**Метод математического моделирования как метод решения сюжетных задач**

# Введение

*Актуальность исследования:*

Проблема модернизации образования в настоящее время широко обсуждается в теории и практике, особенно с позиции активизации творческой познавательной деятельности учащихся. Активизация познавательной деятельности учащихся – один из дидактических принципов, роль которого существенно возросла в условиях развивающего обучения. Проблема активизации включает в себя средства для осуществления такой деятельности.

Моделирование - важный метод научного познания и сильное средство активизации учащихся в обучении. Метод математического моделирования позволяет формировать мировоззрение школьников, создавать у них представления о современных достижениях, возможностях и широте математического способа познания действительности, вооружает умениями добывать и обрабатывать информацию.

Отмечается, что одной из составляющих математического образования является новое представление о предмете математики. В основе содержания школьных учебников должно быть предусмотрено создание и разработка схем, моделей и их вариантов, создание моделей по известным схемам, приложение уже разработанных схем непосредственно в обучении. Для того чтобы лучше увидеть общие черты усваиваемого действия, надо отвлечься от ненужных в данном случае свойств предметов, а это и значит, что нужно перейти к действию с моделями, свободными от всех других свойств, кроме нужных в данном случае.

К основным целям обучения математике относится формирование умений строить математические модели простейших реальных явлений, исследовать явления по заданным моделям, конструировать приложения моделей; приобщение учащихся к опыту творческой деятельности и формирование у них умения применять его. В связи с этим чрезвычайно важно познакомить их с некоторыми простейшими методами математики и особенно с ее главным методом математическим моделированием. Моделирование является всеобщим научным методом познания. Широкое использование математики в естественных и гуманитарных науках, в технике как раз связано с математическим моделированием объектов, явлений и процессов, изучаемых в этих науках. Представления о структуре математического моделирования, о его компонентах, специфике отдельных его этапов создают базу для развития общих навыков применения математики к решению практических задач. Поэтому знакомство учащихся с математическим моделированием представляет собой принципиально практический и воспитательный аспекты обучения математике. Как же познакомить их с методом математического моделирования объектов и явлений реальной действительности?

Хотя учащиеся все годы обучения математике объективно имеют дело с моделями и занимаются математическим моделированием, изучают и преобразуют различные математические модели, но так как эти модели и процессы моделирования не являются непосредственной целью их действий (их целью является решение задач, вывод каких-то формул и т. п.), то они и не осознаются как модели, а осознаются лишь как, например, формулы, уравнения, геометрические фигуры и т. д.

Понятием математической модели и процессом моделирования можно и нужно знакомить учащихся, начиная с младших классов средней школы и беспрерывно подкреплять и развивать в течение всего периода обучения. И основным средством для такого знакомства является решение сюжетных задач.

Сюжетные задачи традиционно считаются для учащихся наиболее трудными упражнениями. Следовательно, в настоящее время не потеряла своей актуальности проблема: школьники не умеют решать задачи. Роль учителя в данном случае состоит не только в том, чтобы непосредственно найти ответ, сколько в том, чтобы объяснить, как найти решение, обучить алгоритмам действий и рассуждений

Но, конечно, само решение этих задач должно производиться принципиально иначе, чем оно обычно проводится в настоящее время. Главное состоит в том, чтобы сформировать у учащихся общий подход к решению любых задач. Это подход состоит в том, что задача рассматривается как модель некоторой проблемной ситуации, как объект для тщательного изучения, а ее решение - - как процесс применения общих теоретических положений математики и общелогических правил вывода к условиям задачи, с целью последовательного ее преобразования и перемоделирования до тех пор, пока не будет удовлетворено требование задачи — не будет найден ответ на вопрос задачи.

Следует отметить, что такой подход к решению сюжетных задач обеспечивает высокий уровень развития у учащихся творческой инициативы, способностей и умений решения не только сюжетных, но и любых задач. А это важно потому, что вся творческая жизнедеятельность человека связана с решением задач: каждое самостоятельное его действие - это решение некоторой задачи, которая возникает перед ним в силу сложившихся условий и обстоятельств. Вооружить учащихся такой культурой жизнедеятельности главная цель решения сюжетных и других задач в школьном обучении.

Описанное выше позволяет выявить существующее ***противоречие*** между запросами практики, целями школьного математического образования в частности, необходимостью формирования у школьников представлений о сущности математики, как науки одним из главных методов математики – математическим моделированием, и недостаточной разработанностью соответствующих методических рекомендации в теории и методике обучения математике. Разрешение этого противоречия особенно актуально при решении сюжетных задач данным методом на уровне реального учебного процесса.

Таким образом, сформулированное выше противоречие определило *актуальность проблемы* нашей работы, которая состоит в его разрешении посредством обоснованной разработки методических рекомендаций.

Сформулированное противоречие обусловило *проблему исследования*, которая заключается в поиске способа построения и разработке методически грамотной системы уроков решения сюжетных задач методом математического моделирования.

*Цель исследования* – рассмотреть основные вопросы и проблемы обучения элементам математического моделирования; разработать научно обоснованные методические рекомендации по организации уроков обучения учащихся решению сюжетных задач методом математического моделирования на примере шестого и восьмого классов.

*Объект исследования* – процесс обучения математике (в частности процесс решения сюжетных задач).

*Предмет исследования* – обучение учащихся элементам математического моделирования.

*Гипотеза исследования* – целенаправленное и систематическое изучение математического моделирования на всех этапах обучения средней школы делает процесс обучения математике более эффективным и осмысленным, дает представление о сущности математики, как науке, формирует межпредметные связи; а также способствует формированию у школьников диалектико-материалистического мировоззрения, умения проводить рациональные рассуждения.

Для достижения данной цели и проверки выдвинутой гипотезы необходимо было решить следующие *задачи*:

1. дать понятие математической модели, раскрыть суть метода математического моделирования;
2. определить основные функции и цели обучения математическому моделированию в школе;
3. раскрыть роль задач в обучении математике в целом, охарактеризовать методы решения сюжетных задач;
4. проанализировать учебники c точки зрения наличия элементов математического моделирования;
5. экспериментально проверить основные положения исследования.

Для достижения целей работы, проверки гипотезы и решения поставленных выше задач были использованы следующие методы:

* 1. изучение литературы по математике и методике преподавания математики по исследуемой теме;
	2. изучение психологической, педагогической, философской литературы по теме исследования;
	3. наблюдение за работой учащихся;
	4. опытное преподавание.

Методологической основой исследования послужили философские и психологические аспекты моделирования в общем, и математического в частности (В.А. Веников, Б.А. Глинский, А.А. Зиновьев, Л.М. Фридман, В.А. Штофф), исследования о роли задач в обучении математике и организации обучения решению задач (Д. Пойа, Л.М. Фридман, Т.А. Иванова, Л.И. Кузнецова); методика обучения решению задач (Т.А. Иванова [5], Кузнецова Л.И. [5], Л.М. Фридман [22], Д. Пойа [15]),

*Новизна и практическая значимость* исследования определяется тем, что обоснована необходимость изучения метода математического моделирования, разработана система уроков в шестом и восьмом классах по теме «Математическое моделирование как метод решения сюжетных задач» и представлены обоснованные методические рекомендации к их организации.

*Положения, выносимые на защиту*.

1. Роль метода математического моделирования в научном исследовании различных процессов, систем и задач и в школьном курсе математики.
2. Понятие, роль и место сюжетной задачи в курсе математики, различные методы решения.
3. Методика формирования у учащихся навыков решения сюжетных задач методом математического моделирования с соблюдением его основных этапов..

*Апробация* основных положений и результатов исследования осуществлялась автором в личном опыте с учащимися 6 «а» и 8 «б» классов школы с углубленным изучением отдельных предметов №70 г. Нижнего Новгорода, в выступлении перед магистрами второго года обучения на семинарских занятиях.

*Структура* диссертации определена ее логикой и решением задач исследования. Работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы ( наименований). Общий объем работы страниц.

# Глава I. Метод математического моделирования

## **§1. Модели и моделирование**

### п.1. Метод моделирования

Люди издавна интересуются, как устроена наша Вселенная. Этот интерес не только чисто познавательный, но и сугубо практический, ибо люди хотели научиться предсказывать периодические явления, связанные с устройством Вселенной, такие, как затмения Солнца и Луны, наступление времен года и т. д.

Для решения этих задач ученые строили свои представления о Вселенной в виде схемы — картины мира, в которой объекты Вселенной — Солнце и звезды, планеты, Земля и Луна изображались точками, движущимися по каким-то кривым траекториям их движения. Таковы например, схемы, построенные Птолемеем, в которых центральное место занимала наша Земля, или схема Коперника, в которой центр занимало Солнце. С помощью этих схем ученые решали задачи предсказания отдельных астрономических явлений [75].

Эти схемы, эти картины мира - суть модели Вселенной, а метод исследования Вселенной, нахождения законов о Вселенной и решения задач связанных с нею, с помощью этих моделей является методом моделирования.

Моделирование в настоящее время получило необычайно широкое развитие и применение в различных областях знаний: философских, гуманитарных, математических, физических, радио- и электротехнических, физиологических и биологических и т. д. моделирование – один из главных способов познания окружающего мира.

