**Департамент по образованию администрации  
муниципального образования г. Ноябрьск  
Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение**

**« Средняя общеобразовательная школа №6 »**

**Научное направление: Математика**

**Теорема Пифагора**

**Автор работы: Будз Ярослав  
 МБОУ СОШ №6 8 а класс  
 Научный руководитель:  
 Милько Т. В.**

**О г л а в л е н и е**

**Введение……………………………………………………………………………………………3**

**Основная часть**

**1. О Пифагоре……………………………………………………………………………………...4**

**2. О теореме Пифагора: история теоремы, названия,**

**способы и примеры доказательств……………………………………………………………..5**

**3. Анализ доказательств теоремы…………………………………………………………..….5-11**

**4. Области применения теоремы:**

**а) математика………………………………………………………………………………..…..12**

**б) физика………………………………………………………………………………………….12**

**в) астрономия…………………………………………………………………………………….13-14**

**г) строительство и архитектура……………………………………………………………….15**

**д) лесная промышленность…………………………………………………………………….16**

**е) строительство дорог и перевозка грузов…………………………………………………..16-19**

**ж)бытовая сфера: а) молниеотводы………………………………………………………….19**

**б) установка шкафа-купе……………………………………………........19-20**

**Заключение…………………………………………………………………………………………..21**

**Информационные источники……………………………………………………………………..22**

**Приложение………………………………………………………………………………………….23-28**

**Введение**

***Цель работы:* найти ответ на вопрос: почему на протяжении**

**многих веков теорема Пифагора не теряет своей актуальности.**

***Задачи:* 1. Проанализировать источники возникновения теоремы и**

**способы ее доказательств;**

**2. Исследовать практическое применение теоремы**

**в различных сферах человеческой жизни.**

***Гипотеза:* если теорема Пифагора так популярна и**

**сегодня, то в ней заложены такие основы, которые**

**позволяют использовать её в широком диапазоне: от науки**

**до быта.**

***Методы исследования:*1*.* Изучение доступных источников**

**информации по теме и их анализ. 2. Социальный опрос.**

***Актуальность:*1.Зная теорему Пифагора, можно находить её новые применения и способы доказательств.**

**2.Материалы работы могут использовать учителя, а также учащиеся с целью систематизации и углубления знаний по геометрии.**

**Основная часть.**

**О Пифагоре**.

Пифагор – древнегреческий философ, математик, астроном. Обосновал многие свойства геометрических фигур, разработал математическую теорию чисел и их пропорций.Внёс значительный вклад в развитие астрономии и акустики. Автор «Золотых стихов», основатель пифагорейской школы в Кротоне.

По преданию Пифагор родился около 580 г. до н. э. на острове Самос в богатой купеческой семье. Его мать – Пифазис, получила свое имя в честь Пифии, жрицы Аполлона. Пифия предсказала Мнесарху и его жене появление на свет сына, сын также был назван в честь Пифии. По многим античным свидетельствам мальчик был сказочно красив и вскоре проявил свои незаурядные способности. Первые познания получил от своего отца Мнесарха, ювелира, резчика по драгоценным камням, который мечтал, что сын станет продолжателем его дела. Но жизнь рассудила иначе. Будущий философ обнаружил большие способности к наукам. Среди учителей Пифагора были ФерекидСиросский и старец Гермодамант. Первый привил мальчику любовь к науке, а второй - к музыке, живописи и поэзии. Впоследствии Пифагор познакомился известным философом – математиком Фалесом Милетским и по его совету отправился в Египет – центр тогдашней научной и исследовательской деятельности. Прожив 22 года в Египте и 12 лет в Вавилоне, он вернулся на остров Самос, затем покинул его по неизвестным причинам и переехал в город Кротон, на юг Италии. Здесь он создал пифагорейскую школу (союз), в которой изучали различные вопросы философии и математики. В возрасте примерно 60 лет Пифагора женился на Феано, одной из своих учениц. У них рождены трое детей, и все они становятся последователями своего отца. Исторические условия того времени характеризуются широким движением демоса против власти аристократов. Спасаясь от волн народного гнева, Пифагор и его ученики переехали в город Тарента. По одной версии: к нему пришел Килон, богатый и злой человек, желая спьяну вступить в братство. Получив отказ, Килон начал борьбу с Пифагором. При пожаре ученики своей ценой спасли жизнь учителю. Пифагор затосковал и вскоре покончил жизнь самоубийством.

Следует отметить, что это один из вариантов его биографии. Точные даты его рождения и смерти не установлены, многие факты его жизни противоречивы. Но ясно одно: этот человек жил, и оставил потомкам большое философское и математическое наследие

**Теорема Пифагора.**

Теорема Пифагора - важнейшее утверждение геометрии. Теорема формулируется следующим образом: площадь квадрата, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника, равна сумме площадей квадратов, построенных на его катетах.

Открытие этого утверждения приписывают Пифагору Самосскому (XII в. до н. э.)

Изучение вавилонских клинописных табличек и древних китайских рукописей (копий еще более древних манускриптов) показало, что знаменитая теорема

была известна задолго до Пифагора, возможно несколько тысячелетий до него.

( Но есть предположение, что Пифагор дал ее полноценное доказательство)

Но есть и другое мнение: в пифагорейской школе был замечательный обычай приписывать все заслуги Пифагору и несколько не присваивать себе славы первооткрывателей, кроме, может быть нескольких случаев.

(Ямвлих-сирийский грекоязычный писатель, автор трактата «Жизнь Пифагора». (II век н. э)

Так немецкий историк математики Кантор считает, что равенство 32 + 42=52 было

известно египтянам около 2300 лет до н. э. во времена царя Аменехмета (согласно папирусу 6619 Берлинского музея ). Одни полагают, что Пифагор дал теореме полноценное доказательство, а другие отказываю ему в этой заслуге.

Некоторые приписывают Пифагору доказательство, которое Евклид приводил в своих «Началах». С другой стороны Прокл (математик, 5 века) утверждает, что

доказательство в «Началах» принадлежало самому Евклиду, то есть история математики почти не сохранила достоверных данных о математической деятельности Пифагора. В математике, пожалуй, не найти никакой другой теоремы, заслуживающей всевозможных сравнений.

