|  |
| --- |
| **Департамент образования города Москвы** |
| **Юго-Восточное окружное управление образования** |
| **Государственное бюджетное общеобразовательное учреждение города Москвы** |
| **«Школа с углубленным изучением английского языка № 1319** |
| **(ГБОУ Школа № 1319)** |
|  |

**«Методические рекомендации**

**по решению текстовых задач на нахождение наибольших и наименьших значений функций»**

(для учащихся старших классов, и учителей математики средних школ)

Учитель: **Рыжкова И.Г.**

Квалификационная категория: высшая

Рассмотрено и утверждено на заседании

школьного методического объединения

Москва

2015 год

Учебные пособия по рассматриваемой тематике для средней школы, как правило, обладают одним из двух недостатков: приводимые в них решения задач либо излишне подробны, либо вообще отсутствуют. В данных рекомендациях, помимо подробного разбора иллюстративных примеров, предложен большой набор задач из различных областей науки и техники с краткими методическими указаниями по их решению.

Задачи на нахождение наибольшего и наименьшего значений функции относятся к числу наиболее интересных и содержательных математических задач. В основном это связано с тем, что в процессе своей деятельности люди стремятся наилучшим образом использовать различного рода ресурсы и при заданном объеме производства свести к минимуму различного вида затраты или при заданных ресурсах добиться максимального выпуска продукции. Такого вида задачи носят название оптимизационных. Общие методы решения оптимизационных задач разрабатываются в различных разделах современной математики. Простейшие же из этих задач целесообразно решать (и это предусмотрено действующими программами) как в школьном курсе математики средней школы, так и в курсе математического анализа школ с углубленным и профильным уровнем изучения предмета.

Материалы данного пособия будут полезны как при организации групповой работы в классе, так и для индивидуальной работы при отработке метапредметных понятий.

Предлагаем задачи на нахождение наибольшего и наименьшего значений функции из различных областей науки и техники (геометрии, некоторых разделов физики, биологии, экономики и др.). Для решения каждой из них следует сначала, используя условие задачи, составить функцию с указанием промежутка, на котором она определяется, а затем отыскать наибольшее (наименьшее) значение полученной функции на этом промежутке. (Тем самым мы исключаем здесь задачи на нахождение наибольшего и наименьшего значений функции, решаемые, например, геометрическими методами).

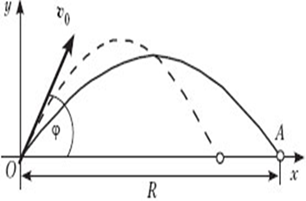
Отметим, что в зависимости от вида промежутка, на котором рассматривается непрерывная функция, методы отыскания ее наибольшего и наименьшего значений на этом промежутке, различны.

Рассмотрим наиболее часто встречаемые случаи.

**I.** Функция *f* (*x*) непрерывна на отрезке [*a*; *b*] и имеет на этом отрезке конечное (быть может, равное нулю) число критических точек. В этом случае для нахождения наибольшего (наименьшего) значения функции достаточно вычислить значения функции на концах отрезка и во всех критических точках и из полученных чисел выбрать наибольшее (наименьшее). Таким образом, в рассматриваемом случае для нахождения наибольшего (наименьшего) значения функции не требуется отыскивать промежутки ее монотонности.

П р и м е р: Дальность *R*=|*OA*| полета снаряда в пустоте, выпущенного с начальной скоростью 0 из орудия, наклоненного под углом *γ* к горизонту, вычисляется по формуле , где *g* – ускорение силы тяжести. Найти угол *γ* , при котором дальность *R* будет наибольшей при данной начальной скорости 0.

Р е ш е н и е.



Найдем наибольшее значение функции *R(γ)*=  на отрезке [0; ]. Для этого отыщем сначала критические точки функции *R (γ)*, принадлежащие (0; ). Имеем: *R'(γ* *)*=  *.* Поэтому *R*’(*y*) = 0 ↔ 2γ=+*k*  ↔ γ= +*k (k є z).*

Из полученных критических точек лишь одна, а именно γ =, является точкой промежутка (0; ). Осталось сравнить числа *R*(), *R*(0) и *R*(). Имеем *R*() =, *R*(0) = 0 и *R*() = 0. Таким образом, *R*наиб = *R*()=.

Ответ: *y* =.

**II.** Функция *f(x)* непрерывна на конечном промежутке [*a*; *b*) (или (*a*; *b*], или (*a*; *b*)), имеет на этом промежутке лишь конечное число критических точек и, наконец, функцию *f(x)* можно рассматривать как непрерывную и на отрезке [*a*; *b*]. Если наибольшее (наименьшее) значения функции *f(x)* на отрезке [*a*; *b*] достигается во внутренней точке отрезка, то наибольшее (наименьшее) значения функции *f(x)* на отрезке [*a*; *b*] и на исходном промежутке совпадают. Таким образом, и в этом случае для нахождения наибольшего (наименьшего) значения функции не требуется отыскивать промежутки ее монотонности.

П р и м е р. Число 26 представить в виде суммы трех положительных слагаемых, сумма квадратов которых наименьшая, если известно, что второе слагаемое втрое больше первого.

Р е ш е н и е. Обозначим неизвестные слагаемые через *x, y, z*. По условию задачи введенные неизвестные удовлетворяют системе уравнений: . Выразим неизвестное *y* и *z* через *x*. Получим *y=3x, z=26-4x*.

Таким образом, задача сводится к исследованию функции

*S(x)= x2+9x2+(26-4x)2*, или *S(x)=26x2 - 208x+676*.

Промежуток изменения аргумента в данном случае определяем из условия положительности всех слагаемых:

*.*

Итак, решение задачи сведено к нахождению наименьшего значения функции *S(x)* на (0;). Так как функция S(x) непрерывна и на отрезке [0;], то рассмотрим сначала ее на этом отрезке. Имеем: *S'(x)=52x–208; S'(x)=052x–208=0x=4*. Так что единственной критической точкой функции *S(x)* является *x=4* (0;). Осталось сравнить числа *S(0)=676*, *S(4)=260* и *S(*)*=422,5*.