Вопросы моделирования рассматривались в работах философов (В. А. Штофа, И. Б. Новикова, Н. А. Уемова и других), специалистов по педагогике и психологии (Л. М. Фридмана, В. В. Давыдова, Б. А. Глинского, С. И. Архангельского и других).

Понятие «модель» возникло в процессе опытного изучения мира, а само слово «модель» произошло от латинских слов «modus», «modulus», означающих меру, образ, способ, введенный в оборот в древнем строительном искусстве, применявшем в своей практике модельные заменители – макеты возводящихся сооружений. Почти во всех европейских языках оно употреблялось для обозначения образа или прообраза, или вещи, сходной в каком-то отношении с другой вещью [75].

Термин «модель» широко используется в различных сферах человеческой деятельности и имеет множество смысловых значений.

Приведем некоторые определения термина «модель», встречающиеся в различной литературе.

В работе В.А. Штофа рассматривается понятие модели, относящееся к области человеческого познания, средств, методов и форм отображения человеком внешнего мира. Автор дает следующее определение модели: «Под моделью понимают такую мысленно представляемую или материально реализованную систему, которая отображает и воспроизводит объект так, что ее изучение дает новую информацию об этом объекте» [75, с 19].

А. И. Уемов определяет модель как систему, исследование которой служит средством для получения информации о другой системе [65].

«Модель – это структура, в которой отражено изменение физического воздействия во времени и пространстве [14, с. 27]». В этом определении Н.А. Амосов отображает особенность модели отображать объект в виде некоторой структуры, которая обладает временно-пространственной характеристикой.

В. А. Поляков считает, что «модель – это идеальное формализованное представление системы и динамики ее поэтапного формирования. Модель должна интегрировано имитировать реальные задачи и ситуации, быть компактной, адекватно передавать смены состояний и должна совпадать с рассматриваемой задачей или ситуацией». Таким образом Поляков, в отличии от Амосова, отмечает не только особенность модели отображать объект в виде некоторой системы (структуры), но и динамику её формирования.

В большом советском энциклопедическом словаре дается до восьми определений понятия «модель», в зависимости от сферы применения. Например: «…1) образец (эталон, стандарт) для массового изготовления какого-либо изделия или конструкции… 5) В широком смысле – любой образ (мысленный или условный…) какого-либо объекта, процесса или явления («оригинала» данной модели), используемый в качестве его «заместителя», «представителя» и т.д.» [60, c. 817].

А.А. Зиновьев и И.И. Ревзин подчеркивают, что модель – средство получения знаний, а не сами эти знания [32, с.83].

Таким образом, независимо от используемой в формулировке определений терминологии, можно сказать, что под моделью понимают такой материальный или мысленно представляемый объект, который в процессе познания (изучения) замещает объект-оригинал, сохраняя некоторые важные для данного исследования типичные черты.

Модели классифицируют исходя из наиболее существенных признаков объектов. В литературе, посвященной философским аспектам моделирования, представлены различные классификационные признаки, по которым выделены различные типы моделей. Рассмотрим некоторые из них.

В. А. Штоф предлагает следующую классификацию моделей [75]:

1) по способу их построения (форма модели);

2) по качественной специфике (содержание модели).

По способу построения различают материальные и идеальные модели.

Материальные модели, несмотря на то, что эти модели созданы человеком, существуют объективно. Их назначение специфическое – воспроизведение структуры, характера, протекания, сущности изучаемого процесса – отразить пространственные свойства – отразить динамику изучаемых процессов, зависимости и связи.

Идеальные модели неразрывно связаны с воображаемыми (прежде чем что-либо построить, необходимо иметь теоретическое представление, обоснование). Эти модели остаются мысленными даже в том случае, если они воплощены в какой-либо материальной форме. Большинство этих моделей не претендует на материальное воплощение.

В свою очередь материальные модели по форме делятся на:

- образные (построенные из чувственно наглядных элементов);

- знаковые (в этих моделях элементы отношения и свойства моделируемых явлений выражены при помощи определенных знаков);

- смешанные (сочетающие свойства и образных, и знаковых моделей).

Достоинства данной классификации в том, что она дает хорошую основу для анализа двух основных функций модели:

- практической (в качестве орудия и средства научного эксперимента);

- теоретической (в качестве специфического образа действительности, в котором содержатся элементы логического и чувственного, абстрактного и конкретного, общего и единичного).

Другая классификация есть у Б. А. Глинского в его книге «Моделирование как метод научного исследования». Наряду с обычным делением моделей по способу их реализации, он разделяет модели и по характеру воспроизведения сторон оригинала на:

- субстанциональные;

- структурные;

- функциональные;

- смешанные.

Рассмотрим еще одну классификацию, предлагаемую Л. М. Фридманом [66]. С точки зрения степени наглядности он все модели разбивает на два класса:

- материальные (вещественные, реальные);

- идеальные.

К материальным моделям относят такие, которые по­строены из каких-либо вещественных предметов, из ме­талла, дерева, стекла и других материалов. К ним также относят и живые существа, используемые для изучения некоторых явлений или процессов. Все эти модели могут быть непосредственно чувственно познаны, ибо они существуют реально, объективно. Они представляют собой вещественный продукт человеческой деятельности.

Материальные модели, в свою очередь, можно разде­лить на статические (неподвижные) и динамические (действующие).

К первому виду автор классификации относит модели, геометрически подобные оригиналам. Эти модели передают лишь пространственные (геометрические) особенности оригиналов в определенном масштабе (например, макеты домов, за­стройки городов или сел, разного рода муляжи, модели геометрических фигур и тел, изготовленные из дерева, проволоки, стекла, пространственные модели молекул и кристаллов в химии, модели самолетов, кораблей и других машин и т. д.).

К динамическим (действующим) моделям относят та­кие, которые воспроизводят какие-то процессы, явления. Они могут быть физически подобны оригиналам и вос­производить моделируемые явления в каком-то масшта­бе. Например, для расчета проектируемой гидроэлектро­станции строят действующую модель реки и будущей плотины, модель будущего корабля позволяет в обычной ванне изучить некоторые аспекты поведения проек­тируемого корабля в море или на реке и т. д.

Следующим видом действующих моделей являются всякого рода аналоговые и имитирующие, которые вос­производят то или иное явление с помощью другого, в каком-то смысле более удобного. Таковы, например, электрические модели разного рода механических, тепловых, биологических и прочих явлений. Другим приме­ром может быть модель почки, которую широко используют в медицинской практике. Эта модель — искусственная почка — функционирует одинаково с естествен­ной (живой) почкой, выводя из организма шлаки и другие продукты обмена, но, конечно, устроена она совершенно иначе, чем живая почка.

Идеальные модели делят обычно на три вида:

- образные (иконические);

- знаковые (знаково-символические);

- мысленные (умственные).

К образным, или иконическим (картинным), моде­лям относят разного рода рисунки, чертежи, схемы, пе­редающие в образной форме структуру или другие особенности моделируемых предметов или явлений. К это­му же виду идеальных моделей следует отнести географические карты, планы, структурные формулы в химии, модель атома в физике и т. д.

Знаково-символические модели представляют собой запись структуры или некоторых особенностей моделируемых объектов с помощью знаков-символов какого-то искусственного языка. Примерами таких моделей явля­ются математические уравнения, химические формулы.

Наконец, мысленные (умственные, воображаемые) модели — представления о каком-либо явлении, процессе или предмете, выражающие теоретическую схему моделируемого объекта. Мысленной моделью является любое научное представление о каком-либо явлении в форме его описания на естественном языке.

В зависимости от основной дидактической функции различают три вида моделей: описательные, конструктивные и эвристические.

Описательная функция модели состоит в том, что в исследуемом объекте выделяются и обобщаются существенные компоненты и взаимосвязи между ними. Описательные модели дают возможность сжато излагать информацию и воспроизводить её.

Конструктивная функция модели состоит в её способности служить ориентиром, применять добытые знания в новых ситуациях. Конструктивные модели больше ориентированы на применение знаний.

Эвристическая функция модели способствует прогнозированию, а сама модель направлена на овладение новыми знаниями, обобщение и систематизацию. При этом форма моделей может быть различной: модельная схема, знаковая модель, графическая, образная и т.д.

«Моделирование – это есть процесс использования моделей (оригинала) для изучения тех или иных свойств оригинала (преобразования оригинала) или замещения оригинала моделями в процессе какой-либо деятельности» (например, для преобразования арифметического выражения можно его компоненты временно обозначить буквами) [66].

«Моделирование - это опосредованное практическое или теоретическое исследование объекта, при котором непосредственно изучается не сам интересующий нас объект, а некоторая вспомогательная искусственная или естественная система:

а) находящаяся в некотором объективном соответствии с познаваемым объектом;

б) способная замещать его в определенных отношениях;

в) дающая при ее исследовании, в конечном счете, информацию о самом моделируемом объекте»

(три перечисленных признака по сути являются определяющими признаками модели) [49].

Или иными словами моделирование — это процесс создания моделей и работа с ними.