В некоторых списках «Начал» Евклида эта теорема назвалась «теоремой нимфы» за сходство чертежа с пчелкой, бабочкой(«теорема бабочки»), что по гречки назвалось нимфой. Этим словом греки назвали еще некоторых богинь, а также молодых женщин и невест. Арабский переводчик не обратил внимания на чертеж и перевел слово «нимфа» как «невеста». Так появилось ласковое название «теорема невесты». Существует легенда, что когда Пифагор Самосский доказал свою теорему, он отблагодарил богов, принеся в жертву 100 быков. Отсюда еще одно название- «теорема ста быков».

В англоязычных странах ее назвали: «ветряная мельница», «павлиний хвост», «кресло невесты», «ослиный мост» (если ученик не мог через него «перейти», значит, он был настоящим « ослом»)

В дореволюционной России рисунок теоремы Пифагора для случая равнобедренного треугольника называли «пифагоровыми штанами».

Эти «штаны» появляются, когда на каждой стороне прямоугольного треугольника построить квадраты во внешнюю сторону.

Сколько существует различных доказательств теоремы Пифагора?

Со времен Пифагора их появилось более 350.Теорема попала в Книгу рекордов Гиннеса. Если проанализировать доказательства теоремы, то принципиально различных идей в них используется немного.

[www.openclass.ru](file:///G:\www.openclass.ru)

<http://edu.glavsprav.ru/info/teorema-pifagora/>

[moypifagor.narod.ru](http://www.moypifagor.narod.ru/)

Доказательства теоремы можно разделить на три группы:

#### Аддитивные Метод достроенияМетод вычитания

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| |  | | --- | | *Основаны на разложении квадратов, построенных на катетах, на фигуры, из которых можно сложить квадрат, построенный на гипотенузе:*  *а)Доказательство Эйнштейна и др.* | | |  | | --- | | *К квадратам, построенным на катетах, и к квадрату, построенному на гипотенузе, присоединяют равные фигуры таким образом, чтобы получились равновеликие фигуры.* | |

**Метод разложения**

**Алгебраический метод**

**Векторный метод**

**Метод подобия**

3) У индийского математика Бхаскары (xii век) находим фигуру. Под рисунком одно слово «Смотри». Фигуру явно легко расшифровать.



Такое же доказательство повторяется в книге итальянского математика Леонарда Пизанского (известного как Фибоначчи). «Практическая геометрия» (1220 г.)

В своей работе я привожу несколько доказательств этой теоремы

[www.student.km.ru](file:///G:\www.student.km.ru)

[th-pif.narod.ru](http://th-pif.narod.ru/)

<http://www.clascalc.ru/pithagorean-theorem.htm>

[www.moypifagor.narod.ru](file:///G:\www.moypifagor.narod.ru)

**Геометрическое доказательство**

Дано: треугольник АВС – прямоугольный треугольник.

Доказать: ВС² = АС² + АВ²

В

Е

А С D

Рис. 4

Доказательство:

I. Дополнительное построение:

1) Построим отрезок CD равный отрезку АВ прямоугольного треугольника АВС на продолжении катета АС;

2) Опустим перпендикуляр ED к отрезку AD равный отрезку АС прямоугольного треугольника АВС, DE ┴ AD;

3) Соединим точки В и Е и получим прямоугольную трапецию.

II. Площадь трапеции АВЕD равна сумме площадей трёх её треугольников ( АВС, CDE, ВСЕ)

Треугольники АВС, CDE являются равными, так как все стороны и углы этих треугольников равны. Площадь треугольника АВС = АВ\*АС, площади треугольников АВС и CDE = 2 АВ\*АС.

Треугольник ВСЕ – прямоугольный равнобедренный, так как ВС = СЕ (по построению). SВСЕ = ВС²/2

SABED = SABC + SCDE + SBCE

SABED = 2 SABC + SBCE

SABED = (2 АВ\*АС)/2 + ВС² / 2

1) SABED = АВ\*АС+ ВС² / 2

Фигура ABED является прямоугольной трапецией, значит, её площадь равна:

«Площадь трапеции равна произведению полусуммы её оснований на высоту». [[1]](#footnote-2)

2)SABED= (ED +АВ) \*AD /2

Приравняем равенства 1) и 2) и получим:

АВ\*АС+ ВС² /2 = (ED +АВ) \*AD /2

Заменим ADна АС + CD:

АВ\*АС+ ВС² /2 = (ED +АВ)(АС + CD) /2

Заменим (ED +АВ)(АС + CD) на (АС + АВ)², так как ED = АС, АВ = CD, поэтому выражение (ED +АВ)(АС + CD) равно:

(ED +АВ)(АС + CD) = (АС + АВ)²

АВ\*АС+ ВС² /2 = (АС + АВ)² /2

АВ\*АС+ ВС² /2 = (АС² + 2 АС\*АВ + АВ²) /2

АВ\*АС+ ВС² /2 = АС² /2 + 2 АС\*АВ /2 + АВ² /2

АВ\*АС+ ВС² /2 = АС² /2 + АС\*АВ + АВ² /2

ВС² /2 = АС² /2 + АВ² /2

Умножим ВС² /2 = АС² /2 + АВ² /2 на 2

2 ВС² /2 = 2 АС² /2 + 2 АВ² /2 Сократим все двойки этого выражения**:**

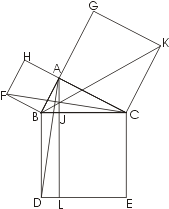
2 ВС² /2 = 2 АС² /2 + 2 АВ² /2. ВС² = АС²+ АВ².

**Доказательство Эвклида.**

Сумма площадей квадратов, построенных на катетах прямоугольного треугольника, равна площади квадрата, построенного на гипотенузе этого треугольника.

Приведём другое доказательство теоремы Пифагора, основанное не на вычислении площадей, а на непосредственном их сравнении между собой**.**

|  |
| --- |
| **Доказательство Эвклида**  Это доказательство было приведено **Эвклидом** в его "Началах". По свидетельству **Прокла (Византия)**, оно придумано самим Эвклидом. Доказательство Эвклида приведено в предложении 47 первой книги "Начал".На гипотенузе и катетах прямоугольного треугольника АВС строятся соответствующие квадраты и доказывается, что прямоугольник BJLD равновелик квадрату ABFH, а прямоугольник ICEL - квадрату АСКС. Тогда сумма квадратов на катетах будет равна квадрату на гипотенузе. |



В самом деле, треугольники ABD и BFC равны по двум сторонам и углу между ними:

FB = AB, BC = BD

РFBC = d + РABC = РABD

Но

SABD = 1/2 S BJLD,

так как у треугольника ABD и прямоугольника BJLD общее основание BD и общая высота LD. Аналогично

SFBC=1\2S ABFH

(BF-общее основание, АВ-общая высота). Отсюда, учитывая, что

SABD=SFBC,

имеем

SBJLD=SABFH.