Таким образом, наименьшее значение на отрезке [0; ] функция *S(x)* достигает во внутренней точке *x=4* этого отрезка. Значит, число *S(4)=260* является наименьшим значением функции *S(x)* и на промежутке (0; ).

З а м е ч а н и е. Число *S(0)=676* является наибольшим значением функции *S(x)* на отрезке [0; ]. Однако, как легко видеть, функция *S(x)* на промежутке (0; ) не достигает своего наибольшего значения.

Ответ: 26=4+12+10.

**III.** Функция *f(x)* непрерывна на конечном или бесконечном промежутке (причем в случае конечного промежутка функция *f(x)* не может рассматриваться как непрерывная на соответствующем отрезке) и имеет на указанном промежутке конечное число критических точек. В этом случае для отыскания наибольшего (наименьшего) значения функции на указанном промежутке следует исследовать функцию на монотонность.

П р и м е р: Стоимость эксплуатации катера, плывущего со скоростью  км/час, составляет *90+0,42*руб/час. С какой скоростью должен плыть катер, чтобы стоимость эксплуатации катера на 1 км пути была наименьшей?

Р е ш е н и е. По условию задачи стоимость эксплуатации катера, плывущего со скоростью  км/час, равна *90+0,42* руб/час. Но за 1 час катер проплывает  км. Значит, стоимость эксплуатации катера за 1 км пути равна (руб/км).

Таким образом, требуется определить, при каком значении  функция *S()=* принимает свое наименьшее значение на луче (0;+ ∞).

Найдем критические точки этой функции: . Производная существует в каждой точке промежутка (0; + ∞). Далее S’() = 0↔ + 0,4 = 0↔2 = 225 ↔ =15 или =15. Из двух найденных критических точек лишь одна, а именно =15, принадлежит промежутку (0; + ∞).

Так как () < 0 на промежутке (0; 15) и () > 0 на промежутке (15; + ∞), то =15 является точкой минимума функции *S()*. Наконец, так как функция S() убывает на (0; 15) и возрастает на (15; + ∞), то эта функция достигает своего наименьшего значения на промежутке (0; + ∞) в точке =15.

Ответ: =15 км/час.

Часто можно найти наибольшее (наименьшее) значение функции и без использования понятия производной.

П р и м е р. Найти число, которое, в сумме со своим квадратом, дает наименьшую сумму.

Р е ш е н и е. Обозначим искомое число через *х* и через *f(x)* сумму *x+x2*. Таким образом, требуется определить, при каком значении *x* функция *f(x)=x2+x* принимает свое наименьшее значение на промежутке (– ∞; + ∞).

Имеем, *f(x)=x2+x=(x2+x+)* – *=(x+*)2– .

Так как (x+)2 ≥ 0 при любом значении *х* из промежутка (– ∞; + ∞), то *f(x) ≥ -*  на этом промежутке и свое наименьшее значение, равное – , функция *f(x)* принимает при таком значении *x*, при котором *(х+)2 = 0*, т.е. при *х= – .* Ответ: – *.*

Отметим, что при нахождении наибольшего (наименьшего) значения функции очень часто бывают полезными следующие утверждения:

**А.** Если функция *f(x)* неотрицательна на некотором промежутке, то точка, в которой она принимает свое наибольшее (наименьшее) на этом промежутке значение, совпадает с точкой, в которой принимает свое наибольшее (наименьшее) на этом же промежутке значение функция *f2n(x)*. (Сами же наибольшее (наименьшее) значения функций *f(x)* и *f2n(x)*, вообще говоря, различны).

**Б.** Если функция *f(x)* определена на некотором промежутке, то точка, в которой она принимает свое наибольшее (наименьшее) на этом промежутке значение, совпадает с точкой, в которой принимает свое наибольшее (наименьшее) на этом же промежутке значение функция *f2n-1(x).*

**В.** Если функция *f(x)* положительна на некотором промежутке, то точка, в которой она принимает свое наибольшее (наименьшее) на этом промежутке значение, совпадает с точкой, в которой принимает свое наименьшее (наибольшее) на этом промежутке значение функция .

З а м е ч а н и е. В каждом из сформулированных выше трех утверждений предполагается, что хотя бы одна из рассматриваемой пары функций принимает на промежутке свое наибольшее (наименьшее) значение.

В заключение отметим, что все предлагаемые ниже задачи снабжены краткими указаниями, ответами и при необходимости пояснительными рисунками. Все задачи разбиты на разделы. И хотя отнесение некоторых задач к тому или иному разделу довольно условно (например, отдельные геометрические задачи можно трактовать и как задачи экономические), все же такое деление, как нам кажется, должно оказать определенную помощь учителю (в частности, при учете индивидуальных возможностей учащихся) .

ГЕОМЕТРИЯ.

З а д а ч а №1. Найти размеры прямоугольника наибольшей площади с данным периметром *Р*.

Y

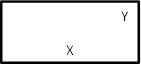
X

Решение задачи сводится к отысканию такого значения *х* (и, следовательно, у = ), при котором функция *S(x)= x*  принимает свое наибольшее значение на промежутке (0; ).

Из равенства *S(х)=x*  следует, что таким значением является *x=*.

Ответ: *х=у=*.

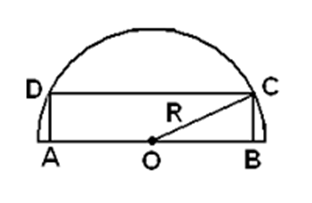
З а д а ч а №2. Найти размеры прямоугольника с наименьшим периметром и с данной площадью *S*.