На основании перечисленного можем выделить следующие цели моделирования [13]:

- понимание устройства конкретной системы, ее структуры, свойств, законов развития и взаимодействия с окружающим миром;

- управление системой, определение наилучших способов управления при заданных целях и критериях;

- прогнозирование прямых и косвенных последствий реализации заданных способов и форм воздействия на систему.

Все три цели подразумевают в той или иной степени наличия механизма обратной связи, то есть необходима возможность не только переноса элементов, свойств и отношений моделируемой системы на моделирующую, но и наоборот.

Моделирование тесно связано с такими приёмами познания, как абстракция, аналогия, гипотеза и др. Процесс моделирования обязательно включает и построение абстракций, и умозаключения по аналогии, и конструирование научных гипотез.

Научной основой моделирования служит теория аналогии, в которой основным понятием является понятие аналогии - сходство объектов по их качественным и количественным признакам. Все эти виды объединяются понятием обобщенной аналогии - абстракцией. Аналогия выражает особого рода соответствие между сопоставляемыми объектами, между моделью и оригиналом [17].

Вообще, аналогия это опосредующее звено между моделью и объектом. Функция такого звена заключается:

- в сопоставлении различных объектов, обнаружении и анализе объективного сходства определенных свойств, отношений, присущих этим объектам;

- в операциях рассуждения и выводах по аналогии, то есть в умозаключениях по аналогии.

Хотя в литературе отмечается неразрывная связь модели с аналогией, но «аналогия не есть модель». Особенность способа получения выводов по аналогии в логической литературе получила название традукция - перенос отношений (свойств, функций и т. д.) одних предметов на другие. Традуктивный способ рассуждений используется при сопоставлении различных предметов по количеству, качеству, пространственному положению, временной характеристике, поведению, функциональным параметрам структуры и т. д.

Более четко о приемах познания, используемых при моделировании, говорит С.Ю. Полякова в диссертационном исследовании [52, с.21-22]:

Умозаключение по аналогии – приём познания, при котором из сходства некоторых признаков двух и более предметов, явлений действительности делается вывод о сходстве других признаков этих предметов, явлений.

Приём гипотез – способ выдвижения обоснованных теоретических предположений. При невозможности проверить правильность гипотезы в среде самого объекта её предположения переводят в модельную среду аналогов объекта.

Приём синтеза – процесс создания из разрозненных фактов единого, целого.

Приём абстрагирования — созданный целостный аналог, чтобы быть полезным подвергается возможным упрощениям, выделением одного наиболее интересного параметра для изучения, пренебрежением малосущественного.

Приём анализа – наблюдая за конкретным, мы абстрагируемся от несущественного и осознаём абстракции. Потом воплощаем эти абстракции в модели проводим над эксперименты в целях обнаружения и описания более полного, конкретного содержания объекта познания в виде новых свойств у доступной для исследования модели. Полученные знания переносим на изучаемый объект. Далее рассматриваем оригинал на новом теоретическом уровне, начиная с выделения новых свойств, поиска новых знаний путем абстрагирования и создания моделей, повторяя пройденные этапы. Таким образом, происходит конкретизация знаний о модели.

Приём эксперимента – более уточненная проверка на соответствие статусу модели аналога, уже подвергнутого анализу на принципиальную непротиворечивость, соответствие целям познания.

Моделирование является многофункциональным, то есть оно используется самым различным образом для различных целей на различных уровнях (этапах) исследования или преобразования.  В связи с этим многовековая практика использования моделей породила обилие форм и типов моделей о которых говорилось ранее.

### п.2. Метод математического моделирования.

Метод математического моделирования является мощным инструментом для исследования различных процессов, систем и задач, для успешного освоения которого требуется не только иметь теоретические знания, но и умение поставить и решить прикладную задачу, возникающую в конкретной ситуации. Изучение элементов метода математического моделирования начинается в средней школе. Разделы школьной программы, посвященные задачам на работу, движение, проценты, прогрессии могут рассматриваться как введение в метод математического моделирования. В некоторых случаях учащиеся решают задачи на составление дифференциальных уравнений и занимаются анализом и интерпретацией их решений. Практические задания представлены в форме текстовых задач, описывающих конкретные ситуации, для исследования которых требуется записать математическую формулировку задачи и затем найти ее решение.

Математическое моделирование — частный случай моделирования. Является важнейшим видом знакового моделирования и осуществляется средствами языка математики. Знаковые образования и их элементы всегда рассматриваются вместе с определенными преобразованиями, операциями над ними, которые выполняет человек или машина.

Понятия «математическая модель» и «моделирование» широко используются в науке и на производстве. Роль знаковых моделей особенно возросла с расширением масштабов применения ЭВМ при построении знаковых моделей. Математическое моделирование предполагает использование в качестве специфического средства исследования оригинала его математическую модель, изучение которой дает новую информацию об объекте познания, его закономерностях. Известно, что для математического исследования процессов и явлений, реально происходящих в действительности, надо суметь описать их на языке математики, то есть построить математическую модель процесса, явления. Математические модели и являются объектами непосредственного математического исследования.

Математическая модель — это приближённое описание какого-нибудь класса явлений, выраженное на языке какой-нибудь математической теории (с помощью системы алгебраических уравнений и неравенств, дифференциальных или интегральных уравнений, функций, системы геометрических предложений, векторов и т.п.) [76].

Е.М. Вечтомов говорит, что «математическая модель реальной ситуации – это вполне определенное описание данного явления, выраженное на языке формул» [65 с. 60]. Кроме того он рассматривает некоторые важнейшие свойства моделей:

1) адекватность (теоретическое соответствие реальности) и применимость (практическая польза) модели. Говоря об адекватности, автор акцентирует внимание на определенной структурной сложности модели, в то время как применимость модели означает осуществимость модельных вычислений.

2) простота и сложность модели. Отмечается достаточная условность этих понятий, однако. Если взять две модели одного и того же явления, то сравнить их по сложности вполне возможно.

3) жесткие и мягкие модели. Жесткая модель достаточно примитивна и проста, содержит небольшое количество параметров, которые, как правило, являются константами. Мягкая более сложна, содержит большее число параметров, которые позволяют учитывать меняющееся состояние системы. [18 c.60-61]

Из выше перечисленных свойств можно сделать вывод, что выбираемая модель изучаемого явления не должна быть слишком простой, для адекватного отражения ситуации и слишком сложной, для реальной возможности её использования. Из нескольких моделей с примерно одинаковой точностью выбирают наиболее простую.

Метод математического моделирования применяется к научному исследованию действительности, то есть к решению реальных задач, по следующей схеме:

1) реальная задачная ситуация заменяется её предметной моделью;

2) для полученной предметной модели ищется адекватная математическая модель, включающая четкую формулировку исходной задачи;

3) решается соответствующая математическая задача;

4)найденное решение интерпретируется в предметной модели. Несколько комментариев. Шаг 1) требует хорошего знания своего предмета и носит интуитивно-содержательный характер. Шаг 2) является творческим актом, предполагающим свободную ориентацию, как в данной дисциплине, так и в математике. Шаг 3) — чисто математический вопрос. Шаг 4) дает искомый ответ. Иногда качественное решение задачи может быть получено уже в предметной модели. Однако в точных науках следует считать обоснованным лишь математизированное знание. На этапе 2) обычно обходятся известным математическим аппаратом [18, с 59 - 60].

В школьном курсе математики работа с математическими моделями начинается на ранних этапах обучения. Используя математические модели и моделирование, школьники решают учебные и практические задачи. Однако следует отметить, что с данными терминами зачастую они не знакомы (например в учебниках Алимова не дается определения данных понятий и четкого алгоритма решения задач).

А.Г.Мордкович вводит понятие модели математического моделирования в седьмом классе в параграфе «что такое математическая модель» на конкретных примерах, после чего четко формулирует этапы работы с текстовой задачей.

### п.3. Математическое моделирование в школе

Развитие у учащихся правильных представлений о природе математики и отражении математической наукой явлений и процессов реального мира является программным требованием к обучению математике. Доминирующим средством реализации этой программной цели является метод математического моделирования.

Этот метод имеет своей основой моделирование (математическое и предметное). Применительно к обучению математике воспользуемся определением моделирования, которое предлагает И. Г. Обойщикова, и будем понимать под моделированием обобщенное интеллектуальное умение учащихся, состоящее в замене математических объектов, их отношений, способов деятельности моделями в виде изображений отрезками, числовыми лучами, схемами, значками [50].

Для моделирования привлекаются различные математические объекты: числовые формулы, числовые таблицы, буквенные формулы, функции, уравнения алгебраические или дифференциальные и их системы, неравенства, системы неравенств (а также неравенств и уравнений), ряды, геометрические фигуры, разнообразные графосхемы, диаграммы Венна, графы.

Математическое моделирование находит применение при решении многих сюжетных задач. Уже уравнение, составленное по условию задачи, является ее алгебраической моделью. Моделированию, особенно алгебраическому и аналитическому, следует уделить в школе должное внимание, так как математиче­ские модели используются для решения (или хотя бы облегчения решения) сюжетных задач. Кроме того, при построении модели используется такие операции мышления, как анализ через синтез, сравнение, классификация, обобщение, которые являются операциями мышления, и способствует его развитию. Составление математической модели задачи, перевод задачи на язык математики исподволь готовит учащихся к моделированию реальных процессов и явлений в их будущей деятельности.[71]

При решении сюжетных задач особенно часто используются их алгебраические и аналитические модели. Такой моделью может быть функция, описывающая явление или процесс, уравнение, система уравнений, неравенство, система неравенств, система уравнений и неравенств и др. При составлении модели задача, таким образом, переводится на язык алгеб­ры или математического анализа.