Аналогично, используя равенство треугольников ВСК и АСЕ,доказывается**,** что

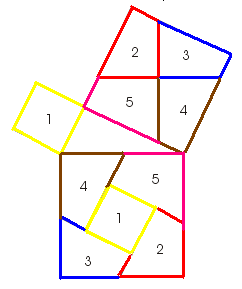
**SJCEL=SACKG.**

**Итак,**

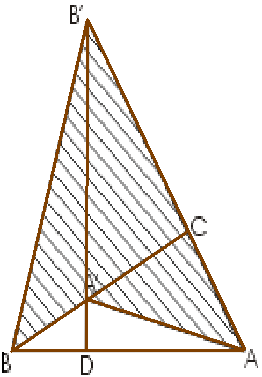
**SABFH+SACKG= SBJLD+SJCEL= SBCED, Что и требовалось доказать.**

**Доказательство Перигаля.**

На этом рисунке видим так называемое "колесо с лопастями"; это доказательство нашел Перигаль. Через центр O квадрата, построенного на большем катете, проводим прямые, параллельную и перпендикулярную гипотенузе. Соответствие частей фигуры хорошо видно из чертежа.



**Доказательство Хоукинса**

Приведу еще одно доказательство, которое имеет вычислительный характер, однако сильно отличаетсяот предыдущих. Оно опубликовано англичанином Хоукинсом в 1909 году; было ли оно известно до этого- трудно сказать.

* Прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C повернем на 90° так, чтобы он занял положение A'CB'. Продолжим гипотенузу A'В' за точку A' до пересечения с линией АВ в точке D. Отрезок В'D будет высотой треугольника В'АВ. Рассмотрим теперь заштрихованный четырехугольник A'АВ'В . Его можно разложить на два равнобедренных треугольника САA' и СВВ' (или на два треугольника A'В'А и A'В'В).
* SCAA'=b²/2
* SCBB'=a²/2
* SA'AB'B=(a²+b²)/2
* Треугольники A'В'А и A'В'В имеют общее основание с и высоты DA и DB, поэтому
* SA'AB'B=c\*DA/2+ c\*DB/2=c(DA+DB)/2=c²/2
* Сравнивая два полученных выражения для площади, получим:
* a²+b²=c²
* Теорема доказана.

В одиннадцатилетнем возрасте эту теорему доказал и Эйнштейн методом подобия.

А если говорить о наглядном иллюстрировании теоремы Пифагора, которое

поняли бы и младшие школьники, то можно применить взвешивание. Если из

картона вырезать три квадрата, стороны которых равнялись бы сторонам данного прямоугольного треугольника, и положить два меньших квадрата на одну чашку чувствительных весов, а на вторую-третий, то весы будут в равновесии.

Не менее интересна и арифметическая сторона теоремы Пифагора. Речь идет о

решениях уравнения x2 + y2 = z2 \* в целых числах. Это уравнение называют уравнением Пифагора, а треугольники с целочисленными сторонами – пифагоровыми треугольниками. Доказано, что уравнение \* имеет решения

x=m2-n2 ,y=2mn ,z=m2+n2 ( числа m и n разной четности).numbernautics.ru›content/view/411/

Обобщение проблемы пифагоровых треугольников привело к решению в целых числах уравненияxn+ yn= zn , где n -целое (\*\*). Такую задачу поставил французский математик Пьер Ферма (1601-1665)

Судя по записи на полях «Арифметики», Ферма нашел доказательство факта,

но среди его математического наследия оно не сохранилось.

Большая теорема Ферма не доказана до сих пор, но и не опровергнута

( чтобы ее опровергнуть, надо привести хотя бы один пример, когда уравнение имеет решение).

В средние века в некоторых странах, чтобы получить звание « магистра», нужно было найти своё собственное доказательство.

Значение теоремы Пифагора трудно переоценить. Она используется при доказательстве других теорем(формула Герона, теорема Паппа, теорема косинусов и др.) и решении задач, из неё получен ряд следствий.

«Важнейшие достижения геометрии связаны с обобщением теоремы Пифагора. В основе математического аппарата главных теорий современной физики – ***теории относительности и квантовой механики*** – лежат, можно сказать, ***обобщения теоремы Пифагора»*** (А.Д. Александров «Успехи математических наук5, 1962, т.17, №6 (108), с 170-171). А.Д. Александров - советский математик, академик СССР, его научные достижения относятся к геометрии.

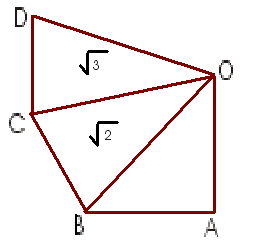
Гениальный создатель теории относительности Эйнштейн, установил органическую связь между пространством. Расстояние между событиями в пространстве - времени определяется интервалом, который имеет вид

ds2 =c2dt2 – (dx2 + dy2 + dz2 )- напоминает теорему Пифагора.

**Области применения теоремы.**

**.**Широкое применение имеет при решении **геометрических** задач.

Именно с ее помощью, можно геометрически находить значения квадратных корней из целых чисел:



Для этого строим прямоугольный треугольник АОВ (уголАравен 90°) с единичными катетами. Тогда его гипотенуза √2. Затем строим единичный отрезок ВС, ВС перпендикулярен ОВ, длина гипотенузы ОС=√3 и т.д.

(этот способ встречаем у Евклида и Ф. Киренского).

.

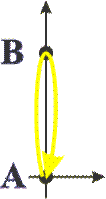
Задачи в курсе **физики** средней школы требуют знания теоремы Пифагора.

Это задачи связанные со сложением скоростей.