Решение задачи сводится к нахождению того значения *х* (и, следовательно, *у* =), при котором функция *Р(х) = 2(х + у) = 2(х+)* принимает свое наименьшее значение на промежутке ( 0 ; + ∞).

Ответ: *х* = *у* =.

З а д а ч а №3. Каковы размеры прямоугольника наибольшей площади, который можно вписать в полукруг радиуса *R* таким образом, чтобы одна сторона прямоугольника лежала на диаметре полукруга?



Решение задачи сводится к нахождению того значения DC*=x* и, следовательно, CB=*у=*, при котором функция *S(х)=ху=x* принимает свое наибольшее значение на промежутке (0; *2R*). Ясно, что вместо функции *S(x)* целесообразно исследовать функцию *f(x) = S2(x)* отрезке [0; 2R].

Ответ: .

З а д а ч а №4. Найти стороны прямоугольника наибольшей площади, который можно вырезать из параболического сегмента, ограниченного осью *Ох* и параболой ,если известно, что одна сторона прямоугольника лежит на оси *Ох* (а > 0; Н > 0).



Решение задачи сводится к нахождению того значения *х* (и, следовательно, ), при котором функция *S(x)=2x*=*2Hx -*, принимает свое наибольшее значение на промежутке (0; *a*). Функцию *S(х)* целесообразно исследовать на отрезке [0; *a*]

Ответ: *2x=, y=.*

З а д а ч а №5. Найти высоту равнобочной трапеции наибольшей площади, которую можно вырезать из параболического сегмента, ограниченного осью *Ох* и параболой , если известно, что нижнее основание трапеции совпадает с основанием параболического сегмента (*a>0; Н>0*).



Решение задачи сводится к нахождению того значения *х* (и, следовательно, высоты трапеции ), при котором функция  принимает свое наибольшее значение на промежутке (0; *a*) . Функцию *S(x)* целесообразно исследовать на отрезке [0; *а*].

Ответ: .

З а д а ч а №6. Найти трапецию наибольшей площади, которую можно вписать в полукруг радиуса *R* таким образом, чтобы одно из оснований трапеции лежало на диаметре полукруга.



Решение задачи сводится к нахождению такого значения *х* (и, следовательно, ), при котором функция принимает свое наибольшее значение на промежутке (0; *R*). Вместо исследования функции *S(x)* на промежутке (0; *R*) целесообразно исследовать функцию *f(х) = S2(х)* на отрезке [0; *R*] .

Ответ: .

З а д а ч а № 7. Сечение туннеля имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом.

а) Зная периметр сечения *2р*, выяснить, при каком радиусе полукруга площадь сечения будет наибольшей.

Решение задачи сводится к нахождению такого значения *х (половина стороны прямоугольника, на которой построена окружность, соответственно, y-другая сторона)*, при котором функция

*S(x)=Sполукр+S*□= принимает свое наибольшее значение на промежутке (0; ). Функцию *S(x)* целесообразно исследовать на отрезке [0; ].

б) Зная площадь сечения *S*, выяснить, при каких условиях периметр сечения будет наименьшим.

По условию задачи, . Отсюда .

Решение задачи сведено к нахождению такого значения *х* (и. следовательно ), при котором функция  принимает свое наименьшее значение на (0;  ).

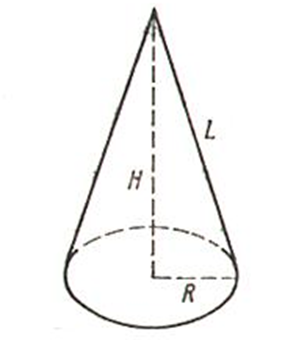
Ответ: а) ; б) .

3 а д а ч а № 8. Из куска картона размером 32 см \* 20 см требуется изготовить открытую сверху коробку наибольшей вместимости, вырезая по углам квадраты и затем загибая выступы для образования боковых стенок коробки. Найти объем такой коробки.

Решение задачи сводится к нахождению наибольшего значения функции *V(x) = (20 – 2х)(32–2х) х* на (0; 10) (x- сторона вырезаемого квадрата). Функцию *V(х)* целесообразно исследовать на отрезке [0; 10].

Ответ: *Vнаиб=V(4)=1152 см3.*

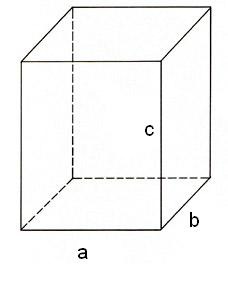
З а д а ч а № 9. Требуется изготовить коническую воронку с образующей, равной 20 см. Какова должна быть высота воронки, чтобы её объём был наибольшим?



По условию задачи, *R2=l2-h2=400-h2*. Поэтому *Vкон=V(h)=πR2h=(400 – h2)h.* Таким образом, решение задачи сводится к нахождению такого значения *h*, при котором функция *V(h)* принимает свое наибольшее значение на промежутке (0; 20) . Целесообразно исследовать функцию *V(h)* на отрезке [0;20].

Ответ: *h=*см.

З а д а ч а №10. Каковы должны быть размеры закрытой коробки с квадратным основанием, если объем ее равен *V* и требуется израсходовать наименьшее количество материала?

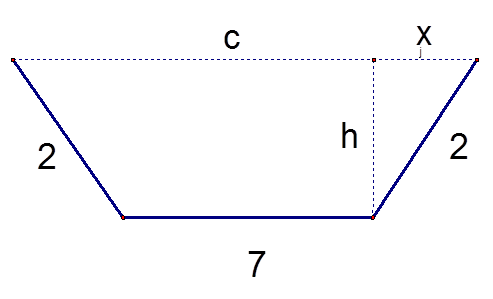
 Пусть а=b=x, с=y.

По условию задачи, *х2у= V* . Отсюда .

