**Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение**

**«Средняя общеобразовательная школа № 6»**

**муниципального образования город Ноябрьск**

**«Готовимся к ЕГЭ по математике. Инвариант при решении задач с параметрами»**

Подготовила учитель математики МБОУ СОШ №6

Милько Татьяна Васильевна

Город Ноябрьск ЯНАО

2013 год

**Готовимся к ЕГЭ. Инвариант при решении задач с параметрами.**

Успешная сдача ЕГЭ по математике зависит от умения решать задания уровня С. Основные трудности вызывают решения задач содержащих параметры как в логическом, так и в техническом плане (и не только у учащихся). В литературе по элементарной математике и сети Интернет есть немало методических и практических пособий по решению задач с параметрами. Но на сегодняшний день **нет** ни одного школьного учебника по математике, который содержал бы **систему** подготовки к решениюзадач спараметрами.

Первые представления о задачах с параметрами учащиеся получают при решении линейных, а затем квадратных уравнений (VII-VIII класс), и вместе с элементарными понятиями равносильности уравнений и неравенств, происходит закладка первичных навыков решения таких задач. И мы, учителя, на факультативных занятиях (если в программе не заложены часы на изучение задач с параметрами) в первую очередь дать знания о методах и основных типах решения таких задач, научить специальной форме записи ответа.

К основным типам задач с параметрами следует отнести: 1) задачи, в которых требуется найти количество решений в зависимости от параметра; 2) задачи, в которых находят множество решений, удовлетворяющих заданным условиям; 3) задачи, которые необходимо решить для всех значений параметра из заданного промежутка; 4)задачи, где необходимо найти значения параметра, при которых задача имеет заданное количество решений. К основным методам относим: алгебраический, графический, функциональный, функционально-графический, геометрический.

Остановлюсь на инварианте, одном из алгебраических методов при решении задач с параметрами, методе, который будет полезен для всех участников учебного процесса.

***Инвариантность***в математическом смысле – неизменность какой-либо величины по отношению к некоторым преобразованиям.

***Инварианты***(от лат. invarians - неизменяющийся), числа, алгебраические выражения и т. п., связанные с каким-либо математическим объектом и остающиеся неизменными при определённых преобразованиях этого объекта или системы отсчёта, в которой описывается объект.

При решении определённого типа задач можно рассматривать следующие инварианты:

«симметрия относительно знака переменной» (условие задачи не изменится, если заменить знак одной или нескольких переменных противоположным);

«симметрия относительно перестановки переменных» (условие задачи не изменится при перестановке переменных, либо при замене переменной на некоторое выражение с переменной).

***Алгоритм решения задач с параметрами с помощью инварианта:***

1)проверить на инвариантность данное уравнение, неравенство, систему уравнений (неравенств);

2)найти допустимые значения параметра из проверки выполнения условий: при «симметрии относительно знака переменной» подставить её нулевое значение; при «симметрии относительно перестановки переменных» все переменные обозначают одной буквой;

3) проверкой убедиться, что найденные значения параметра удовлетворяют условию задачи;

4) записать ответ.

При решении будем использовать следующие утверждения:

***Утверждение 1***. Если выражение fинвариантно относительнопреобразования (-) и уравнение f= 0 имеет корень ,то - также корень этого уравнения.

***Утверждение 2.*** Если выражение F() инвариантно относительно преобразования  (-) и уравнение F(=0 имеет решение (), то и пара чисел (-) также решение этого уравнения.

***Утверждение 3****.*Если выражение F( инвариантно относительно преобразования  и уравнение F(=0 имеет решение (), то и пара чисел () также решение этого уравнения.

***Утверждение 4.***Если выражение F(инвариантно относительно преобразования  и ,а уравнение F(=0 имеет решение () то и пара чисел ( также решение этого уравнения.

***Утверждение 5.***Если выражение f инвариантно относительно преобразования g(, уравнение f() =0 имеет корень , то g() также корень этого уравнения.

Рассмотрим примеры.

**Пример 1.** При каких значениях параметра  система уравнений

(1) имеет единственное решение?

*Решение*. Применяем алгоритм.

В силу чётности , и  данная система уравнений инвариантна при замене  на (-.