Обратите внимание на слайд: задача из учебника физики 9 класса .В практическом смысле её можно сформулировать так: под каким углом к течению реки должен двигаться катер, осуществляющий перевозку пассажиров между пристанями, чтобы уложиться в расписание?(пристани находятся на противоположных берегах реки)

Когда биатлонист стреляет по мишени, он делает «поправку на ветер». Если ветер дует справа, а спортсмен стреляет по прямой, то пуля уйдёт влево. Чтобы попасть в цель, надо сдвинуть прицел вправо на расстояние смещения пули. Для них составлены специальные таблицы ( на основе следствий из т. Пифагора). Биатлонист знает, на какой угол смещать прицел при известной скорости ветра.

**Астрономия –** также широкая область для применения теоремы

**Путь светового луча.** На рисунке показан путь светового луча от *A* к *B* и обратно. Путь луча показан изогнутой стрелкой для наглядности, на самом деле, световой луч - прямой.

***Какой путь проходит луч****?* Свет идет туда и обратно одинаковый путь. Чему равна половина пути, который проходит луч? Если обозначить отрезок *AB* символом *l*, половину времени как *t*, а также обозначив скорость движения света буквой *c*, то наше уравнение примет вид

*c \* t = l*

Это ведь произведение затраченного времени на скорость!

Теперь попробуем взглянуть на то же самое явление из другой системы отсчета, например, из космического корабля, пролетающего мимо бегающего луча со скоростью *v*. При таком наблюдении скорости всех тел изменятся, причем неподвижные тела станут двигаться со скоростью *v* в противоположную сторону. Предположим, что корабль движется влево. Тогда две точки, между которыми бегает зайчик, станут двигаться вправо с той же скоростью. Причем, в то время, пока зайчик пробегает свой путь, исходная точка *A* смещается и луч возвращается уже в новую точку *C*.

*Вопрос: на сколько успеет сместиться точка (чтобы превратиться в точку C), пока путешествует световой луч?* Точнее: чему равна половина данного смещения? Если обозначить половину времени путешествия луча буквой *t'*, а половину расстояния *AC* буквой *d*, то получим наше уравнение в виде:

*v \* t' = d*

Буквой *v* обозначена скорость движения космического корабля.

*Другой вопрос: какой путь при этом пройдет луч света?*(Точнее, чему равна половина этого пути?Чему равно расстояние до неизвестного объекта?)

Если обозначить половину длины пути света буквой *s*, то получим уравнение:

*c \* t' = s*

Здесь *c* - это скорость света, а *t'* - это тоже самое время, которое рассматривали выше.

Теперь рассмотрим треугольник *ABC*. Это равнобедренный треугольник, высота которого равна *l*, которое мы ввели при рассмотрении процесса с неподвижной точки зрения. Поскольку движение происходит перпендикулярно *l*, то оно не могло повлиять не нее.

Треугольник *ABC* составлен из двух половинок - одинаковых прямоугольных треугольников, гипотенузы которых *AB* и *BC* должны быть связаны с катетами **по теореме Пифагора**. Один из катетов - это *d*, которое мы рассчитали только что, а второй катет - это *s*, который проходит свет, и который мы тоже рассчитали.  
Получаем уравнение:

*s2 = l2 + d2*

Это ведь **теорема Пифагора**!

Явление **звёздной аберрации,** открытое в 1729 году, заключается в том, что все звёзды на небесной сфере описывают эллипсы. Большая полуось этих эллипсов наблюдается с Земли под углом, равным 20,5 градуса. Такой угол связан с движением Земли вокруг Солнца со скоростью 29,8 км в час. Чтобы с движущейся Земли наблюдать звезду, необходимо наклонить трубу телескопа вперёд по движению звезды, так как пока свет проходит длину телескопа, окуляр вместе с землёй перемещается вперёд. Сложение скоростейсвета и Земли производится векторно, используя т. Пифагора.U2=C2+V2

V

Труба телескопа

С-скорость света

Угол

C

u

V-скорость земли

В конце девятнадцатого века высказывались разнообразные предположения о существовании обитателей Марса подобных человеку, это явилось следствием открытий итальянского астронома Скиапарелли (открыл на Марсе каналы, которые долгое время считались искусственными). Естественно, что вопрос о том, можно ли с помощью световых сигналов объясняться с этими гипотетическими существами, вызвал оживленную дискуссию. Парижской академией наук была даже установлена премия в 100000 франков тому, кто первый установит связь с каким-нибудь обитателем другого небесного тела; эта премия все еще ждет счастливца. В шутку, хотя и не совсем безосновательно, было решено передать обитателям Марса сигнал в виде теоремы Пифагора.

Неизвестно, как это сделать; но для всех очевидно, что математический факт, выражаемый теоремой Пифагора, имеет место всюду, и поэтому похожие на нас обитатели другого мира должны понять такой сигнал.

**Мобильная связь**

Кто в современном мире не пользуется сотовым телефоном? Каждый абонент мобильной связи заинтересован в ее качестве. А качество в свою очередь зависит от высоты антенны мобильного оператора. Чтобы рассчитать, в каком радиусе можно принимать передачу, применяем **теорему Пифагора**.

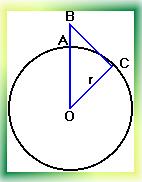
Какую наибольшую высоту должна иметь антенна мобильного оператора, чтобы передачу можно было принимать в радиусе R=200 км? (радиус Земли равен 6380 км.)

**Решение:**

 Пусть ***AB= x***, ***BC=R=200 км***, ***OC= r =6380 км.***

***OB=OA+AB  
OB=r + x.***

Используя теорему Пифагора, получим  **Ответ: 2,3 км.**



При строительстве домов и коттеджей часто встает вопрос и длине стропил

для крыши, если уже изготовлены балки.

При строительстве домов и коттеджей часто встает вопрос о длине стропил для крыши, если уже изготовлены балки. Например: в доме задумано построить двускатную крышу (форма в сечении). Какой длины должны быть стропила, если изготовлены балки AC=8 м., и AB=BF.

*Решение:*

     Треугольник ADC - равнобедренный AB=BC=4 м., BF=4 м. Если предположить, что FD=1,5 м., тогда:

     А) Из треугольника DBC: DB=2,5 м.

      Б) Из треугольника ABF:

Formula54

**Окна**

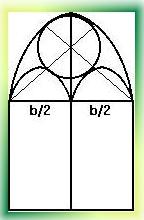
В зданиях **готического и романского стиля** верхние части окон расчленяются каменными ребрами, которые не только играют роль орнамента, но и способствуют прочности окон. На рисунке представлен простой пример такого окна в готическом стиле. Способ построения его очень прост: Из рисунка легко найти центры шести дуг окружностей, радиусы которых равны

ширине окна (b) для наружных дуг

половине ширины, (b/2) для внутренних дуг

Остается еще полная окружность, касающаяся четырех дуг. Т. к. она заключена между двумя концентрическими окружностями, то ее диаметр равен расстоянию между этими окружностями, т. е. b/2 и, следовательно, радиус равен b/4. А тогда становится ясным и

положение ее центра.