Таким образом, решение задачи сводится к нахождению такого значения *х* (и, следовательно, *у*), при котором функция

*S(x) =2х2+4ху* =2x2+ принимает свое наименьшее значение на бесконечном промежутке (0; + ∞).

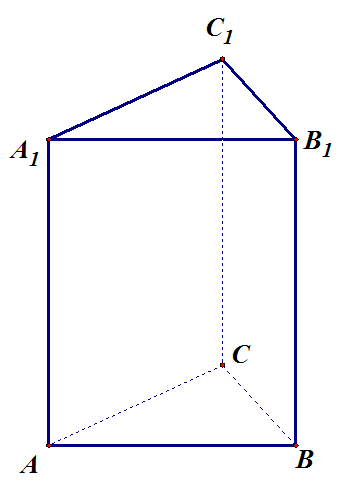
Ответ: *x=y=.*

З а д а ч а №11. Из полосы жести шириной 11 см требуется сделать открытый сверху желоб, поперечное сечение которого имеет форму равнобочной трапеции. Дно желоба должно иметь ширину 7 см. Какова должна быть ширина желоба наверху, чтобы он вмещал наибольшее количество воды?

В принятых обозначениях верхнее основание поперечного сечения желоба *c=7+2x,* а высота желоба . Таким образом, задача сводится к нахождению такого значения *х*, (и, следовательно, значения *с*), при котором функция принимает свое наибольшее значение на промежутке (0; 2). Целесообразно вместо функции *S(x)* исследовать функцию *f(x)=S2(x)* на отрезке [0; 2].

Ответ: *c=8* см.

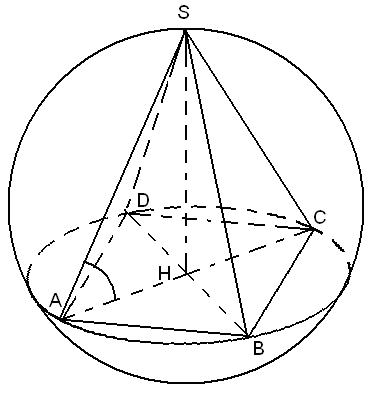
З а д а ч а №12. Из всех правильных треугольных призм, имеющих данный объем *V*, найти призму с наименьшей суммой всех ее ребер. Чему равна длина стороны основания такой призмы?

Пусть х- сторона основания призмы, H - боковое ребро.

По условию задачи, *V = SоснH* = . Отсюда *V*. Таким образом, решение задачи сводится к отысканию такого значения *х* (и, следовательно, *Н*), при котором функция *l(х) = 6х+3Н = =6х+V* принимает свое наименьшее значение на промежутке (0; + ∞).

Ответ: ; .

З а д а ч а №13. В сферу радиуса R вписана правильная четырёхугольная пирамида. Какой должна быть высота пирамиды, чтобы ее объем был наибольшим? Чему равен этот наибольший объем?

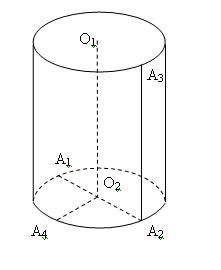


Пусть *х* – сторона основания, а *h* – высота пирамиды. Тогда , или *x2=2h(2R-h)*.

Таким образом, решение задачи сведено к нахождению наибольшего значения функции ) на промежутке (0; 2*R*). Целесообразно исследовать функцию *V(h)* на отрезке [0; 2*R*].

Ответ: *Vнаиб=V*.

З а д а ч а №14. а) Среди всех цилиндров данного объема *V* найти тот, который имеет наименьшую полную поверхность. (Иная формулировка: Консервная банка данного объема *V* имеет форму цилиндра. Каково должно быть отношение её высоты к диаметру основания, чтобы на изготовление банки ушло наименьшее количество материала?)



а) Пусть радиус цилиндра –r, высота –h. По условию задачи *πr2h=V*. Отсюда . Таким образом, решение задачи сводится к нахождению такого значения *r* (и, следовательно, *h*), при котором функция *Sполн=S(r)=2πr2+2πrh=2πr2* принимает свое наименьшее значение на (0; + ∞).

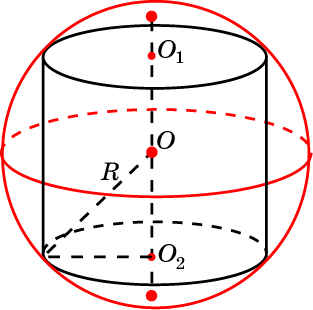
б) Найти цилиндр наибольшего объема с заданной площадью *S* полной поверхности.

По условию задачи *2πr2+2πrh=S.* Отсюда . Отметим, что из условия задачи (*S>2πr2* )следует неравенство . Таким образом, решение задачи сводится к нахождению такого значения r (и, следовательно, h), при котором функция принимает свое наибольшее значение на промежутке (0; ). Целесообразно исследовать функцию V(r) на отрезке [0; ].

Ответ: а) *h=2r, где r=;*

б) *h=2r, где* .

З а д а ч а №15. а) Найти размеры цилиндра наибольшего объема, который можно вписать в данный шар радиуса *R*. Чему равен этот наибольший объем?



а) По условию задачи, *h2+(2r)2=(2R)2* .0тсюда . Таким образом, решение задачи сводится к нахождению наибольшего значения функции *V(h)=πr2h =π (R2h -* ) на промежутке (0; 2*R*). Целесообразно исследовать функцию *V(h)* на отрезке [0; 2*R*].

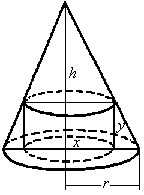
б) Найти размеры цилиндра с наибольшей площадью боковой поверхности, который можно вписать в данный шар радиуса R. Чему равна эта наибольшая площадь боковой поверхности?

Как и выше, . Так что решение задачи сводится к нахождению наибольшего значения функции на промежутке (0;2*R*). Целесообразно вместо функции *S(h)* исследовать функцию *f(h)=S2(h)* на отрезке [0; 2*R*].