Проверяем:

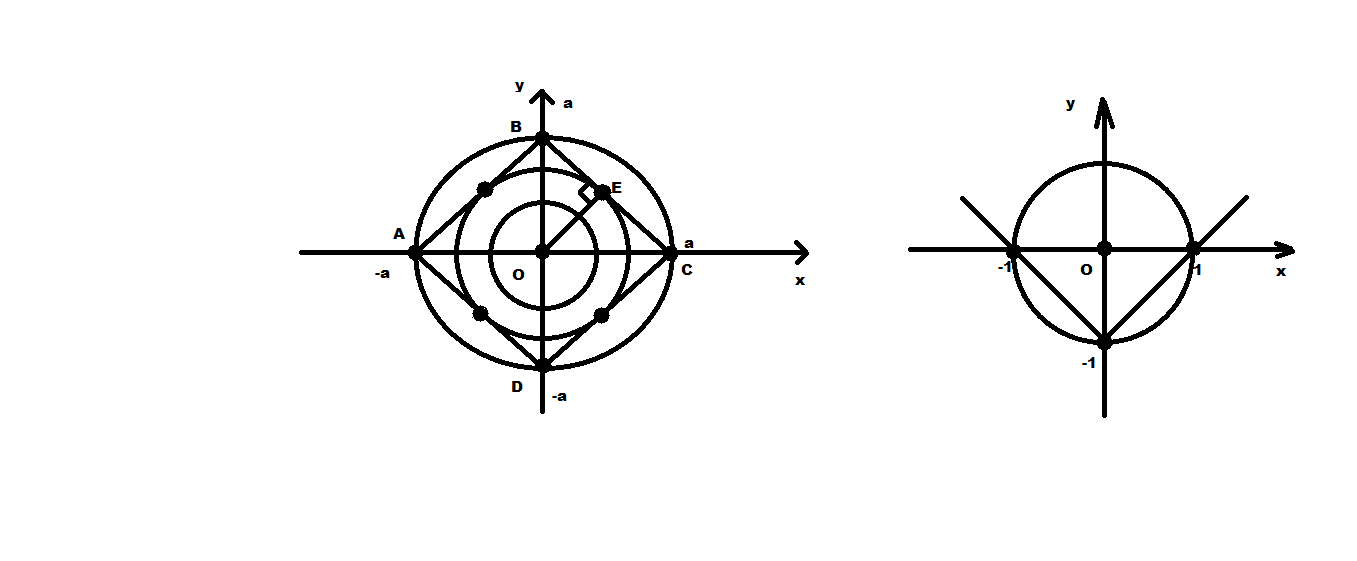
Пусть искомое значение параметра, –решение системы, тогда также решение системы и т.к. по требованию задачи решение единственное, то (Утверждение 2).

Подставим в систему (1). Получим:

Проверим, имеет ли система при найденных значениях параметра  единственное решение:

а) при  = 2

Из первого уравнения системы следует, что а со второго ; ;

Если система имеет решение, то это пары вида (;1).

Система имеет единственное решение: (0;1);

б) при =0

Как видно из графической интерпретации система имеет три решения: (-1;0) , (0;-1) и (1;0). Значит, =0 не подходит.

Ответ: =2.

**Пример 2.** Прикаких значениях  уравнение + 2+2=0 имеет единственное решение?

*Решение.*

1)Данное уравнение инвариантно при замене на - в силу чётности и

+2+2=0, то есть +2+2=0.

2)Имеем «симметрию относительно знака». Значит, если – единственный корень данного уравнения, то -  также корень этого уравнения при искомом . Значит,  = -=0. (Утверждение 1).

Если =0, то 2+2=0  (2+) =0 

3)Проверим, имеет ли данное уравнение при найденных значениях  единственное решение:

а) при =0; =0  =0 – единственное решение;

б) при  = -2 получим:

 - 4= 0 или  + 4 (1)

Так как - 1 ≤ ≤ 1, то (-1) ≤ () ≤ , т.е. 1 ≤ () ≤

0 ≤ 1 - () ≤ > 0

Значит, левая часть уравнения (1) неотрицательна, а правая – равна 0.

Значит, уравнение (1) равносильно системе:

 =0,   = 0,

1 () = 0 1 () = 0 (в).

= 0 – единственное решение уравнения.

Ответ:  = 0;  = - 2 1.