Рассмотрим несколько примеров математических моделей.

Задача 1. Турист проехал 2200 км, причем на теплоходе проехал вдвое больше, чем на автомобиле, а на поезде в 4 раза больше, чем на теплоходе. Сколько километров проехал турист отдельно на каждом виде транспорта?

Решение. Примем расстояние, которое проехал турист на автомобиле за x км. Известно, что на теплоходе проехал вдвое больше, чем на автомобиле, то есть 2x км. На поезде проехал в 4 раза больше, чем на теплоходе, то есть .

Весь путь – это сумма расстояний, которые проехал турист на каждом из видов транспорта и он равен 2200 км. Получим следующее уравнение:

 - это и есть математическая модель данной задачи.

Задача 2. На школьной математической олимпиаде было предложено решить 6 задач. За каждую решенную задачу засчитывалось 10 очков, а за нерешенную снималось 3 очка. В следующий тур выходили ученики, набравшие не менее 30 очков. Сколько задач нужно было решить, чтобы попасть в следующий тур олимпиады? (См. № 151, [19]).

Решение. Пусть ученик должен решить х задач. Тогда за решенные задачи он получит 10х очков, а за 6-х нерешенных задач у него снимут 3(6-х) очков. Ученик может получить 10х-3(6-х) очков (все переменные выражены через выбранное х и значения других величин, заданных в задаче). По условию задачи  и .

Моделью задачи служит система неравенств

.

Далее в качестве примера рассмотрим задачу математического анализа на нахождение экстремума. Надо заметить, что аналитической моделью задачи на наибольшее (наименьшее) значение является функция одного переменного с областью ее задания. Обычно областью задания является замкнутый промежуток.

Задача 3. Кусок проволоки длиной 48 м сгибают так, чтобы образовался прямоугольник. Какую длину должны иметь стороны прямоугольника, чтобы его площадь была наибольшей? (См. № 313, [3]).

Решение. Требуется найти размеры прямоугольника с наибольшей площадью. Обозначим за a – длину прямоугольника, тогда ширина равна .

. Полученная функция является моделью данной задачи.

Отметим, что в общем случае процесс моделирования состоит из следующих этапов [42]:

1 этап. Постановка задачи и определение свойств оригинала, подлежащих исследованию.

2 этап. Констатация затруднительности или невозможности исследования оригинала.

3 этап. Выбор модели, достаточно хорошо фиксирующей существенные свойства оригинала и легко поддающейся исследованию.

4 этап. Исследование модели в соответствии с поставленной задачей.

5 этап. Перенос результатов исследования модели на оригинал.

6 этап. Проверка этих результатов.

На сегодняшний день наиболее распространенной является трехэтапная схема процесса мате­матического моделирования:

1) перевод предложенной задачи с естественного языка на язык математических терминов, то есть построение математической модели задачи (формализация);

2) решение задачи в рамках математической теории (решение внутри модели);

3) перевод полученного результата (математического решения) на язык, на котором была сформулирована исходная задача (интерпрета­ция полученного решения).

Наиболее ответственным и сложным является первый этап – само построение математической модели. Оно осуществляется логическим путем на основе глубокого анализа изучаемого явления (процесса) и требует умения описать явление (процесс) на языке математики.

В свою очередь, в процессе построения модели можно выделить несколько шагов.

Первый шаг – индуктивный: это отбор наблюдений, относящихся к тому процессу, который предстоит моделировать. Этот этап состоит в формулировке проблемы, то есть в принятии решения относительно того, что следует принимать во внимание, а чем можно пренебречь.

Второй шаг заключается в переходе от определения проблемы к собственно построению неформальной модели. Неформальная модель – это такое описание процесса, которое способно объяснить отобранные нами наблюдения, но при этом определено недостаточно строго, и нельзя с точностью проверить степень логической взаимосвязанности в нем свойств. На этой стадии рассматриваются целый ряд наборов неформальных допущений, способных объяснить одни и те же данные; тем самым рассматриваются несколько потенциальных моделей и решается, какая из этих моделей лучше всего отображает изучаемый процесс. Иначе говоря, ищутся различные способы установления логического соответствия между моделью и реальным миром.

Третий шаг – это перевод неформальной модели в математическую модель. Такой перевод включает в себя рассмотрение словесного описания неформальной модели и поиск подходящей математической структуры, способной отобразить изучаемые процессы. Это самый сложный этап во всем процессе моделирования. Стадия перевода может таить в себе две опасности. Во-первых, неформальные модели имеют тенденцию быть неоднозначными, и обычно существует несколько способов перевода неформальной модели в математическую (при этом альтернативные математические модели могут иметь совершенно различный смысл). На самом деле это одна из главных причин, изначально толкающих к применению математических моделей: язык математики лишен двусмысленностей и более точен, чем естественный язык, он позволяет исследовать скрытый смысл тончайших различий в формулировках, который плохо доступен исследованию посредством естественного языка.

Следующий этап – этап решения задачи в рамках математической теории – можно еще назвать этапом математической обработки формальной модели. Он является решающим в математическом моделировании. Именно здесь применяется весь арсенал математических методов – логических, алгебраических, геометрических и т. д. – для формального вывода нетривиальных следствий из исходных допущений модели. На стадии математической обработки обычно – вне зависимости от сути задачи – имеют дело с чистыми абстракциями и используют одинаковые математические средства. Этот этап представляет собой дедуктивное ядро моделирования.

На последнем этапе моделирования полученные выводы проходят через еще один процесс перевода – на сей раз с языка математики обратно на естественный язык.

Рассмотрим на примере реализацию всех этапов процесса математического моделирования.

Задача 1. Два автомобиля выехали одновременно из пункта А в пункт В, расстояние между которыми 540 км. Первый автомобиль ехал со скоростью, на 10 км/ч большей, чем второй, и прибыл в пункт В на 45 мин раньше второго. Найдите скорость каждого автомобиля (см. № 218, [2]).

I этап. Формализация. Построим математическую модель задачи.

Обозначим за x км/ч – скорость второго автомобиля, тогда скорость первого автомобиля равна (x+10) км/ч.

ч – время, потраченное на весь путь вторым автомобилем.

ч – время, потраченное на весь путь первым автомобилем.

Известно, что второй автомобиль потратил на путь на 45 мин больше, чем первый. .

. Полученное уравнение является математической моделью данной задачи.

II этап. Внутримодельное решение.

Перенесем все слагаемые в одну часть .

Приведем слагаемые к общему знаменателю .

Дробь равна нулю тогда и только тогда, когда числитель равен нулю, а знаменатель не равен нулю. Получим следующую систему: .

Получили, что  и .

III этап. Интерпретация. Переведем результат с математического языка на язык исходной задачи.

Так скорость автомобиля не может быть отрицательным числом, то условию задачи соответствует только один корень , т.е. скорость второго автомобиля равна 80 км/ч, а скорость первого 90 км/ч.

Задача 2. Группа студентов решила купить магнитофон ценой от 170 до 195 долларов. В последний момент двое отказались участвовать в покупке, поэтому каждому из оставшихся пришлось внести на 1 доллар больше. Сколько стоил магнитофон?

Решение.

I этап. Формализация. Построим математическую модель задачи. Пусть х -  число студентов в группе, у долларов – величина первоначально предлагаемого взноса. Тогда стоимость магнитофона . После того, как двое отказались участвовать в покупке, студентов стало , а взнос составил  доллар. Следовательно стоимость магнитофона равна . Условие задачи можно представить в виде системы



Математическая модель построена.

II этап. Внутримодельное решение. Рассмотрим систему, состоящую из уравнения и неравенства



 В уравнении раскроем скобки и приведем подобные. Получим следующую систему



Из уравнения выразим y, . Следовательно, . Так как х - натуральное число, то сейчас систему неравенств можно решать в натуральных числах. Из неравенства  имеем х. Из неравенства  имеем х. Таким образом, нужно найти натуральные решения неравенств . Ясно, что х = 20. Тогда у = 9 и = 180.

III этап. Интерпретация. Переведем результат с математического языка на язык исходной задачи. Магнитофон стоил 180 долларов.

Задача 3. Окно имеет форму прямоугольника, завершенного сверху полукругом. Укажите такие размеры окна, чтобы при данном периметре l оно пропускало больше света (см. № 156, [38]).

Решение.

I этап. Формализация. Построим математическую модель данной задачи.

Требуется найти размеры окна с наибольшей площадью. Обозначим размеры: r – радиус полукруга, h – высота прямоугольника, тогда основание прямоугольника 2r.

*h*

 *r*

Чтобы определить, какое из переменных выбрать аргументом исследуемой функции, надо посмотреть, какое из них проще выражается через другое:

 l=2r+2h+r, h=, r=.