Ответ: а) 

б) .

З а д а ч а № 16. а) Найти размеры цилиндра наибольшего объёма, который можно вписать в конус с высотой *h* и радиусом основания r. Чему равен этот наибольший объем?



а) Так как  то,  и поэтому . Таким образом, решение задачи сводится к нахождению наибольшего значения функции *V(h)* на промежутке (0; *h*). Целесообразно исследовать *V(h)* на отрезке [0; h].

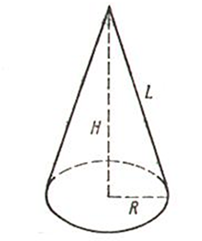
б) Найти размеры конуса наименьшего объема, который можно описать около цилиндра с высотой *h* и радиусом основания *r*. Чему равен этот наименьший объем?

Так как , то  и поэтому . Таким образом, решение задачи сводится к нахождению наименьшего значения функции *V(h)* на луче (h; + ∞).

Ответ: а) 

б) .

З а д а ч а № 17. а) Доказать, что конический шатер данной вместимости *V* требует наименьшего количества материи, когда его высота в  раз больше радиуса основания. (Иная формулировка: найти размеры конуса с данным объёмом *V* и имеющим наименьшую площадь боковой поверхности).



а) По условию задачи, .Отсюда . Кроме того, .Таким образом, задача сведена к нахождению такого значения *H*, (и, следовательно, значения *R*), при котором функция  принимает свое наименьшее значение на промежутке (0; + ∞). Целесообразно вместо функции *S(H)* исследовать функцию *f(H)=S2(H)* на промежутке (0; + ∞).

б) Найти высоту и радиус основания конуса наибольшего объёма с данной площадью *S* боковой поверхности. Чему равен этот наибольший объём ?

По условию задачи πR*l=S*. Отсюда . Тогда . Отметим, что из неравенства πR*2<πRl =S* следует неравенство . Таким образом, решение задачи сведено к отысканию наибольшего значения функции  на промежутке (0; ). Целесообразно вместо функции *V(R)* исследовать функцию *f(R)=V2(R)* на отрезке [0; ].

Ответ: а) 

б) .

ФИЗИКА.

Механика.

З а д а ч а № 18. Из пункта *А*, находящегося в лесу в 5 км от прямолинейной дороги, пешеходу нужно попасть в пункт *В*, расположенный на этой дороге на расстоянии 13 км от пункта *А*. По дороге пешеход может двигаться со скоростью 5 км/ч, а по лесу – 3 км/ч. За какое минимальное время пешеход сможет добраться из пункта *А* в пункт *В*?



Отметим, что |*ЕВ*| = 12. Решение задачи сводится к нахождению наименьшего значения функции на отрезке на отрезке [0; 12].

Ответ: *3 ч 44 м*.

З а д а ч а № 19. Три пункта *А*, *В* и *С* расположены так, что угол *ABC* = 60°. Из *А* в *В* движется автомобиль со скоростью V 1 = 80 км/ч , а из *В* в *С* – поезд со скоростью V 2 = 50 км/ч. Через сколько времени расстояние между поездом и автомобилем будет наименьшим, если движение началось одновременно и |АВ|=200 км?



Пусть в момент времени *t* автомобиль находится в п. *М*, а поезд - в п. *Е*. Тогда |*AM*| = *υ1t* = 80*t* (поэтому |*MB*|=200 – 80*t*, если 0 ≤ *t* ≤ 200/80 = 2,5 ч) и |*BE*|= *υ2t* = 50*t.* По теореме косинусов*,*|*ME*|2=(200 – 80*t*)2+(50*t*)2 – 2(200 –80*t*)50*t cos* 60º=12900*t*2 – 42000*t* +40000.

Таким образом, решение задачи сведено к нахождению такого значения *t*, при котором функция *f(t)*=12900*t*2 – 42000*t* + 40000 принимает наименьшее значение на отрезке [0; 2,5].

Ответ: ч.

З а д а ч а № 20. Дождевая капля, начальная масса которой равна *m0* г, а начальная скорость равна 0, падает под действием силы тяжести, равномерно испаряясь так, что убыль массы пропорциональна времени (коэффициент пропорциональности равен *k* г/с). Через сколько секунд после начала падения кинетическая энергия капли будет наибольшей? Чему равна наибольшая кинетическая энергия капли?

Кинетическая энергия тела, обладающего массой *m* и движущегося со скоростью *υ*, равна . По условию задачи *υ = υ0 + gt = gt* и *m = m0 – Δm = m0 – kt*. Таким образом, решение задачи сводится к нахождению наибольшего значения функции  на отрезке [0; *T*], где *Т* – некоторое постоянное число ().

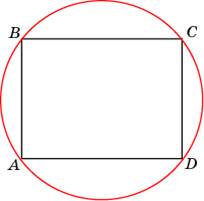
Ответ: ().

З а д а ч а № 21. Тело массой *m0* = 3000 кг падает с высоты *Н* = 2000 м, теряя массу (сгорает) пропорционально времени падения. Коэффициент пропорциональности *к* = 100 кг/с. Считая, что начальная скорость тела равна 0, ускорение свободного падения *g*=10 м/с2 и, пренебрегая сопротивлением воздуха, найти наибольшую кинетическую энергию тела.

*См. указание к предыдущей задаче.*

Ответ: Wнаиб=W(20)=108 ().

З а д а ч а № 22. Поперечное сечение бревна есть круг диаметром *d*. Из бревна вытесывается брус с прямоугольным поперечным сечением. Прочность бруса пропорциональна основанию и квадрату высоты. Найти размеры поперечного сечения, при котором брус имеет наибольшую прочность.