**Пример 3.** При каких значениях параметра система неравенств имеет единственное решение?

*Решение.*1. В данной системе наблюдаем «симметрию относительно замены переменных». Тогда, если –решение системы, то и также решение системы. Единственность решения достигается при условии (Утверждение 4).

2. Обозначив все переменные через  Из неравенства которое имеет единственное решение, если дискриминант квадратного трёхчлена равен нулю, т.е. 

3. Проверим, имеет ли система единственное решение при найденных значениях параметра.

а) Подставим в данную систему неравенств :



Сложим неравенства последней системы: +

Раскрыв скобки и приведя подобные слагаемые, получим: . Отсюда - единственное решение.

б) При подстановке получим единственное решение 

Ответ: 

**Пример 4.** Найдите все значения параметра , при которых система уравнений 

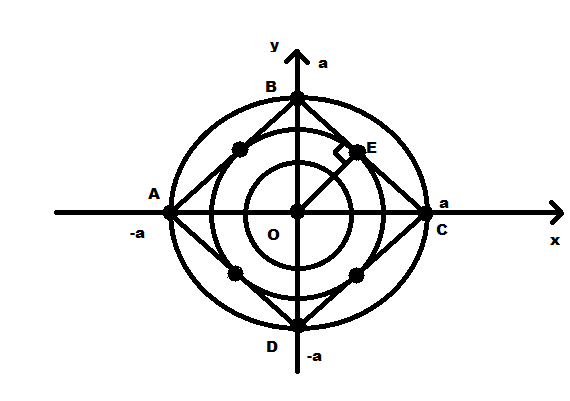
имеет четыре различных решения.

Решение.

Из вида системы следует, что> 0.

1.Система инвариантна при замене на - и на -.

Поэтому, если  искомое значение параметра и пара чисел ;- решение системы, то пары ;, ;и ; - также решения системы. (Утверждения 2и3). Поэтому найдем решения при  ≥ 0, ≥0. Изобразим графики уравнений в одной системе координат. График первого уравнения – точки сторон квадрата АВСД, график второго - окружность с центром в начале координат и радиусом, равным . По рисунку видно, что система имеет ровно четыре решения в двух случаях: 1) = 3 = 1;  = 1; 2) = 0E - радиус окружности, вписанной в квадрат, -его сторона по т. Пифагора из треугольника ВОС.

Значит, 0Е = , тогда  = откуда 2 = 2; 2 =и  = .

Ответ:  = 1;  =.

**Пример 5**. При каких значениях  уравнение  имеет единственный корень?

*Решение.*  1. Так как 

то уравнение инвариантно при замене х на -х. Имеем «симметрию относительно знака».

Если корень уравнения, то и  корень уравнения. (Утверждение 1). Значит, , т.е. 

2. Если  то данное уравнение принимает вид:

3. Если , то 

Покажем, что при корень уравнения единственный. Запишем уравнение в виде  Левая часть этого уравнения Оценим правую часть:

т.к. , то ; . Значит,

Тогда данное уравнение равносильно системеСледовательно, других решений нет. Ответ: 

**Пример 6.** При каких значениях параметра  система уравнений имеет ровно три решения?

*Решение.*1. Если пара чисел ;– решение системы, - искомый параметр, то пара

; - – также решение системы. Значит, = - = 0.(Утверждение 3).

2.Подставим = 0 в данную систему уравнений.

Получим:



Проверим, имеет ли данное уравнение при найденных значениях  единственное решение. При =-3 имеем: 

Решим второе уравнение системы:







или  не имеет решений.

Если у=0, то х=5 и (-5; 0) – единственное решение системы. Значит,  не подходит.

б) При имеем:  

Из второго уравнения последней системы получим три корня: у=0, у=1,2; у=-1,2.

 Система имеет ровно три решения.

Ответ: .

**Источники информации:**

1.Математика. ЕГЭ. Решение задач уровня С3: учебное пособие/ А.Ж.Жафяров.- Новосибирск-2010.

2.Решение задач с параметрами. Теория и практика. В.В.Мирошин - М.:Экзамен,2009-281с.

3.Математический энциклопедический словарь. Главный редактор Ю.В. Прохоров. Москва. «Советская Энциклопедия». 1988

4.www.alexlarin. narod .ru

Подготовила Милько Т.В., учитель математики МБОУ СОШ №6 ,г. Ноябрьск.