A) + P(B) − P(A·B)

*Правило умножения вероятностей для зависимых событий: вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого при условии, что первое событие произошло.*

P(A·B) = P(A) · P(B/A)

Но в любом случае, правило сложения вероятностей используем там, где перед описанием события в тексте задачи можно вставить союз "или", поэтому называем его ИЛИ-правилом. Правило умножения вероятностей используем там, где перед описанием события в тексте задачи можно вставить союз "и", поэтому называем его И-правилом. Давайте посмотрим, как это работает на примере задачи о ковбое.

**Задача**

Ковбой Джон попадает в муху на стене с вероятностью 0,9, если стреляет из пристрелянного револьвера. Если Джон стреляет из не пристрелянного револьвера, то он попадает в муху с вероятностью 0,2. На столе лежит 10 револьверов, из них только 4 пристрелянные. Ковбой Джон видит на стене муху, наудачу хватает первый попавшийся револьвер и стреляет в муху. Найдите вероятность того, что Джон промахнётся.

**Решение**. Запишем, как могло случиться, что "Джон промахнулся".  
"Ковбой схватил пристрелянный револьвер И не попал в муху, ИЛИ ковбой схватил не пристрелянный револьвер И не попал в муху."  
Сначала разберемся с пистолетами:  
- Вероятность схватить пристрелянный пистолет равна 4/10 = 0,4. Мы вычислили её по определению вероятности: здесь один пистолет = одно элементарное событие, один пристрелянный пистолет = одно благоприятствующее событие.  
- Вероятность схватить не пристрелянный пистолет равна (10−4)/10 = 0,6. Вычислили аналогично, определив число не пристрелянных пистолетов.  
Затем разберемся с мухой:  
- Если ковбой стрелял из пристрелянного револьвера, то он НЕ попал в муху с вероятностью 1−0,9=0,1.   
- Если ковбой стрелял из не пристрелянного револьвера, то он НЕ попал в муху с вероятностью 1−0,2=0,8.   
Здесь мы воспользовались формулой для вероятности противоположного события, потому что в условии даны вероятности попадания в муху из разных пистолетов, но не промахов.  
Теперь вернемся к нашей формулировке события: "Ковбой схватил..." и вместо текста, описывающего составляющие события, подставим полученные числа - их вероятности, а вместо союзов "И" и "ИЛИ" знаки "**·**" и "+" соответственно. Получаем: 0,4·0,1 + 0,6·0,8 = 0,04 + 0,48 = 0,52. Мы получили ответ, а заодно вывели формулу полной вероятности для группы из двух событий. Только последнее для нас не главное, для этого типа задач вообще формулы не главное. Гораздо важнее понять и хорошо сформулировать событие, о котором спрашивается в условии задачи. Математически наше решение выглядит следующим образом.

**Решение**. Обозначим события: A - "Джон промахнулся"; B - "попадание в муху"; С1 - "выстрел из пристрелянного пистолета"; С2 - "выстрел из не пристрелянного пистолета".  
Тогда искомая вероятность события А определяется по формуле

P(A) = P(С1)·P(B\_**/**С1) + P(С2)·P(B\_**/**С2)

Находим вероятности составляющих событий так, как это было описано выше:   
P(С1) = 0,4; P(С2) = 0,6; P(B\_**/**С1) = 0,1; P(B\_**/**С2) = 0,8 и подставляем их в формулу.

P(A) = 0,4·0,1 + 0,6·0,8 = 0,04 + 0,48 = 0,52.

Ответ: **0,52**

***Замечания.*** В формуле для P(A) правило сложения записано в простой форме - для несовместимых событий, поскольку пистолет не мог быть одновременно пристрелянным и не пристрелянным, а правило умножения в сложной форме - с учетом условной вероятности, поскольку "попадание в муху" зависело от выбора пистолета. Символом B\_, как обычно, обозначено событие противоположное событию В, т.е. "не попадание в муху".