В **романской архитектуре** часто встречается мотив, представленный на рисунке. Если b по-прежнему обозначает ширину окна, то радиусы полуокружностей будут равны R = b / 2 и r = b / 4. Радиус p внутренней окружности можно вычислить из прямоугольного треугольника, изображенного на рис. пунктиром. Гипотенуза этого треугольника, проходящая через точку касания окружностей, равна b/4+p, один катет равен b/4, а другой b/2-p. По теореме Пифагора имеем:

(b/4+p)2=( b/4)2+( b/4-p)2

или

b2/16+ bp/2+p2=b2/16+b2/4 – bp/2 +p2,

откуда

bp/2=b2/4-bp.

Разделив на b и приводя подобные члены, получим:

(3/2)p=b/4, p=b/6.

**В лесной промышленности**: для потребностей строительства бревна распиливают на брус, при этом главная задача – получить как можно меньше отходов. Наименьшее число отходов будет тогда, когда брус имеет наибольший объем. Что же должно быть в сечении? Как видно из решения сечение должно быть квадратным, а **теорема Пифагора** и другие рассуждения позволяют сделать такой вывод.

**Брус наибольшего объема**

**Задача**

Из цилиндрического бревна надо выпилить прямоугольный брус наибольшего объема. Какой формы должно быть его сечение (рис. 23)?

**Решение**

Если стороны прямоугольного сечения х и y, то по теореме Пифагора

x2 + y2 = d2,

где d - диаметр бревна. Объем бруса наибольший, когда площадь его сечения наибольшая, т. е. когда ху достигает наибольшей величины. Но если ху наибольшее, то наибольшим будет и произведение х2y2. Так как сумма х2 + y2 неизменна, то, по доказанному ранее, произведение х2y2 наибольшее, когда

х2 = y2 или х = y.

Итак, сечение бруса должно быть квадратным.

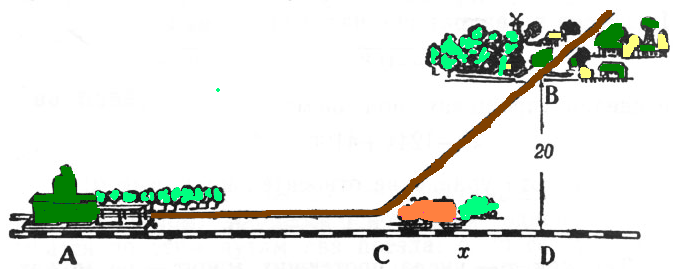


**Транспортные задачи**( так называемые задачи на оптимизацию; задачи, решение которых позволяет ответить на вопрос: как располагать средствами для достижения большой выгоды)

**Где устроить полустанок?**

**Задача**

В стороне от прямолинейного участка железнодорожного пути, в 20 км от него, лежит селение В. Где надо устроить полустанок С, чтобы проезд от A до B по железной дороге АС и по шоссе CB занимал возможно меньше времени? Скорость движения по железной дороге 0,8, а по шоссе 0,2 км/м.

****

**Решение**

Обозначим расстояние AD (от A до основания перпендикуляра BD к AD) через a, CD через х. Тогда

AC = AD - CD = a - x, а **CB = √(CD2 + BD2) = √(x2 + 202) (потеореме Пифагора)**

Время, в течение которого поезд проходит путь AC, равно

АС/0,8 = (a - x)/0,8.

Время прохождения пути СВ по шоссе равно

\_\_\_\_\_\_\_\_\_

СВ/0,2 = √(x2 + 202)/0,2.

Общая продолжительность переезда из A в B равна

\_\_\_\_\_\_\_\_\_

(a - x)/0,8 + √(x2 + 202)/0,2.

Эта сумма, которую обозначим через m, должна быть наименьшей.

Уравнение

\_\_\_\_\_\_\_\_\_

(a - x)/0,8 + √(x2 + 202)/0,2 = m

представляем в виде

\_\_\_\_\_\_\_\_\_

-x/0,8 + √(x2 + 202)/0,2 = m - a/0,8.

Умножив на 0,8, имеем:

\_\_\_\_\_\_\_\_\_

-x + 4√(x2 + 202) = 0,8m - a.

Обозначив 0,8m - а через k и освободив уравнение от радикала, получаем квадратное уравнение

15х2 - 2kx + 6400 - k2 = 0,

откуда

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

x = (k ± √(16k2 - 96000))/15.

Так как k = 0,8m - а, то при наименьшем значении m достигает наименьшей величины и k, и обратно\*. Но чтобы х было действительным, 16k2 должно быть не меньше 96000. Значит, наименьшая величина для 16k2 есть 96000. Поэтому m становится наименьшим, когда

16k2 = 96000,

откуда

\_\_\_\_

k = √6000,

и следовательно,

\_\_\_\_

x = (k ± 0)/15 = √6000/15 ≈ 5,16.

\* (Следует иметь в виду, что k> 0, так как

\_\_\_\_\_\_\_\_\_

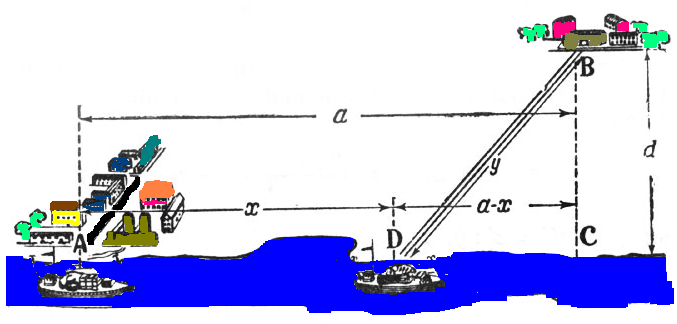
0,8m = а - х + 4√(x2 + 202) >a - х + х = а.

)

Полустанок должен быть устроен приблизительно в 5 км от точки D, какова бы ни была длина a = AD.