Пусть AD=x, CD=y, AC=d

По условию задачи, прочность бруса *J=Kxy2*. Так как *x2+y2=d2*, то *y2=d2 – x2* и поэтому *J=J(x)=K(xd2 – x3)*. Таким образом, решение задачи сведено к нахождению такого значения *х* (и, следовательно, *у*), при котором функция *J(x)* принимает свое наибольшее значение на промежутке (0; *d*). Целесообразно исследовать функцию *J(x)* на отрезке [0; *d*].

Ответ: .

З а д а ч а № 23. Груз весом *Р*, лежащий на горизонтальной поверхности, требуется сдвинуть с места приложенной силой . При каком наклоне этой силы к горизонту ее величина будет наименьшей, если коэффициент трения равен *к*?



Как принято, будем обозначать ||=*F*, |тр|=*F*тр.. и т.д. Имеем: *Fх=Fтр, Fх=F cos t, Fтр=k(P – Fy)=k(P – F sin t.* Поэтому *F cos t=k(P – F sin t)*. Отсюда . Таким образом, решение задачи сведено к нахождению такого значения *t*, при котором функция *F(t)* принимает свое наименьшее значение на промежутке (0; ).

Ответ: *t = arctg k.*

Электричество.

З а д а ч а № 24. Составляется электрическая цепь из двух параллельно соединенных сопротивлений. При каком соотношении между этими сопротивлениями сопротивление всей цепи максимально, если при последовательном соединении этих сопротивлений оно равно *R*?

http://fiz.do.am/images/gia1/3_04.jpg

Известно, что при параллельном соединении общее сопротивление цепи *R*общ связано с сопротивлениями *R1=x* и *R2=R – x* соотношением  или . Поэтому . Таким образом, решение задачи сведено к нахождению такого значения *х*, при котором функция *f(x)* принимает свое наибольшее значение на промежутке (0; *R*). Из равенства следует, что таким значением будет .

Ответ: *R1*=*R2*=.

З а д а ч а № 25. Установлено, что энергия, отдаваемая электрическим элементом, определяется по формуле , где *E* – э.д.с. элемента, *r* – его внутреннее сопротивление, a *R* – внешнее сопротивление. Каким должно быть сопротивление внешней цепи, чтобы отдаваемая элементом энергия была наибольшей ?

Считая *Е* и *r* постоянными, рассмотрим  как функцию аргумента *R*. Таким образом, решение задачи сведено к нахождению такого значения *R*, при котором функция  принимает свое наибольшее значение на промежутке [0; + ∞) .

Ответ: 

З а д а ч а № 26. Если в электрической цепи сопротивлением *R* течет ток *I*, то количество тепла, выделяющееся в единицу времени, пропорционально *I2R*. Выяснить, как следует разветвить ток *I* на токи *I1* и *I2* с помощью двух проводников с сопротивлениями *R1* и *R2* и с тем, чтобы выделение тепла было наименьшим?

Обозначим *I1=x*. Тогда *I2=I-x*. Количество тепла, выделяющееся на рассматриваемом участке цепи, равно *Q=kI12R1 + kI22R2=k(R1x2+R2(I – x)2) = Q(x)*. Таким образом, задача сведена к нахождению такого значения *х*, при котором функция *Q(x)* принимает свое наименьшее значение на отрезке *[0; 1]*.

Ответ: 

Оптика.

З а д а ч а № 27. При большом расстоянии от точечного источника света освещенность, получаемая от него, прямо пропорциональна интенсивности источника и обратно пропорциональна квадрату расстояния до него. Освещенность от нескольких источников равна сумме освещенностей от каждого из них. Пусть имеются два маяка на расстоянии 12 км друг от друга, причем интенсивность первого в 8 раз превосходит интенсивность второго. Какая точка отрезка, соединяющего маяки, наименее освещена?



По условию задачи, освещенность в точке *М* равна **, где *k* – коэффициент пропорциональности, s– интенсивность второго источника (сила света). Таким образом, решение задачи сведено к нахождению такого значения *х*, при котором функция *j(x)*  принимает свое наименьшее значение на промежутке (0; 12).

Ответ: *x*=4 км.

Задача № 28. В точках *А* и *В* находятся точечные источники света с силой *s1* и*s2* свечей. Пусть |*АВ*|=*а*. На отрезке |*АВ*| найти наименее освещенную точку *М*.

*См. указания к предыдущей задаче.*

Ответ: 

З а д а ч а № 29. Лампа висит над центром круглого стола, радиус которого равен *r*. При какой высоте лампы над столом освещенность предмета, лежащего на краю стола, будет наибольшей? Освещенность прямо пропорциональна косинусу угла падения лучей и обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника света.



Пусть *х* – величина угла падения лучей. По условию зада- чи, освещенность в т. *А* вычисляется по формуле , где *k* – коэффициент пропорциональности. Так как , то *j=j(x)=*. Таким образом, решение задачи сведено к нахождению такого значения *х*, при котором функция *j(x)* принимает свое наибольшее значение на промежутке (0; ). (Искомая высота лампы над столом может быть найдена, например, по формуле *H=rctgx* ).

Ответ: .

БИОЛОГИЯ.

З а д а ч а № 30. Реакция организма на введенное лекарство может выражаться в повышении кровяного давления, изменении температуры тела, изменении пульса или других физиологических показателях. Степень реакции зависит от назначенной дозы *x* лекарств. Предположим, что степень реакции *у* описывается функцией *у = kx2(a – x)*, где *k* и *a* – некоторые постоянные. (Значение постоянной *k* зависит от индивидуума, а значение постоянной *а* – от вида лекарства). При каком значении *х* реакция максимальна?

Решение задачи сводится к нахождению такого значения *х*, при котором функция *у* принимает свое наибольшее значение на отрезке [0; *a*].

Ответ: .

З а д а ч а № 31. Реакция организма на два лекарства как функции от t составляют *r1(t)=te-t r2(t)=t2e-t* (время *t* выражается в часах). У какого из лекарств выше максимальная реакция? Какое из лекарств медленнее в своем воздействии?