**Задача 1** На экзамене по геометрии школьнику достаётся один вопрос из списка экзаменационных вопросов. Вероятность того, что это вопрос на тему «Вписанная окружность», равна 0,2. Вероятность того, что это вопрос на тему «Параллелограмм», равна 0,15. Вопросов, которые одновременно относятся к этим двум темам, нет. Найдите вероятность того, что на экзамене школьнику достанется вопрос по одной из этих двух тем. **Ответ: 0,35**

**Решение.** Используем правило сложения, поскольку "вопрос по одной из этих двух тем" означает, что ИЛИ на тему «Вписанная окружность», ИЛИ на тему «Параллелограмм». Причем правило используем в простой форме, потому что события несовместимы. В условии об этом прямо сказано - вопросов, которые одновременно относятся к этим двум темам, нет.   
P(A + B) = P(A) + P(B)  
0,2 + 0,15 = 0,35.

**Задача 2.** Если гроссмейстер А. играет белыми, то он выигрывает у гроссмейстера Б. с вероятностью 0,52. Если А. играет черными, то А. выигрывает у Б. с вероятностью 0,3. Гроссмейстеры А. и Б. играют две партии, причем во второй партии меняют цвет фигур. Найдите вероятность того, что А. выиграет оба раза.

**Решение.** "А. выиграет оба раза" означает, что А. выиграет И первый раз, И второй раз. А поскольку гроссмейстеры меняют цвет фигур, то это событие можно описать и так "А. выиграет И белыми, И черными." Используем правило умножения в простой форме, потому что события независимы.  
P(A·B) = P(A) · P(B)  
0,52 · 0,3 = 0,156. **Ответ: 0,156**

**Задача3.** В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,3. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,12. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах

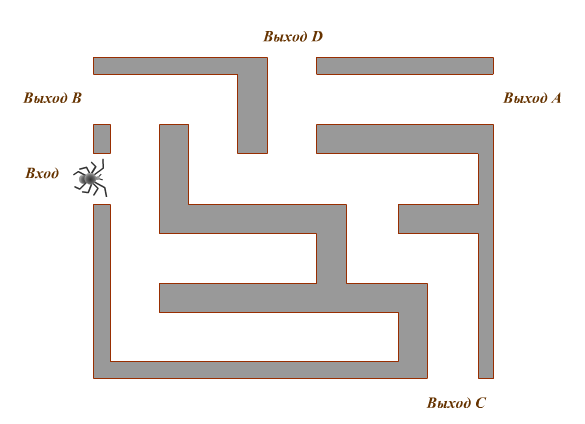
**Решение**. События A = "кофе закончится в первом автомате" и B = "кофе закончится во втором автомате" не являются несовместимыми, так как кофе может закончиться в обоих автоматах, и не являются независимыми, так как, если в одном из них кофе закончится, то во второй автомат покупатели будут обращаться чаще, и кофе в нем закончится скорее.   
По условию задачи P(A) = P(B) = 0,3; P(AB) = 0,12

***Решение. Способ I.*** Событие "кофе останется в обоих автоматах" противоположно событию "кофе закончится хотя бы в одном из автоматов ИЛИ в первом, ИЛИ во втором, ИЛИ в обоих". Найдем вероятность этого (противоположного) события по правилу сложения вероятностей для совместимых событий.  
P(A + B) = P(A) + P(B) − P(A·B) = 0,3 + 0,3 − 0,12 = 0,48  
Тогда искомая вероятность равна 1 − 0,48 = 0,52