**Задача**

Из приречного города А надо направлять грузы в пункт В, расположенный на a км ниже по реке и в d километрах от берега. Как провести шоссе от В к реке, чтобы провоз грузов из А в В обходился возможно дешевле, если провозная плата с тонно-километра по реке вдвое меньше, чем по шоссе?

****

**Решение**

Обозначим расстояние AD через х и длину DB шоссе - через у: по предположению, длина АС равна а и длина ВС равна d.

Так как провоз по шоссе вдвое дороже, чем по реке, то сумма

х + 2у

должна быть согласно требованию задачи наименьшая. Обозначим это наименьшее значение через m. Имеем уравнение

х + 2у = m.

Но x = a - DC, a

\_\_\_\_\_\_\_\_

**DC = √y2 - d2;** наше уравнение получает вид

\_\_\_\_\_\_\_\_

а - √(у2 - d2) + 2у = m,

или по освобождении от радикала:

3у2 - 4(m - а)у + (m - a)2 + d2 = 0.

Решаем его:

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

y = 2/3(m - a) ± √((m - a)2 - 3d2)/3.

Чтобы y было действительным, (m - а)2 должно быть не меньше 3d2. Наименьшее значение (m - a)2 равно 3d2, и тогда

\_ \_

m - a = d√3, y = (2(m - a) + 0)/3 = 2d√3/3;

sin∠ BDC = d : y, т. е.

\_ \_

sin∠ BDC = d/y = d : 2d√3/3 = √3/2.

\_

Но угол, синус которого равен √3/2, равен 60°.

Значит, шоссе надо провести под углом в 60° к реке, каково бы ни было расстояние АС.

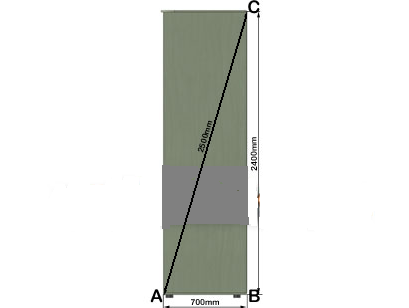
. Если пункт расположен так, что шоссе, проведенное под углом в 60° к реке, пройдет по ту сторону города А, то решение неприложимо; в таком случае надо непосредственно связать пункт В с городом А шоссе, вовсе не пользуясь рекой для перевозки.

Решение каждой из задач не обошлось без применения теоремы.

**Как рассчитать высоту шкафа-купе?**

На первый взгляд ничего особенного: снять размеры высоты от пола до потолка в нескольких точках, отнять несколько сантиметров, чтобы шкаф не упирался в потолок. Поступив так, в процессе сборки мебели могут возникнуть трудности. Ведь сборка каркаса мебельщики выполняют, располагая шкаф в горизонтальном положении, а когда каркас собран, поднимают его в вертикальное положение. Рассмотрим боковую стенку шкафа. Высота шкафа должна быть на 10 см меньше расстояния от пола до потолка при условии, что это расстояние не превышает 2500 мм. А глубина шкафа – 700 мм. Почему на 10 см, а не на 5 см или на 7, и причем здесь теорема Пифагора?

Итак: боковая стенка 2500-100=2400(мм)- максимальная высота конструкции.

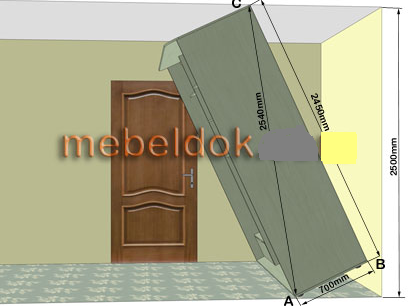


Боковая стенка в процессе подъема каркаса должна свободно пройти как по высоте, так и по диагонали. По **теореме Пифагора**

АС= √ АВ2 + ВС2

АС= √ 24002+ 7002 = 2500 (мм)

Что произойдет если высоту шкафа уменьшить на 50 мм?



АС= √ 24502+ 7002 = 2548 (мм)

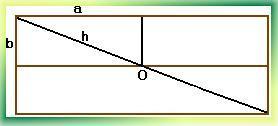
Диагональ 2548 мм. Значит, шкаф не поставишь (можно испортить потолок).

**Молниеотвод.**

Известно, что молниеотвод защищает от молнии все предметы, расстояние которых от его основания не превышает его удвоенной высоты. Необходимо определить оптимальное положение молниеотвода на двускатной крыше, обеспечивающее наименьшую его доступную высоту.

Решение:

      По теореме Пифагора *h2≥ a2+b2*, значит *h≥(a2+b2)1/2.*

****

Срочно на дачном участке надо сделать парник для рассады.

Из досок сбит квадрат 1м1м .Имеются остатки пленки размером1,5м1,5м. На какой высоте в центре квадрата надо закрепить рейку, чтобы плёнка полностью его покрыла?

**1)Диагональ парника d==1,4;0,7**

**2)Диагональ плёнкиd1=2,12 1,06**

**3) Высота рейки x=0,7**

**Выводы.**

**Изучение и анализ источников информации о теореме Пифагора**

**показал, что:**

**а**) исключительное внимание о стороны математиков и любителей математики к теореме основано на ее простоте, красоте и значимости;

**б**) с помощью этой теоремы можно вывести большинство теорем геометрии. (только 17 теорем Евклида исходят из теоремы Пифагора);

**в)** теорема Пифагора на протяжении многих веков служит толчком к интересным и важным математическим открытиям (теорема Ферма, теория относительности Эйнштейна);

**г**) теорема Пифагора – является воплощением универсального языка математики, справедливого во всем мире;

**д**) область применения теоремы достаточно обширная и вообще не может быть указана с достаточной полнотой;

**е**) тайны теоремы Пифагора продолжают волновать человечество и поэтому каждому из нас дают шанс быть причастным к их раскрытию.