Решение задачи сводится к нахождению и сравнению наибольших значений функций *r1(t)* и *r2(t)* на луче [0; + ∞). Отметим, что, поскольку максимальная реакция организма на 1-е лекарство наступает через час, а на 2-е – через 2 часа, то второе лекарство действует медленнее.

Ответ: *r1наиб=r1(1)=e-1<r2наиб=r2(2)=4e-2.* У 2-го лекарства максимальная реакция выше, но оно действует медленнее.

З а д а ч а № 32. В питательную среду вносят популяцию из 1000 бактерий. Численность *p(t)* популяции возрастает следующим образом:, где время t выражается в часах. Каков наибольший размер может достичь эта популяция?

Решение задачи сводится к отысканию наибольшего значения функции *p(t)* на луче [0; + ∞).

Ответ: *pнаиб=p(10)=1050* шт.

Задача № 33. Скорость роста у популяции задана формулой *y=0,001t(100 – t)*, где время *t* выражается в днях. Через сколько дней скорость роста популяции станет максимальной?

Решение задачи сводится к нахождению такого значения t, при котором функция *у* принимает свое наибольшее значение на луче [0; + ∞). Из равенства

*y=0,001t(100–t)=0,001(502 – (50 – t)2)* следует, что функция у принимает свое наибольшее значение при *t=50*.

Ответ: 50 дней.

Задача № 34. Популяция бактерий изменяется от начального размера в 1000 особей до размера *p(t)* в момент времени *t* (*t* измеряется в днях) в следующей зависимости: . Найти скорость роста *p' (t)* популяции. Когда эта скорость максимальна?

Решение задачи сводится к нахождению такого значения t, при котором функция *f(t)= p' (t)* принимает свое наибольшее значение на луче [0; + ∞).

Ответ: *t=ln 9; p'наиб=p'(ln 9) = 2500.*

ЭКОНОМИКА.

З а д а ч а № 35. Стоимость бриллианта пропорциональна квадрату его массы. При обработке бриллиант был расколот на две части. Каковы размеры частей, если известно, что при этом произошла максимальная потеря стоимости?

Пусть *m* –масса исходного бриллианта, а *х* – масса одной из отколовшихся частей. Решение задачи сводится к нахождению такого значения *х*, при котором функция

*f(x)=km2 – kx2 – k(m – x)2* достигает своего наибольшего значения на отрезке [0; *m*].

Ответ: *x=m-x=m/2.*

З а д а ч а № 36. Прямоугольный участок площадью 9000 м2 требуется огородить забором, две противоположные стороны которого каменные, а две другие – деревянные. Один погонный метр каменного забора стоит 2500 руб., а деревянного – 1000 руб. Какое наименьшее количество денег должно быть выделено на строительство этого забора?

Решение задачи сводится к нахождению наименьшего значения функции  на луче (0; + ∞).

Ответ: 600000 руб.

Задача № 37. Требуется изготовить открытый цилиндрический бак данного объёма *V*, причем стоимость 1 кв.м. материала, из которого изготавливается дно бака равна *р1* руб., а стоимость 1кв.м. материала, идущего на стенки бака, равна *р2* руб. При каком отношении радиуса дна к высоте бака затраты на материал будут наименьшими?

Пусть *х* – радиус дна бака, а *Н* – его высота. По условию задачи *V=πx2H*. Значит , и поэтому стоимость материала, идущего на изготовление всего бака, равна .

Таким образом, решение задачи сведено к нахождению такого значения *х* (и, следовательно, *Н*), при котором функция *f(x)* принимает свое наименьшее значение на луче (0; + ∞).

Ответ: 

З а д а ч а № 38. а) Совхоз хочет расчистить поле в виде прямоугольного участка с присоединенным к одной из его сторон полукруглым участком. Прямоугольный участок планируется отвести под сено, дающее доход в 5 руб. на 1 м2, а полукруглый участок – под рис, дающий доход в 6руб. на 1 м2. Периметр поля должен быть равен 800 м. Как надо спланировать поле, чтобы получить наибольший доход?

б) Предположим, что участок, засеянный рисом, дает доход в 10руб. на 1 м2. Какова будет теперь форма поля?

Пусть *х* – радиус полукруглого участка. Тогда *2х* – ширина прямоугольного участка, а  – длина прямоугольного участка.

а) Решение задачи сводится к нахождению такого значения *х*, при котором функция  достигает своего наибольшего значения на отрезке [0; ].

б) То же для функции  на том же отрезке.

Ответ: а) 

б) 

З а д а ч а № 39. Требуется облицевать плиткой стенки и дно открытого бассейна объёмом 81 м3. Стоимость облицовки 1 м2 дна бассейна равна 9 т.руб, а 1 м2 стенки – 12 т руб. При каких размерах бассейна стоимость его облицовки будет минимальной? Чему равна эта минимальная стоимость? Предполагается, что дно бассейна – квадрат.

Пусть *х* – длина стороны дна бассейна, а Н – его глубина. Тогда  .Так что стоимость облицовки бассейна равна: .

Таким образом, решение задачи сведено к нахождению наименьшего значения функции *f(x)* на луче (0; + ∞).

Ответ: *х* = 6 м; *H* = 2,25 м; *fнаим*= 972 руб.

З а д а ч а № 40. а) Суточные расходы при плавании корабля состоят из двух частей: постоянной, равной *с* руб., и переменной, возрастающей пропорционально кубу его скорости. Коэффициент пропорциональности равен *k*. При какой скорости *υ* плавание корабля будет наиболее экономичным, т.е. общая сумма расходов на 1км пути будет наименьшей?

б) Расходы на топливо для топки судна пропорциональны кубу его скорости. Известно, что при скорости 10 км/ч они составляют 300 руб/ч; остальные расходы, не зависящие от скорости, составляют 4800 руб/ч. При какой скорости судна общая сумма расходов на 1 км пути будет наименьшей? Какова будет при этом общая сумма расходов в час?