Удобней выбрать r, так как для выражения площади понадобится r2, а h входит в это выражение линейно.

S(r)= . Эта функция и есть модель данной задачи.

II этап. Внутримодельное решение.

Ясно, что 0<r<.

Найдем производную функции S(r): .

Воспользуемся необходимым условием экстремума: l-r(+4)=0. Отсюда r=. Из соображений здравого смысла окно не может иметь наименьшую площадь, поэтому найденное значение r – точка максимума. При этом r=h=.

III этап. Интерпретация. Переведем результат с математического языка на язык исходной задачи. Чтобы при данном периметре l окно пропускало больше света, необходимо установить следующие размеры окна: r=h=

Учителю следует добиться от учащихся четкого понимания значения и содержания каждого из выше описанных этапов процесса математического моделирования. Это нужно для того, чтобы школьники усвоили, что они решают не просто математическую задачу, а конкретную жизненную ситуацию математическими методами. Тогда учащиеся смогут увидеть в математике практическое значение, и не будут воспринимать ее как абстрактную науку.

Метод математического моделирования является мощным инструментом для исследования различных процессов и систем. Приложения этого метода к решению конкретных задач изложены в ряде известных монографий и учебных пособий. Вместе с тем, многие из них предполагают достаточно высокий уровень математической подготовки учеников, что зачастую вызывает определенные трудности при изучении материала. Понятие математической модели и некоторые общие положения, связанные с ним, должны в той или иной форме иллюстрироваться на протяжении всего курса математики, а разделы школьной программы, посвященные задачам на работу, движение, проценты, прогрессии и, наконец, задачам на применение производных и интегралов, могут рассматриваться как введение в метод математического моделирования [48].

## **§2. Понятие задачи. Методы решения.**

### п.1. Понятие задачи

Как пишет Л.М. Фридман, в математике необходимо учиться многим важным умениям, играющим огромную роль в жизни каждого человека. Одним из важных умений является умение решать задачи. [69, с.47]

Термин «задача» широко используется и в жизни, и в различных науках, и в учебных дисциплинах: психологии, логике, педагогике, математике, физике и так далее. Этим термином обозначаются многие и разные понятия. Поэтому очень трудно дать общее определение понятию «задача». Даже в пределах математики нет однозначного толкования этого понятия.

Понятие задачи имеет различные трактовки. Их обстоятельное исследование в психологической литературе было проведено Г.А. Баллом [16]. Термин «задача», отмечает Г.А. Балл, употребляется для обозначения объектов, относящихся к трем различным категориям:

1) к категории цели действий субъекта, требования, поставленного перед субъектом;

2) к категории ситуации, включающей, наряду с целью, условия, в которых она должна быть достигнута;

3) к категории словесной формулировки этой ситуации.

Г.А Балл отмечает, что в психологической литературе наиболее распространено употребление термина «задача» для обозначения объектов второй категории. Для объектов первой категории, Указывает Г.А. Балл, вполне подходит выражение «цель действия», «требование задачи», а для объектов третьей категории – «формулировка задачи».

Сторонники трактовки задачи как ситуации, в которой должен действовать субъект, явно включают субъекта в само понятие задачи. В методике обучения математике подобное толкование задачи особенно характерно для работ Ю.М. Колягина [40]. Без субъекта, отмечает он, нет задачи. То, что для одних является задачей, для других может ею не быть.

Сторонниками другой трактовки задачи субъект не включается в понятие задачи. Наиболее четко и последовательно эта точка зрения реализуется в работах Л.М. Фридмана, который определяет задачу как модель проблемной ситуации, выраженную с помощью знаков некоторого естественного или искусственного языка [67, 69]. Проблемная ситуация, отмечает Фридман, возникает тогда, когда субъект в своей деятельности, направленной на некий объект, встречает какое-то затруднение, преграду. Однако проблемная ситуация – это не просто затруднение, преграда в деятельности субъекта, а осознанное субъектом затруднение, способ устранения которого он желает найти. Таким образом, в понятие проблемной ситуации Л.М. Фридман включает субъект. Значит, задача есть модель ситуации, элементом которой является субъект, осознавший затруднение в своей деятельности. Отсюда следует, что возникновение задачи обязано деятельности субъекта. Другими словами, Л.М. Фридман наделил понятие задачи «субъективными генами» [67, 69]. Заметим, что различные авторы по-разному подходят к соотношению понятий «задача» и «проблемная ситуация». Одни (Л.М. Фридман) считают первичным понятие проблемной ситуации, причем некоторые психологи считают субъекта элементом проблемной ситуации. Другие (С.Л. Рубинштейн) под проблемной ситуацией понимают некоторую объективную ситуацию, в которой берет начало процесс мышления. Задача, по Рубинштейну, есть результат того, что проблемная ситуация, содержащая какие-то нераскрытые звенья, подвергается анализу со стороны человека. То есть, субъект рассматривается как элемент задачи. Существует и противоположная точка зрения, при которой первичным считается понятие задачи, а вторичным – понятие проблемной ситуации. Проблемная ситуация оценивается как фактор, рассматриваемый в отношении субъекта, тогда как задача признается существующей объективно.

Чаще всего под задачей понимают задание, которое должен выполнить субъект, или вопрос, на который он должен найти ответ, опираясь на указанные условия и все вытекающие из них следствия. [36, с. 156-158] Для понятия задачи характерны две стороны: объективная и субъективная. К первой относятся предмет действия, требование, место в системе задач, логическая структура решения задачи, определенность или неопределенность или неопределенность условия и т.д., ко второй – способы и средства решения.

Каждая задача - это единство условия, которое в ней указано, требования или вопроса, на который надо найти ответ [68, с. 6], и субъект, который это требование выполняет. [15, с. 158]

Известно, что все задачи, которые мы решаем в школе, различаются характером своих объектов. В одних задачах объектами являются реальные предметы, в других - все объекты математические (числа, геометрические фигуры, функции и так далее). Задачи, условие которых сформулировано в текстовой форме называются текстовыми, а в которых хотя бы один объект есть реальный предмет, называются практическими, или сюжетными, или житейскими. Задачи, все объекты которых математические, называются математическими. Остановимся более подробно на сюжетных задачах.

### п.2. Этапы решения задач

Процесс решения задачи – деятельность, которая состоит из отдельных действий, этапов. Решение задачи является не одномоментным действием, а сложной многоплановой работой учащегося. Весь процесс решения задачи можно разделить на восемь этапов:

1 этап - анализ задачи;

2 этап -построение модели задачи;

3 этап - поиск способа решения задачи;

4 этап - осуществление решения задачи;

5 этап - проверка решения задачи;

6 этап - исследование задачи и её решения;

7 этап - формулирование ответа задачи;

8 этап – учебно-познавательный анализ задачи и её решения.

Из указанных восьми этапов четыре являются обязательными, и они имеются (в том или ином виде, явно или неявно) в процессе решения любой задачи. Это этапы анализа задачи, поиска решения, осуществления решения и формулирования ответа. Остальные этапы являются необязательными, и имеются лишь при решении сложных или особых задач. Наибольшую трудность для ученика представляет этап поиска решения задачи. [67, c.167]

В процессе решения сюжетных задач нет необходимости придерживаться какой-то определенной схемы, разбивать и озаглавливать процесс решения на отдельные этапы. Тем более нет необходимости оформлять решение по одной и той же схеме: все зависит от характера и особенностей задачи, от того, с какой целью решается задача, на каком этапе обучения.

Однако само решение должно проводиться так, чтобы оно принесло наибольшую пользу для осуществления тех целей, ради которых решается та или иная задача. Поэтому рассмотрим более подробно и обобщенно отдельные этапы процесса решения сюжетных задач.

Ознакомление с текстом и анализ задачи может.

Восприятие и первичный анализ содержания сюжетной задачи начинается с её чтения и слушания. Качественное выполнение данных действий существенно влияет на степень понимания задачи, а следовательно, и на эффективность дальнейших действий по её решению. выделяет следующие требования к чтению и слушанию задачи:

а) Правильное прочтение всех слов, всех их сочетаний, интонационное соблюдений знаков препинания.

б) Правильная расстановка логических ударений. Логическое ударение оказывает при чтении значительное влияние на понимание задачи, ибо оно подразумевает выделение числовых данных, название отношений. [70,с. 53]

Царева С.Е. отмечает, что особенно важна правильная постановка логического ударения в вопросе задачи, так как выделение в нем различных слов по разному характеризует ситуацию, предшествующую данному вопросу. А это либо помогает понять задачу, либо препятствует такому пониманию. [70,с. 54]

В теории и практике наиболее распространены следующие способы предъявления задачи учащимся: чтение задачи в слух; чтение задачи «про себя» с последующими ответами на вопросы учителя, выполнение заданий под диктовку учителя (математический диктант), «чтение» по готовому рисунку (таблице). [23, c 175]

1. Анализ задачи может проводиться по двум направлениям:

а) предметно-содержательный анализ — это воссоздание той реальной задачной ситуации, моделью которой является данная задача. Такой анализ обычно проводится устно, и та задачная ситуация, которая создается на основе этого анализа, образует у решающего мысленный образ сюжета задачи. Чем более отчетлив этот образ, тем больше он помогает решающему в проведении последующего анализа, в поиске способа решения задачи;

б) логико-семантический анализ — это анализ текста задачи для установления величин, их значений и соотношений между ними, заданных в тексте задачи.