**Информационные источники.**

1. Александр Данилович Александров (к пятидесятилетию со дня рождения),
2. «Успехи математических наук», 1962, т. 17, № 6 (108).
3. Александров А.Д., Вернер А.Л., Рыжик В.И. Геометрия, 10 – 11 кл. – М.: Просвещение, 1992.
4. Атанасян Л.С. и др. Геометрия, 10 – 11 кл. – М.: Просвещение, 1992.
5. Владимиров Ю.С. Пространство – время: явные и скрытые размерности. – М.: «Наука», 1989.
6. Волошин А.В. Пифагор. – М.: Просвещение, 1993.
7. Газета «Математика», № 21, 2006.
8. Газета «Математика», № 28, 1995.
9. Геометрия: Учеб. Для 7 – 11 кл. сред.шк./ Г.П. Бевз, В.Г. Бевз, Н.Г. Владимирова. – М.: Просвещение, 1992.
10. Геометрия: Учеб.для 7 – 9 кл. общеобразоват. Учреждений/ Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. – 6-е изд. – М.: Просвещение, 1996.
11. Глейзер Г.И. История математики в школе: IX – Xкл. Пособие для учителей. – М.: Просвещение, 1983.
12. Дополнительные главы к школьному учебнику 8 кл.: Учебное пособие для учащихся шк. и классов с углубл. изуч. математики /Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. – М.: Просвещение, 1996.
13. Еленьский Щ. По следам Пифагора. М., 1961.
14. Киселёв А.П., Рыбкин Н.А. Геометрия: Планиметрия: 7 – 9 кл.: Учебник и задачник. – М.: Дрофа, 1995.
15. Клайн М. Математика. Поиск истины: Перевод с англ. / Под ред. и предисл. В.И. Аршинова, Ю.В. Сачкова. – М.: Мир, 1998.
16. Литурман В. Теорема Пифагора. – М., 1960.
17. Математика: Справочник школьника и студента / Б. Франк и др.; Перевод с нем. – 3-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2003.
18. Пельтуер А. Кто вы Пифагор? – М.: Знание – сила, № 12, 1994.
19. Перельман Я. И. Занимательная математика. – М.: «Наука», 1976.
20. Пономарёва Т.Д. Великие учёные. – М.: ООО «Издательство Астрель», 2002.
21. Свешникова А. Путешествие в историю математики. – М., 1995.
22. Семёнов Е.Е. Изучаем геометрию: Кн. Для учащихся 6 – 8 кл. сред.шк. – М.: Просвещение, 1987.
23. Смышляев В.К. О математике и математиках. – Марийское книжное издательство, 1977.
24. Тучнин Н.П. Как задать вопрос. – М.: Просвещение, 1993.
25. Черкасов О.Ю. Планиметрия на вступительном экзамене. – М.: Московский лицей, 1996.
26. Энциклопедия для детей. Т. 11. Математика. /Глав. Ред. М.Д. Аксёнова. – М.: Аванта +, 2001.
27. Энциклопедический словарь юного математика. Сост. А.П. Савин. – М.: Педагогика, 1985.
28. www.narod.ru
29. www.ortoys.ru

30) http://www.mathsun.ru/pifagor.html

31) http://numbernautics.ru

**Приложение.**

**Венок следствий**

***Следствие теоремы Пифагора в стереометрии:***

С

с

b

О γ В

a

H

А

В прямоугольной пирамиде площадь любого из катетов меньше площади гипотенузы.

В прямоугольной пирамиде, изображённой на Рис. 12 аналог высоты – СН, так как СН ┴ АВ.

Обозначим SCOH = Н; SCAH = X; SCBH= Y, тогда Н2= 0, 25ОН2 \* ОС2. Заменим ОН2на произведение АН и НВ, а ОС2 – Sin2 γ и получим:

Н2 = 0,5АН \* СН\* 0,5 НВ \* СН \* Sin2 γ

В результате выражение принимает следующий вид:

Н2 = X \* Y \* Sin2 γ.

Выразим объём прямоугольной пирамиды через произведение площадей её катетов. Для удобства примем за основание пирамиды грань АОВ, тогда

V = 1/3 \* abc/2 = 1/6 abc = 1/6 \* √a2 b2 c2 = 2 √2 /6 \* √ab/2 \* bc/2 \* ac/2

V = √2 /3 \* √SAOB \* SBOC \* SAOC

Аналог теоремы косинусов для прямоугольной пирамиды: в прямоугольной пирамиде выполняется равенство:

S2AOC + S2BOC = S2ABC + S2AOB – 2SABC\* SAOB \* Cos γ, где γ – двухгранный угол между гранями АВС и АОВ.

А теперь узнаем о теореме Пифагора и определениях тригонометрических функций:

«Из теоремы Пифагора получено много следствий. Вот они:

1. В прямоугольном треугольнике любой из катетов меньше гипотенузы.
2. Косинус угла α меньше 1 для любого острого угла α.
3. Если к прямой из одной точки проведены перпендикуляр и наклонные, то наклонные больше перпендикуляра; равные наклонные имеют равные проекции; из двух наклонных больше та, у которой проекция больше.

Воистину получили венок следствий, «венчающих теорему Пифагора».

Сама теорема является следствием теоремы: косинус угла зависит только от градусной меры угла. Поэтому если теорему Пифагора «вплести» в венок её следствий, то получим венок следствий названной теоремы о косинусе угла.

Из определений sin α, cos α, tg α вытекают следующие свойства:

«Катет, противолежащий углу α, равен произведению гипотенузы на sin α;

катет, прилежащий к углу α, равен произведению гипотенузы на cos α;

катет, противолежащий углу α, равен произведению второго катета на tg α»; [[2]](#footnote-3)

«катет прямоугольного треугольника есть среднее пропорциональное между гипотенузой и его проекцией на гипотенузу;

высота прямоугольного треугольника, опущенная из вершины прямого угла, есть среднее пропорциональное между проекциями катетов на гипотенузу». [[3]](#footnote-4)

И здесь хочется сказать, что сформулированные следствия образуют венок, украшающий определения тригонометрических функций.

Вся геометрия состоит из таких прекрасных венков. Вглядывайтесь в них, обращайте на них внимание, сравнивайте, запоминайте, и тогда при каждом решении задачи вы всегда будете увенчаны успехом!

Семёнов Е.Е. Изучаем геометрию: Кн. Для учащихся 6 – 8 кл. сред.шк. – М.: Просвещение, 1987. – С. 98.

Там же. – С. 9

**Алгебраический метод**

В следующем доказательстве теоремы Пифагора используются формулы для вычисления площади, то есть геометрия сочетается с алгеброй.

1) Одно из таких доказательств приведено в трактате индийского математика XII века Бхаскары. Оно знаменито тем, что весь текст сводится к единому чертежу, состоит из единственного слова: «Смотри!»