***Способ II.***

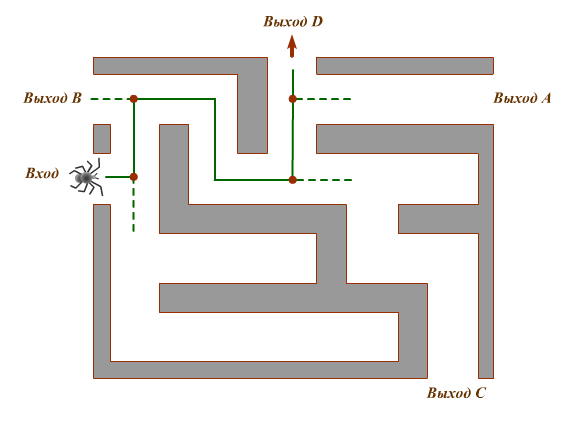
Рассмотрим следующие события:  
Событие С1 = "кофе останется в обоих автоматах";  
Событие С2 = "кофе закончится в обоих автоматах";  
Событие С3 = "кофе закончится в первом автомате И останется во втором";  
Cобытие С4 = "кофе закончится во втором автомате И останется в первом".  
Эти четыре события несовместимы и хотя бы одно из них обязательно реализуется, т.е. их сумма достоверное событие, вероятность которого равна 1.  
P(С1) + P(С2) + P(С3) + P(С4) = 1.  
Следовательно можем найти искомую вероятность из равенства  
P(С1) = 1 − P(С2) − P(С3) − P(С4),  
в котором P(С2) = P(AB) = 0,12 (по условию задачи) и P(С3) = P(С4) (автоматы одинаковые).  
Разберемся с событием С3. Оно является произведением события A и события B\_противоположного событию В. Эти события не являются независимыми, поэтому И-правило используем с учетом условной вероятности.  
P(АВ) = P(A)·P(B**/**A). Следовательно вероятность того, что во втором автомате закончится кофе при условии, что оно уже закончилось в первом P(B**/**A) = P(AB)**/**P(A) = 0,12**/**0,3 = 0,4. А вероятность того, что во втором автомате останется кофе при условии, что оно закончилось в первом P(B\_**/**A) = 1 − P(B**/**A) = 1 − 0,4 = 0,6. Тогда  
P(С3) = P(АB\_) = P(A)·P(B\_**/**A) = 0,3·0,6 = 0,18.  
Итак P(С1) = 1 − 0,12 − 0,18 − 0,18 = 0,52. **Ответ: 0,52**

**Задача 4**

  
На рисунке изображён лабиринт. Паук заползает в лабиринт в точке "*Вход*". Развернуться и ползти назад паук не может, поэтому на каждом разветвлении паук выбирает один из путей, по которому ещё не полз. Считая, что выбор дальнейшего пути чисто случайный, определите, с какой вероятностью паук придёт к выходу ***D***.

**Решение.** Ошибочно думать, что в заданных условиях на вероятность выйти через конкретный выход или попасть в один из тупиков влияет количество выходов и тупиков или длина пути к ним. Раз паук развернуться и ползти назад не может, то самое главное для него - на каждой встретившейся развилке выбрать правильный путь: И на первой, И на второй, И на ... Т.е. это снова задача на правило умножения вероятностей.

Нарисуем путь паука к нужному выходу и возможные ответвления на этом пути.

  
Поставим на развилках "точки раздумья". Но по условию задачи паук не раздумывал, а выбирал путь чисто случайно, значит из каждой точки он мог пойти по любому пути с вероятностью p = 1/n, где n - количество путей на развилке за исключением того, по которому паук пришел. На нашем рисунке на нужном пути встречается 4 точки, и в каждой из них паук может выбрать два новых пути, следовательно p1 = p2 = p3 = p4 = 1/2 = 0,5.  
На каждой развилке паук выбирает новый путь независимо от решения принятого на прошлой развилке (по условию - чисто случайно), поэтому правило умножения вероятностей используем в простой форме  
P = p1 · p2 · p3 · p4 = 0,5·0,5·0,5·0,5 = 0,0625; **Ответ: 0,0625**

**Задачи**

**Задача 1.** В классе 26 человек, среди них два близнеца — Андрей и Сергей. Класс случайным образом делят на две группы по 13 человек в каждой. Найдите вероятность того, что Андрей и Сергей окажутся в одной группе.

**Решение.** Пусть один из близнецов находится в некоторой группе. Вместе с ним в группе окажутся 12 человек из 25 оставшихся одноклассников. Вероятность того, что второй близнец окажется среди этих 12 человек, равна 12 : 25 = 0,48.

**Задача 2.** В фирме такси в наличии 50 легковых автомобилей; 27 из них чёрные с жёлтыми надписями на бортах, остальные — жёлтые с чёрными надписями. Найдите вероятность того, что на случайный вызов приедет машина жёлтого цвета с чёрными надписями.