В результате логико-семантического анализа текста задачи устанавливается:

- какие величины характеризуют количественную сторону тех явлений, процессов или событий, которые составляют сюжет задачи;

- сколько и какие значения каждой величины заданы явно или неявно в тексте задачи;

- характер каждого значения величины: известное или неизвестное это значение, а если неизвестное, то какое — искомое, промежуточное (вспомогательное) или неопределенное;

- какими соотношениями связаны между собой эти значения величин;

- какое значение является главным в каждом соотношении, какие слова-признаки, входящие в задание значения величины, указывают на характер этого значения

- каков характер каждого из этих соотношений (разрешимое или неразрешимое);

- как связаны между собой эти соотношения.

Такой подробный и детальный анализ задачи, конечно, проводится не всегда, не при решении каждой задачи. Зачастую этот анализ проводится как бы неявно, не фиксируя результаты такого анализа.[39, c.168]

Объем и характер анализа зависит от многих обстоятельств; на какой ступени обучения находятся ученики; с какой целью проводится анализ задачи; одно дело, когда этот анализ проводится для того, чтобы найти способ решения задачи, и другое дело, когда анализ задачи проводится как самостоятельное упражнение для формирования у учащихся умений и навыков в проведении тщательного анализа задач до тех пор, пока не будет найден способ решения задачи, а в этом случае анализ текста задачи может проводиться не однажды. Во втором же случае анализ проводится развернуто по всем направлениям, а сама задача затем не решается, с тем чтобы осознаваемой целью деятельности учащихся был именно анализ задачи, а не решение задачи, в процессе которого проводится анализ.

Поэтому возможны случаи, когда анализ проводится целиком устно и внешне сводится к внимательному чтению текста задачи. Возможны и необходимы случаи, когда анализ проводится во всем объеме, со всеми деталями и с письменной фиксацией его результатов или построения на основе анализа модели задачи.

2. Построение модели сюжетной задачи имеет несколько целей:

а) для фиксации результатов анализа задачи и тем самым для организации самого этого анализа, поэтому построение модели задачи в этом случае проводится в процессе анализа и по мере его выполнения;

б) для взгляда на задачу с разных точек зрения.;

в) построение модели задачи является подготовительным этапом для построения решающей математической модели задачи. [73, c 54]

Конечно, построение модели задачи производится не всегда, не при решении любых сюжетных задач. Если задача простая и ее решение очевидно, то построение модели задачи излишне и не проводится. Если же задача сложная и ее решение не очевидно, то построение модели весьма желательно, ибо оно может помочь решающему в поисках способа решения задачи.

Модель задачи может быть самой различной: схематической, табличной, структурной, графической и т.д. Выбор вида модели задачи зависит как от характера задачи, так и от характера и особенностей решающего субъекта, от его умений и навыков, привычного для него способа анализа и построения модели задачи. Моделью текста может служить линейная или столбчатая диаграмма, отрезок с составляющими его частями, таблица.

При построении модели ученик опирается, с одной стороны, на данный ему текст задачи, а с другой — на приобретенные в результате жизненного опыта и школьного обучения знания о предметном содержании количественных соотношений, встречающихся в сюжетных задачах, и на способы описания этих соотношений.

При этом в действиях ученика можно заметить два диалектически противоположных процесса. С одной стороны, ученик как бы конкретизирует и дополняет условие задачи, с другой стороны, он отвлекается от ряда несущественных сторон рассматриваемого явления, отбрасывает те, которые не влияют ни на построение модели, ни на решение задачи.

Построение модели задачи может быть самостоятельным важным упражнением для формирования у учащихся умений и навыков в построении разного вида моделей задач.

3. Поиск способа решения задачи.

Любая сюжетная задача предполагает необходимость осознанного поиска соответствующего средства для достижения цели. Под поиском решения задачи ,будем понимать отыскание принципа построения логики решения, в соответствие с чем выполняются те или иные действия, о которых нельзя заранее сказать, приведут ли они к требуемому результату или нет. [22, с. 34]

Решение сюжетной задачи как способ нахождения ответа на вопрос задачи возможно многими методами, выбор которого зависит, в первую очередь, от решающего: какими знаниями и умениями он владеет, какие способы для него являются привычными. При этом надо учесть, что одна и та же задача, как правило, допускает решение не одним методом, а тем более способом, а многими. Конечно, выбор метода и способа решения зависит также от характера и особенностей решаемой задачи. Задача обучения состоит не только в том, чтобы учащиеся овладели всеми методами и способами решения сюжетных задач, но и в том, чтобы они научились правильно и рационально выбирать метод и способ решения для заданной задачи.

В случае сложной сюжетной задачи выбор метода зачастую представляет собой очень трудный процесс поиска среди известных ученику методов или же построение (изобретение) нового (для ученика) способа решения.

Как показывают результаты психологических исследований, главным, что определяет успех в этом поиске, является подход к заданной задаче как к объекту тщательного изучения (исследования), а не только как к объекту для решения. Это означает, что ученик должен, в первую очередь, видеть в задаче объект, который надо изучить, исследовать со всех сторон с целью изобретения своего, именно своего способа ее решения.[16, c.18]

Что касается вопроса: какой метод решения сюжетных задач является наилучшим, наиболее целесообразным, то из проведенного нами анализа следует, что этот вопрос является бес­смысленным, ибо для разных сюжетных задач следует использовать разные методы и способы. И все эти методы и способы должны изучаться в процессе обучения математике.

4. Построение решающей математической модели задачи. Выбрав тот или ной метод решения сюжетной задачи, следует построить для нее соответствующую решающую математическую модель. Это значит, что если выбран арифметический метод решения, то модель строится в виде вычислительной формулы или просто последовательности арифметических действий; если же выбран алгебраический метод решения, то решающая модель строится в виде уравнения или системы уравнений, неравенств или смешанной системы.[67, c.172]

5. Решение математической модели сюжетной задачи. В случае арифметического способа решение задачи сводится к выполнению намеченных действий или вычислений по полученной формуле.

В случае алгебраического способа решение задачи сводится к решению полученного уравнения, системы уравнений или неравенств.

При этом, как правило, требуется уточнение модели, ибо в противном случае можно получить решение, не удовлетворяю­щее условиям задачи. Это уточнение, которое мы подробно рас­смотрим ниже, обычно выделяется в особый этап процесса ре­шения — исследование задачи и ее решения.

6. Проверка – завершающий этап решения задачи, который состоит в установлении факта, что полученное решение удовлетворяет всем условиям задачи. Она необходима для того, чтобы исключить появление неверных (неполных) ответов задачи.

Но проверка решения сюжетной задачи нужна лишь при решении сложных задач. При решении простых задач проверка обычно не производится, ибо правильность или ошибочность решения очевидна. [67, c.172]

Формулирование ответа задачи. Ответ задачи обычно формулируется в форме словесного ответа на вопрос или требование задачи. Условия, при которых этот ответ имеет смысл, если они установлены, также указывается в ответе. Если же решений несколько, то все они перечисляются.

Учебно-познавательный этап. Решение сюжетных задач производится не для того, чтобы ученики нашли ответы этих задач, а для того, чтобы в процессе их решения ученики прибрели определенные знания, развили у себя определенные умения и способности, выработали общие полезные привычки и навыки. [67, c.173]

Поэтому заключительное обсуждение проведенного реше­ния, его анализ и исследование имеют не меньшее значение, чем собственно само решение, а может быть, и большее.

Выявление недостатков проведенного решения, поиски лучше­го решения, установление и закрепление в памяти учащихся тех приемов и способов, которые были использованы в данном реше­нии, выявление условий возможности применения этих приемов и способов — все это как раз и будет способствовать превращению ре­шения задач в могучее обучающее и воспитывающее средство.

### п.3. Методы решения задач

Общий метод решения сюжетных задач состоит в моделировании их в виде уравнений или систем уравнений (а также неравенств и систем неравенств). Но этот общий метод начал внедряться в школьное обучение лишь в последние десятилетия. А до этого в обучении применялись разные, часто весьма изощренные методы решения задач, рассмотрим основные из них.

*I. Арифметический метод.*

Первым этапом решения задач арифметическим методом является разбор условия задачи и составление плана её решения. Этот этап решения задачи сопровождается максимальной мыслительной деятельностью.

Вторым этапом является решение задачи по составленному плану. Этот этап решения проводится учащимися без особых затруднений и в большинстве случаев носит тренировочный характер. Решить задачу арифметическим методом – значит найти ответ на требование задачи посредством выполнения арифметических действий над числами

Третьим важным этапом решения задачи является проверка решения задачи. Она проводится по условию задачи. Пренебрежение проверкой при решении задачи, замена её проверкой ответов снижает роль решения задачи в процессе развития логического мышления учащихся. [77]

Одну и ту же задачу во многих случаях можно решить различными арифметическими способами. Задача считается решенной различными способами, если её решения отличаются связями между данными и искомыми, положенными в основу решений, или последовательностью использованных связей.