Историки считают, что Бхаскара выражал площадь c² квадрата, построенного на гипотенузе, как сумму площадей четырёх треугольников 4(ab/2) и площади квадрата со стороной, равной разности катетов (a – b)², то есть:

c² = 4ab/2 + (a – b)², откуда

с² = 2ab + (a – b)²

c² = 2ab + a² – 2ab + b²». [[4]](#footnote-5)

После упрощения это равенство превращается в знакомую всем формулу:

c² = a² + b².

2) А теперь перейдём к другому доказательству теоремы Пифагора, которое, наверное, вы уже знаете.

Формулировка: В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

Доказательство:

Рассмотрим прямоугольный треугольник с катетами a, bи гипотенузойс. Докажем, что с² = а² + b².

Для этого доказательства достроим данный треугольник (с катетами a, bи гипотенузой с) до квадрата со стороной a +b, так как это показано на рисунке. Площадь S этого квадрата равна (a + b)².

b a

a с сb

а + b

b c c

b c

a

a

a b Рис. 7

С другой стороны, этот квадрат составлен из четырёх равных прямоугольных треугольников, площадь каждого из которых равна

1 abи квадрата со сторонойc, поэтому

2 S**кв** = 4 / 0,5 ab + c²

S**кв** = 2ab + c²» [[5]](#footnote-6)

**Алгебраический метод.**

Косинусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к гипотенузе. Трудно представить образованного человека, который не знал бы, что такое косинус угла. У всякого учителя геометрии взрослый ученик, не знающий этого, вызовет недоумение: как, ты не знаешь, что такое косинус? Если же ученик не знает теорему Пифагора, то можно сказать, что он не заботится о своей чести.

«Для доказательства этой теоремы базовой теоремой является теорема о косинусе угла. Вот она.

*Косинус угла зависит только от градусной меры угла.*

Доказательство теоремы Пифагора представляет собой, по существу, всего-навсего решение одной задачи на применение теоремы о косинусе угла. Теорема эта утверждает, что если два угла равны, то и косинусы их равны. Косинус одного и того же угла имеет единственное значение». [[6]](#footnote-7)

«Применение этой теоремы и является основной идеей доказательства. Воспользоваться этой идеей помогает дополнительное построение: проводим высоту из вершины прямого угла. Благодаря такому построению каждый из острых углов данного треугольника оказывается включённым в два прямоугольных треугольника и косинус углов можно выразить двояким способом: из одного треугольника и из другого. По теореме косинусы одного угла равны. В результате получаем две пропорции». [[7]](#footnote-8)

Пользуясь тем, что произведение крайних членов пропорции равно произведению средних членов, получаем выражения для квадратов катетов. Находим сумму квадратов катетов. После преобразований получаем квадрат гипотенузы.

Теорема доказана**.**

**В**

**Н**

**А С**

CosACB = AC / BC

CosACH = HC / AC

Так как Cos углов равны, то получаем:

AC = НС

BC АС

AC\*АС = BC\*НС

AC² = HC\*BC

Рассмотрим треугольник АВС. Треугольник АВС – это прямоугольный равнобедренный треугольник (по условию). ВС – гипотенуза этого треугольника. АН – высота, проведённая из прямого угла ВАС, делит сторону ВС на два равных отрезка, отсюда ВС = ВН + НС.

Вернёмся к равенству AC² = HC\*BC и заменим ВС на ВН + НС

AC² = HC (ВН + НС)

АС² = НС\*НС + НС\*ВН

АС² = НС² + НС\*ВН

Так как треугольники АНС и АВН являются равнобедренными треугольниками (косинусы <ACH и <ABH равны, так как треугольник АВС – равнобедренный прямоугольный треугольник, и, по условию <ABC = = <ACB= 45°), то все их стороны (катеты) равны, но равны и их гипотенузы, так как сторона АВ равнастороне АС (по условию), значит, эти треугольники являются равными, и, следовательно, равны и две нам необходимые стороны ВН и НС.

АС² = НС² + ВН² (ВН = НС)

Рассмотрим треугольник АНС (прямоугольный равнобедренный ∆), у которого АН = НС, но уже по доказанному можно приравнять сторону( ∆АНС) АН к стороне ВН (∆ АВН).

АН = ВН, АН² = ВН²

АС² = НС² + АН²

Что и требовалось доказать.

**Подобие треугольников**

В ряде доказательств этой знаменитой теоремы также используется подобие треугольников. Вот, возможно, наиболее характерное из таких доказательств.

«Высота, опущенная на гипотенузу, разбивает данный прямоугольный треугольник, имеющий площадь S на два ему подобных треугольника с площадями Sa и Sb. Эти два треугольника подобны по двум углам, потому что оба треугольника являются равнобедренными, поэтому их углы равны 45°. При этом его стороны оказываются гипотенузами трёх треугольников». [[8]](#footnote-9)

ab

SaSb

c

Площади треугольников относятся, как квадраты этих сторон:

Sa :Sb: S = a² : b² : c².

НоSa + Sb=S

a² + b² = c². Что и требовалось доказать.

1. Геометрия: Учеб.для 7 – 9 кл. общеобразоват. учреждений/ Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. – 6-е изд. – М.: Просвещение, 1996. – С. 123. [↑](#footnote-ref-2)
2. [↑](#footnote-ref-3)
3. [↑](#footnote-ref-4)
4. Энциклопедия для детей. Т. 11. Математика. /Глав. Ред. М.Д. Аксёнова. – М.: Аванта +, 2001. – С. 289. Геометрия: Учеб. Для 7 – 11 кл. сред.шк./ Г.П. Бевз, В.Г. Бевз, Н.Г. Владимирова. – М.: Просвещение, 1992. – С. 112.

   Там же – С. 115.

   Там же – С. 116. [↑](#footnote-ref-5)
5. Геометрия: Учеб.для 7 – 9 кл. общеобразоват. Учреждений/ Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. – 6-е изд. – М.: Просвещение, 1996. – С. 126. [↑](#footnote-ref-6)
6. Семёнов Е.Е. Изучаем геометрию: Кн. Для учащихся 6 – 8 кл. сред.шк. – М.: Просвещение, 1987. – С. 94. [↑](#footnote-ref-7)
7. Там же – С. 96. [↑](#footnote-ref-8)
8. Энциклопедия для детей. Т. 11. Математика. /Глав. Ред. М.Д. Аксёнова. – М.: Аванта +, 2001. – С. 289. [↑](#footnote-ref-9)