а) Постоянные расходы составляют . Значит, общая сумма расходов за один час пути равна  руб., а общая сумма расходов на 1 км пути равна  руб. Таким образом, решение задачи сведено к нахождению такого значения *υ*, при котором функция  принимает свое наименьшее значение на луче (0; + ∞).

б) См. указание к п. а). Значение постоянной с определяется из равенства = 4800,а значение коэффициента *k* – из равенства 300 = *k*\*103

Ответ: а) .

б) 20 км/ч; 432 руб/ч.

З а д а ч а № 41. Завод *А* отстоит на 60 км, считая по кратчайшему расстоянию, от железной дороги, идущей с юга на север и проходящей через город *В*. Под каким углом γ к железной дороге следует достроить подъездной путь от завода с тем, чтобы перевозка грузов из *A* в *В* была наиболее экономичной, если учесть, что стоимость перевозки одной тонны груза на расстояние в 1 км составляет по подъездному пути 20 руб., а по железной дороге –10 руб. и город *В* расположен на 120 км севернее завода *А*?



По условию задачи |*AC*|=60, |*BC*|=120. Обозначим |*CE*|=*x.* Тогда стоимость перевозки одной тонны груза по ломанной AEB равна  . Таким образом, решение задачи сведено к нахождению такого значения *х*, при котором функция *f(x)* принимает на отрезке [0; 120] свое наименьшее значение. (Искомое же значение величины угла γ определяется условием ).

Ответ: 

З а д а ч а № 42. а) Коксовая печь, работающая при температуре 500 ºС, производит 100 м3 газа в минуту. Это количество увеличивается на 0,2 м3/мин при увеличении температуры Т на 1 ºС вплоть до 750 ºС. Свыше 750 ºС повышение температуры *Т* на 1ºС вызывает увеличение производительности печи на 0,25 м3/мин. Эксплуатация печи в течение часа при температуре *Т* ºС, где Т ≥ 500 обходится в *1000+(0,1Т – 100)2* руб. Какова наиболее выгодная температура эксплуатации печи?

б) До введения усовершенствований в методах получения газа при высоких температурах количество газа, производимое описанной выше печью, возрастало лишь на 0,1 м3/мин при повышении температуры на 1 °С свыше 750 ºС. Какова была тогда наиболее выгодная температура эксплуатации печи?

а) В I мин при температуре *Т* ºС печь производит *V(Т)*  м3 газа, где .

Стоимость эксплуатации печи в течение 1 мин равна: руб. Значит, стоимость производства 1 м3 газа при температуре *Т* ºC равна: 

Таким образом, решение задачи сведено к нахождению наименьшего значения функции *f(Т)* на луче [500; + ∞).

б) В обозначениях п. а) имеем:





Так что, как и выше, решение задачи сведено к отысканию наименьшего значения функции *f(x)* на луче [500; +∞).

Ответ: а) *fнаим≈f(1080)=0,082*; б) *fнаим≈f(1000)=0,095.*

РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ.

З а д а ч а № 43. При каком диаметре круглого отверстия в плотине расход *Р* воды будет иметь наибольшее значение, если, где *у* – диаметр отверстия, *Н* – глубина низшей точки отверстия и *с* – коэффициент пропорциональности (*с* и *Н* – постоянные)?

Решение задачи сводится к нахождению такого значения *у*, при котором функция

*Р (у)* = принимает свое наибольшее значение на отрезке [0; H].

Ответ: .

З а д а ч а № 44. Коридор шириной  м пересекает второй коридор под прямым углом. По полу первого коридора тянут прямолинейный кусок трубы длиной 8 м (шириной трубы мы пренебрегаем). Какова должна быть ширина второго коридора, чтобы можно было вытащить в него трубу ?



Решение задачи сводится к нахождению наименьшего значения функции на промежутке (0; ).

Ответ:

З а д а ч а № 45. От канала шириной 2,7 м под прямым углом к нему отходит канал шириной 6,4м. Стенки каналов прямолинейны вплоть до вершины угла. Найти наибольшую длину бревна, которое можно сплавить по этим каналам из одного в другой.



Решение задачи сводится к нахождению наименьшего значения функции  на промежутке (0; ).

Ответ: 12,5 м.

З а д а ч а № 46. При подготовке к экзамену студент за *х* дней изучает  – ю часть курса и забывает – ю часть. Сколько дней нужно затратить на подготовку, чтобы была усвоена наибольшая часть курса?

За *х* дней студент усваивает  *–* ючасть курса. Таким образом, задача сведена к нахождению такого значения х, при котором функция  принимает свое наибольшее значение на луче [0; + ∞).

Ответ: 4 дня.

З а д а ч а № 47. Человек, страдающий сенной лихорадкой, обнаружил, что достигающее его количество пыльцы от данного источника (например, от леса, в котором растут нежелательные для больного деревья) прямо пропорционально интенсивности источника пыльцы (скажем, количеству этих деревьев) и обратно пропорционально расстоянию от источника. К сожалению, больной должен жить где-либо на отрезке, соединяющем два источника пыльцы, отстоящие друг от друга на расстоянии 1км. Один источник в 4 раза интенсивнее другого. Где должен поселиться человек, чтобы испытывать наименьшее неудобство?

*Примечание. Сенная лихорадка – заболевание аллергического характера, вызываемое пыльцой определенного вида растений.*



По условию задачи |*AB*| = 1. Обозначаем |*AM*| = *x.*

Тогда количество пыльцы, достигающее т. *М* от обоих источников *А* и *В*, равно: .

Таким образом, решение задачи сведено к нахождению такого значения *х*, при котором функция *f(x)* принимает свое наименьшее значение на промежутке (0; l) .

Ответ:  км.