При решении текстовых задач арифметическим методом у учащихся вырабатываются определённые умения и навыки, которые в процессе дальнейшего обучения должны совершенствоваться и закрепляться. Этот метод целесообразно использовать в качестве пропедевтического.

*II. Алгебраический метод.*

Под алгебраическим методом решения задач понимается такой метод решения, когда неизвестные величины находятся в результате решения уравнения или системы уравнений, решения неравенства или системы неравенств, составленных по условию задачи. Иногда алгебраическое решение задачи бывает очень сложным.

При решении задач алгебраическим методом основная мыслительная деятельность сосредотачивается на первом этапе решения задачи: на разборе условия задачи и составлении уравнений или неравенств по условию задачи.

Вторым этапом является решение составленного уравнения или системы уравнений, неравенства или системы неравенств. Решить задачу алгебраическим методом - значит найти ответ на

требование задачи, составив и решив одну из алгебраических структур.

Третьим важным этапом решения задач является проверка решения задачи, которая проводится по условию задачи. [77]

Одну и ту же задачу можно также решить различными алгебраическими способами. Задача считается решенной различными способами, если для ее решения составлены различные математические структуры (уравнения, неравенства, системы уравнений, неравенств), в основе составления которых лежат различные соотношения между данными и искомыми.

Демидова Т.Е., Тонких А.П. выделяют следующие этапы в процессе составления уравнения с одним неизвестным по условию сюжетной задачи:

1. Сначала выбирают соотношение, на основании которого будет составлено уравнение. Если задача содержит более двух соотношений, то за основу для составления уравнения надо взять то соотношение, которое устанавливает некоторую связь между всеми неизвестными.

2. Затем выбирают неизвестное, которое обозначают соответствующей буквой.

3. Все неизвестные величины, входящие в выбранное для составления уравнения соотношение, необходимо выразить через выбранное неизвестное, опираясь на остальные соотношения, входящие в задачу, кроме основного.

4.Из указанных выше пунктов непосредственно вытекает составление уравнения как оформление словесной записи при помощи математических символов. [25, с.149 – 150]

*III. Геометрический метод*

Геометрическим называется метод, при котором поиск решения и само решение задачи выполнено с помощью построения геометрических объектов и измерения соответствующих величин.

При использовании данного метода график вычерчивается как можно более точно непосредственно по значениям величин, входящих в условие задачи. Несмотря на это, ответ может получиться приближенным.

Геометрический метод решения текстовых задач базируется на основных понятиях планиметрии (точка, отрезок, длина, площадь, треугольник, прямоугольник и др.), а также на свойствах плоских фигур. Решить задачу геометрическим методом – это значит найти ответ на требование задачи, используя геометрические построения или свойства геометрических фигур. Причем одну и ту же задачу можно решить различными геометрическими способами. Задача считается решенной различными способами, если для ее решения используются различные построения или свойства фигур. [77]

Между алгебраическими и геометрическими задачами, между языком алгебры (языком формул) и языком геометрии (языком расстояний) существует неразрывная связь, ставшая со времен Декарта очевидной даже тем, кто не слишком искушен в математике. В самом деле, решение многих геометрических задач может быть сведено к решению систем алгебраических уравнений и требует умения применять соответствующий алгебраический инструментарий.

Менее заметны, особенно школьнику, геометрические идеи, лежащие в основе решения ряда алгебраических задач: на вычисление наибольших и наименьших значений некоторых выражений, решение уравнений и неравенств. Вероятнее всего, это связано с тем, что алгебраический язык является для школьника своего рода первым математическим языком, а геометрический язык — вторым.

Изучение языка невозможно начать без словаря или хотя бы разговорника. Примером может служить этот словарь-разговорник довольно прост: в нем всего три строчки:

|  |  |
| --- | --- |
| АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ ЯЗЫК (ЯЗЫК ФОРМУЛ) | ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ ЯЗЫК (ЯЗЫК РАССТОЯНИЙ) |
| Числа и буквы | Расстояниядо координатных осей (координаты) |
| Модуль разности двух чисел | Расстояние между двумя точками координатной прямой |
| Сумма квадратов двух чисел | Квадрат расстояния между двумя точками координатной плоскости |

[74, c.64]

*IV. Логический метод.*

Решить задачу логическим методом - значит найти ответ на требование задачи, как правило не выполняя вычислений, а только посредством логических рассуждений. Примерами таких задач могут служить задачи «на переплавы». Классическим представителем логических задач является задача «о волке, козе и капусте». Формы выполнения решения различаются по способам фиксации решения, которая может быть выполнена в виде: [73, c.59]

1. Логической схемы.

При использовании логической схемы объекты, входящие в рассматриваемое явление или процесс, обозначаются словами, которые, как правило, заключаются в рамку, а связи между этими объектами обозначаются стрелками или линиями. Однако следует отметить, что при данном методе решения схема может быть как графически обозначенной, так и выраженной в речи, в рассуждении.

Из девяти монет, уплаченных купцу за товар, одна оказалась фальшивой (более легкая). Как двумя взвешиваниями на чашечных весах определить фальшивую монету.

 положить на две чаши весов по три монеты

 нет весы в да

 равновесии?

 из более легкой группы монет по-

 ложить на весы по одной положить на две чаши весов по

 монете на каждую чашу одной из оставшихся монет

 нет весы в да

 равновесии?

 более легкая (фальшивая) монета оставшаяся монета фальшивая

 на чаше, которая выше

 фальшивая монета определена?

2. Формул языка алгебры логики.

При использовании данной формы записи необходимо содержание задачи перевести в символику алгебры логики. Для этого в содержании задачи выделяют элементарные высказывания, и обозначают заглавными буквами, которые выбирают так, чтобы по ним можно было бы восстановить полный текст составного высказывания. На основе символического языка алгебры логики записать соответствующие формулы и путем их преобразования найти ответ. [73, c. 60]

3. Последовательности высказываний.

Решение задачи оформляется в виде последовательности высказываний, приводящих к формулированию ответа и обосновывающих его правильность.

Лучшее средство для спасения при пожаре – перекинутая через блок веревка с большими корзинами по концам. Когда одна корзина опускается, другая поднимается, поместив какой-то предмет в одну из корзин в качестве противовеса; более тяжелый предмет можно затем спустить вниз в другой корзине. … Если одна из корзин пуста, то в другой можно безопасно спустить предмет весом не более 30 футов. Если же обе корзины нагружены, то безопасная разница в весе между ними так же равна 30 футам.

Когда однажды ночью в отеле вспыхнул пожар, все постояльцы, за исключением ночного сторожа и его семьи, благополучно спаслись. Последних не удалось разбудить до тех пор, пока все пути к спасению, кроме «корзин», не оказались отрезанными. Сторож весил 90, его жена – 210, собака – 60 и младенец – 30 футов. Каждая корзина достаточно велика, чтобы вместить всех четверых, но никаких дополнительных грузов использовать нельзя – в спуске участвуют только сторож, жена, собака и младенец. Предполагается, что ни собака, ни младенец не могут влезть в корзину или выбраться из нее без посторонней помощи. Каким образом все четверо смогут поскорее спуститься вниз?

Сторож, жена, младенец и собака должны спасаться следующим

образом: 1) спустить младенца,

 2) спустить собаку, поднять младенца,

 3) спустить сторожа, поднять младенца,

 4) спустить младенца,

 5) спустить собаку, поднять младенца,

 6) спустить младенца,

 7) спустить жену, поднять всех остальных,

 8) спустить младенца,

 9) спустить собаку, поднять младенца,

 10) спустить младенца,

 11) спустить сторожа, поднять собаку,

 12) спустить собаку, поднять младенца,

 13) спустить младенца. [59, с. 232-234, 335]

*V. Практический метод*

Практическим называется метод, при котором поиск решения и само решение задачи выполнено на основе теоретико-множественного истолкования операций над числами.

Решить задачу практическим методом, значит найти ответ на требование задачи, выполнив практические действия с предметами или их копиями (моделями, макетами и так далее). [73, c.63]

Иногда в ходе решения задачи применяются несколько методов одновременно. В этом случае считают, что задача решается комбинаторным (смешанным) методом. Методы решения могут быть разными, но способ решения, лежащий в их основе, может быть один. Но несмотря на такое разнообразие методов решения задач, основными являются арифметический и алгебраический, редко геометрический методы.

## **§3. Сюжетная задача. Классификация, роль и место в обучении**

В обучении математике велика роль текстовых задач. Решение задач является основным видом деятельности учащихся. Решая задачи, учащиеся приобретают новые математические знания, готовятся к практической деятельности. Поэтому важно, чтобы учащиеся имели представление о текстовой задаче, о ее структуре, умели решать такие задачи различными методами.