**Решение.** Машин желтого цвета с черными надписями 23, всего машин 50. Поэтому вероятность того, что на случайный вызов приедет машина желтого цвета с черными надписями, равна: http://reshuege.ru/formula/4a/4a4721d9dd7ee0ca0d771bd2e351da60.png

**Задача 3.** Вероятность того, что новый DVD-проигрыватель в течение года поступит в гарантийный ремонт, равна 0,045. В некотором городе из 1000 проданных DVD-проигрывателей в течение года в гарантийную мастерскую поступила 51 штука. На сколько отличается частота события «гарантийный ремонт» от его вероятности в этом городе?

**Решение.** Частота (относительная частота) события «гарантийный ремонт» равна 51 : 1000  = 0,051. Она отличается от предсказанной вероятности на 0,006. **Ответ: 0,006.**

**Задача 4**. В кармане у Миши было четыре конфеты — «Грильяж», «Белочка», «Коровка» и «Ласточка», а также ключи от квартиры. Вынимая ключи, Миша случайно выронил из кармана одну конфету. Найдите вероятность того, что потерялась конфета «Грильяж».

**Решение.** В кармане было 4 конфета, а выпала одна конфета. Поэтому вероятность этого события равна одной четвертой.

**Задача 5.** Механические часы с двенадцатичасовым циферблатом в какой-то момент сломались и перестали ходить. Найдите вероятность того, что часовая стрелка застыла, достигнув отметки 10, но не дойдя до отметки 1 час.

**Решение.**На циферблате между десятью часами и одним часом три часовых деления. Всего на циферблате 12 часовых делений. Поэтому искомая вероятность равна: http://reshuege.ru/formula/3e/3e3b5ff5971c659d970f7856579c5906.png

***Задача 6***. Какова вероятность того, что наудачу выбранное четырехзначное число составлено только из нечетных цифр?

Обсуждение. Всего четырехзначных чисел имеется 9000: они идут в натуральном ряду от 1000 до 9999. Так как нечетных цифр имеется 5, то на каждом из мест (разряды тысяч, сотен, десятков и единиц) может стоять любая из 5 цифр. Всего, таким образом, имеется 5\*5\*5\*5 = 625 четырехзначных чисел, составленных только из нечетных цифр. Значит, искомая вероятность равна 625/9000 = 5/72.

***Задача 7.***Что вероятнее — выиграть у равносильного противника 3 партии из 4 или 5 партий из 8?

Обсуждение. Прежде всего надо ввести равновозможные исходы. Противники равносильны — это значит, что из большого числа партий примерно половина кончается победой первого, а половина — второго. Мы считаем, кроме того, что результаты нескольких партий не влияют на результаты остальных. Это соглашение дает нам возможность установить, что, скажем, в матче из четырех партий все 2\*2\*2\*2 = 16 возможных последовательностей побед и поражений имеют одинаковую вероятность.

Рассмотрим в качестве примера большое число матчей из двух партий. Из n матчей примерно в n/2 в первой партии победит первый игрок. Поскольку результат первой партии не влияет на результат второй, то примерно в половине тех матчей, где первый игрок победил в первой партии, он проиграет во второй, всего примерно в n/2\*1/2 = n/4 матчах. Аналогично события “победил в обоих партиях первый игрок”, “победил в первой партии второй игрок, а во второй — первый”, “в обоих партиях победил второй игрок” будут иметь место примерно в n/4 матчах, т. е. вероятности всех этих событий равны 1/4.

В дальнейшем в задачах мы будем сталкиваться со случаями, когда несколько опытов проводятся независимо друг от друга. Как в предыдущем образце, можно показать, что вероятность события “исход первого опыта есть A, а второго — B” равно произведению вероятностей событий “исход первого опыта есть A” и “исход второго опыта есть B”.

Вернемся к задаче. В матче из четырех партий имеется 16 равновероятных исходов — последовательностей побед и поражений первого игрока. Событию “первый игрок победил в 3 партиях” благоприятны 4 исхода, поскольку единственное поражение может стоять на одном из четырех мест. Значит, вероятность выиграть 3 партии из 4-х у равносильного противника равна 1/4.

В матче из 8 партий имеется 28 = 256 равновозможных исходов — последовательностей побед и поражений первого игрока. В скольких из них ровно 5 побед? Другими словами, сколько существует подмножеств из 5 элементов в множестве из 8 элементов? Комбинаторика подсказывает нам, что это есть число сочетаний из 8 элементов по 5 элементов, которое подсчитывается по формуле: Возможности использования элементов теории вероятностей и статистики на уроках математики в начальной школе. Таким образом,

Возможности использования элементов теории вероятностей и статистики на уроках математики в начальной школе.

Значит вероятность выиграть 5 партий из 8 у равносильного противника равна 56/256 = 7/32, что меньше 1/4 = 8/32 — вероятности выиграть три партии из четырех.

***Задача 8.***Пусть вы забыли одну цифру нужного вам номера телефона и набираете ее наудачу. Какова вероятность того, что вам придется сделать не более двух звонков?

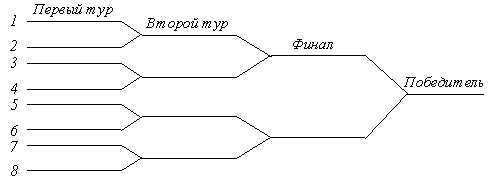
Обсуждение. Вероятность того, что первый же раз вы наберете правильный номер равна 1/10 , поскольку цифр всего десять; все десять исходов — набор 1, набор 2 и т. д. — равновозможны, а благоприятным является только один из них. Если первый раз забытая цифра была набрана неправильно, то при втором звонке вы будете набирать одну из девяти оставшихся цифр, и вероятность успеха будет равна 1/9. Ровно два звонка будут сделаны с вероятностью 9/10\*1/9 = 1/10. Вероятность того, что придется сделать не более двух звонков, равна 1/10 + 1/10 = 0,2.

***Задача 9.***Бросают три игральные кубика. Что вероятнее: сумма очков на верхних гранях равна 11 или эта сумма равна 12? Каковы вероятности этих событий?[6]

Обсуждение. Прежде всего найдем, сколькими способами можно представить 11 и 12 в виде суммы трех натуральных слагаемых, каждое из которых не превосходит 6. Будем выписывать суммы в порядке возрастания слагаемых. Начнем с 11. Если наименьшее слагаемое — 1, то 11 = 1 + 4 + 6 либо 11 = 1 + 5 + 5. Если 2, то 11 = 2 + 3 + 6 либо 11 = 2 + 4 + 5. Если 3, то 11 = 3 + 4 + 4 либо 11 = 3 + 3 + 5. Этими случаями (6) исчерпываются все представления 11 в виде суммы трех чисел, нанесенных на грани кубиков. Число 12 можно представить шестью способами: 12 = 1 + 5 + 6 = 2 + 4 + 6 = 2 + 5 + 5 = 3 + 3 + 6 = 3 + 4 + 5 = 4 + 4 + 4. Шевелье де Мере заключил отсюда, что 12 в качестве суммы будет встречаться столь же часто, как и 11. Однако результаты многих игр показали, что, вопреки расчетам де Мере, 11 встречается чаще. Именно тогда Мере усомнился в теории вероятностей и обратился к Паскалю за разъяснениями. Паскаль решил задачу. Оказалось, что теория вероятностей верна, а рассуждения де Мере ошибочны. Шевалье не учел, что. скажем, 4 + 4 + 4 может выпасть одним способом: на всех трех кубиках 4, а 1 + 4 + 6 — многими: на первом — 1, на втором — 4, на третьем — 6 или на первом — 6, на втором — 4, на третьем — 1 и т. д.

Найдем вероятности того, что сумма очков на верхних гранях равна 11, и того, что эта сумма равна 12. При бросании трех кубиков имеется 6\*6\*6 = 216 равновозможных исходов. Событие “сумма очков равна 11” может осуществиться одним из шести способов: “выпали числа 1, 4, 6”, “выпали числа 1, 5, 5” и т. д. Посчитаем, сколько для каждого из этих способов имеется благоприятных исходов. Событию “выпали 1, 4, 6” соответствуют 6 исходов, которые можно записать так: 146 (на первом кубике на верхней грани 1, на втором — 4, на третьем — 6), 164, 416, 461, 614, 641. Точно так же 6 исходов благоприятны для любого способа представления суммы в виде трех различных слагаемых. Событию “выпали 1, 5, 5” соответствует три исхода: 155, 551, 515. Всего для события “сумма очков равна 11” благоприятны 6 + 3 + 6 + 6 + 3 + 3 = 27 исходов. А событию “сумма очков равна 12” благоприятны 6 + 6 + 3 + 3 + 6 + 1 = 25 исходов, поскольку представлению 4 + 4 + 4 соответствует только один исход — 444. Итак, вероятность того, что сумма очков равна 11, есть 27/216 = 1/8, а вероятность того, что эта сумма равна 12, есть 25/216 = 1/8 - 1/108 < 1/8. Решение этой задачи показывает, как важно правильно выделить равновозможные исходы.

***Задача 10.***В шахматном турнире участвуют 8 игроков. Номера шести игроков распределяются по жребию. Номер определяет положение игрока в турнирной лестнице. Предположим, что лучший игрок всегда побеждает второго по мастерству, а тот в свою очередь побеждает всех остальных. Второе место занимает проигравший в финале. Какова вероятность того, займет второй по мастерству игрок?

******

***?en. B***

Обсуждение. Второй по мастерству игрок занимает второе место тогда и только тогда, когда он находится в той половине турнирной лестницы (верхней или нижней), в которой нет первого по мастерству игрока, поскольку в противном случае второй проиграет первому ранее финала. Поскольку имеется 7 ступеней турнирной лестницы (кроме ступени, занятой первым по мастерству игроком), которые может занимать второй по мастерству игрок, все эти исходы равновозможны, а 4 из них являются благоприятными для выхода в финал, то искомая вероятность равна 4/7.

***Задача 11.***Король Артур проводит рыцарский турнир, в котором порядок состязания определяется жребием (по турнирной лестнице). Среди восьми рыцарей, одинаково искусных в ратном деле, два близнеца. Какова вероятность того, что они встретятся в поединке?

Обсуждение. Обозначим близнецов A и B. Если A и B входят в одну пару в турнирной лестнице, что происходит с вероятностью 1/7 (для B равновозможны 7 мест, не занятых A), то близнецы заведомо встречаются в первом же туре. Вероятность того, что B находится в соседней паре, равна 2/7. В этом случае близнецы встречаются во втором туре) только тогда, когда они оба выиграют поединки первого тура, что происходит с вероятностью 1/4. Значит, вероятность события “близнецы встречаются во втором туре” равна 2/7\*1/4 = 1/14. Наконец, вероятность того, что B находится в другой половине турнирной лестницы, равна 4/7, и в этом случае вероятность встречи равна 1/4\*1/4 = 1/16, поскольку оба должны победить в обоих турах; вероятность события “близнецы встречаются в финале” есть 4/7\*1/16 = 1/28. Все возможности перечислены, вероятность встречи в одном из туров есть сумма вероятностей встреч в первом, втором турах и финале, т. е. 1/7 + 1/14 + 1/28 = 1/4.

***Задача 12.***Задача о разделе ставки (вторая задача Шевалье де Мере, предложенная Паскалю). Подбрасывается монета. Первый игрок “набирает” гербы, а второй — решки. Тот, кто первым наберет три единицы, забирает ставку. Игра была прервана, когда у первого игрока имелось два герба, а у второго — одна решка. Ставка должна быть разделена пропорционально шансам на выигрыш. Как ее разделить?

Обсуждение. Полезно ввести опыт, состоящий в двукратном бросании монеты. Из четырех равновозможных исходов ГР (при первом бросании выпал герб, при втором — решка), ГГ, РГ, РР, в первых трех победа принадлежит первому игроку (в первых двух случаях в самой игре монету второй раз не бросают), в четвертом — второму. Шансы игроков на выигрыш относятся как 3 к 1. В этом отношении и надо разделить ставку.