Понятие «текстовая задача» в разных источниках трактуется по-разному. В одних источниках дана следующая формулировка понятия: «Текстовая задача - есть описание некоторой ситуации на естественном языке с требованием дать количественную характеристику какого-либо компонента этой ситуации, установить наличие или отсутствие некоторого отношения между ее компонентами или определить вид этого отношения». [55]

А в других источниках можно встретить такое определение: «Задача, в которой зависимость между условием и требованием сформулирована словами, называется текстовой». [72]

Под сюжетными, понимаются задачи, в которых описан некоторый жизненный сюжет (явление, событие, процесс), с целью нахождения определенных количественных характеристик или значений.[67]

Роль таких задач в процессе обучения математике многообразна, и В.А.Далингер сводит ее главным образом к следующим функциям:

- служат усвоению математических понятий и отношений между ними;

- обеспечивают усвоение учащимися специфических понятий, входящих в предметную область задач;

- способствуют более глубокому усвоению идеи функциональной зависимости;

- повышает вычислительную культуру учащихся;

- учат школьников применению такого метода познания действительности, как моделирование;

- способствуют более полной реализации межпредметных связей;

- развивают у учащихся способность анализировать, рассуждать, обосновывать;

- развивают логическое мышление школьников;

- развивают познавательные способности учащихся через усвоение способов решения задач; формируют универсальные качества личности, такие как привычка к интеллектуальному систематическому труду, стремление к познанию, потребность в контроле и самоконтроле и т.п.;

- прививают и укрепляют интерес школьников к математике. [23]

Обобщая сказанное, можем заключить, что решение текстовых задач формирует у учащихся предметные и общеинтеллектуальные умения и навыки учебно-познавательной деятельности и самообразование.

В методике обучения математике многие годы была распространена классификация, основу которой составлял характер требования: а) задачи на доказательство; б) задачи на построение; в) задачи на вычисление. Длительный успех этой классификации обеспечивало то, что она в какой-то степени предопределяла метод решения каждого типа задач. Данная классификация является довольно узкой и относится ко всем математическим задачам. Типология сюжетных задач более полно представлена другими авторами.

Шелехова Л.В. в своем учебно-методическом пособии классифицирует задачи исходя из анализа текста задачи: [73]

В зависимости от логического построения условия, Статкевич В.В. [62, с. 17] выделяет два типа составных задач:

1. Задачи с приведенным условием. В данных задачах сам текст и построение условия подсказывает порядок, последовательность решения простых задач, из которых состоит данная составная задача.

К Новому году Наташа купила три вида елочных шаров: 5 ша ров первого вида по 10 руб. за один шар; 3 шара второго вида по 17 рублей за 1 шар; и 2 шара третьего вида по 25 рублей за один шар. Сколько Наташа заплатила за всю покупку?

2. Задачи с неприведенным условием. Структура условия этих задач такова, что числовые данные, необходимые для решения простых задач, разъединены; рядом поставлены такие данные, которые не связаны непосредственно друг с другом. Кроме того, иногда связь между данными и искомыми выражена неявно и при изучении условия ее надо еще установить.

К Новому году Наташа купила три вида елочных шаров: 5 шаров первого вида, 3 шара второго вида и 2 шара третьего вида. Цена одного шара первого вида 10 рублей, второго - 17 рублей, третьего - 25 рублей. Сколько Наташа заплатила за всю покупку?

В зависимости от характера требований, Кулюткин Ю.Н. [41, с.19], Зайцев Г.Т. [31, с.13] и Фридман Л.М. [67, с.97] выделяют пять типов задач:

1. *Задачи на распознавание.* В качестве искомого в этих задачах выступает один из компонентов системы объектов, при этом предполагается, что этот компонент в наличной системе имеется и что его значение определяется отношениями, которые присущи данной системе.

Два индюка, - «Вот эти два индюка вместе весят двадцать фунтов», - сказал

мясник. – Однако фунт мяса индюшонка стоит на два цента дороже, чем фунт мяса крупного индюка.

Миссис Смит купила индюшонка за 92 цента, а миссис Браун заплатила 2 доллара 96 центов за большого индюка. Сколько весил каждый индюк? [59 с. 22]

2. *Задачи на конструирование.* В качестве искомого выступает та или иная система, причем функции, которыми она должна обладать, описываются в требованиях задачи.

Составить текст задачи о покупке тетрадей так, чтобы ее решением было следующее числовое выражение: (5 + 30) 2 − 6

3. *Задачи на доказательство.* В качестве искомого в них выступает процедура обоснования истинности некоторого утверждения.

Вообразим, что земной шар обтянут по экватору обручем и что подобным же образом обтянут и апельсин по его большому кругу. Далее вообразим, что окружность каждого обруча удлинилась наодин сажень. Тогда, разумеется, обручи отстанут от поверхности тел, которые они раньше стягивали, останется некоторый прозор (промежуток). Спрашивается: в каком случае этот прозор будет больше – у земного шара или апельсина? [37, с. 194]

4. *Задачи на исследование.* В качестве искомого в них выступают: а) связи и зависимости между некоторыми фактами и явлениями, а также внутренние отношения, определяющие качественную природу объектов; б) числовые значения величин исследуемых элементов и выявление закономерности появления данных числовых значений.

Имеются три сплава. Первый сплав содержит 30% никеля и 70% меди, второй – 10% меди и 30 % марганца, третий - 15% никеля, 25% меди и 60% марганца. Из них необходимо приготовить новый сплав, содержащий 40 % марганца. Какое наименьшее и какое наибольшее процентное содержание меди может быть в этом сплаве? [1, с. 180]

5. *Задачи на преобразование.* В качестве искомого в них выступает процесс преобразования исходного состояния системы в заданное, которое указано в требовании задачи.

Исходная задача.

Некто, умирая, оставил жену в ожидании ребенка и сделал такое завещание: в случае рождения сына отдать ему 2/3 оставшегося имущества, а 1/3 - матери. В случае рождения дочери она должна получить 1/3 , а мать – 2/3 имущества. Вдова завещателя родила близнецов, мальчика и девочку. Как разделить имущество, чтобы удовлетворить условиям завещания? [37, с. 387-388]

По отношению между условиями и требованиями Стойлова Л.П. [63, с.116], Артемов А.К., Семенова Т.В. [15, с. 55], Фридман Л.М. [68, с. 97] различают:

1. Определенные задачи – в них заданных условий столько, сколько необходимо и достаточно для выполнения требований.

В январе завод выполнил 105 % месячного плана, а в феврале дал продукции на 4% больше, чем в январе. На сколько процентов завод перевыполнил месячный план? [1, с. 54]

2. Неопределенные задачи – в них условий недостаточно для получения ответа.

В январе завод перевыполнил месячный план, а в феврале дал продукции на 4% больше, чем в январе. На сколько процентов завод перевыполнил месячный план?

3. Переопределенные задачи – в них имеются лишние условия.

В январе завод выполнил 105 % месячного плана, что составило 2340 тон продукции, а в феврале дал продукции на 4% больше, чем в январе. На сколько процентов завод перевыполнил месячный план?

Вторая классификация приведена Цыпкиным А.Г.[61]:

1. *Задачи на движение.*

В условии задач на движение обычно содержатся следующие величины: расстояние, которое обозначается буквой S; скорости движущихся тел, которые обозначаются буквами u, v, w или буквами, снабженными индексами v1,v2,...; время - t, Т. В случае, если движение равноускоренное (или равнозамедленное), ускорение обозначается буквой а.

Движение бывает трех разных видов: равномерное движение, движение по окружности, равноускоренное движение.

2. *Задачи на работу и производительность труда.*

Система уравнений, которую нужно составить на основании условий, в задачах на работу обычно содержит следующие величины: время t, в течении которого производится работа, производительность N - работу, произведенную в единицу времени, и собственно работу А, произведенную за время t. Уравнение, связывающее эти три величины имеет вид А=N\*t.

3. *Задачи с целочисленными неизвестными.*

Целочисленность искомого неизвестного обычно является дополнительным условием, позволяющим выбрать его однозначно из некоторого множества значений, удовлетворяющих остальным условиям задачи.

4. *Задачи на процентный прирост и вычисление «сложных процентов».*

Решение задач на процентный прирост и вычисление «сложных процентов» основано на использовании следующих понятий и формул. Пусть некоторая переменная А, зависящая от времени t, в начальный момент t=0 имеет значение А0, а в некоторый момент времени t1 имеет значение А1.

Абсолютным приростом величины А за время t1 называется разность А1-А0, относительным приростом величины А за время t1, - отношение (А1-А0)/А0 и процентным приростом величины А за время t1 – величина $\frac{A\_{1}-A\_{0}}{A\_{0}}∙100\%$.

Обозначая процентный прирост величины А через р%, получаем следующую формулу, связывающую значения А0, А1, и процентный прирост:

$\frac{A\_{1}-A\_{0}}{A\_{0}}∙100\%=p\%$.

Также существует формула сложных процентов:

$A\_{n}=A\_{0}∙(1\pm \frac{p\_{1}}{100})∙(1\pm \frac{p\_{2}}{100})∙\cdots ∙(1\pm \frac{p\_{n}}{100})$.

5. *Задачи на концентрацию и процентное содержание.*

Решение задач на концентрацию и процентное содержание основано на использовании следующих понятий и формул. Основные допущения:

Все растворы сплава и смеси считаются однородными.

При составе смеси из компонентов с объемами V1, V2, …, Vk считаем, что объем смеси равен V0= V1, + V2 + …+ Vk.

При составе сплава или раствора из компонентов с массами m1, m2, …, mk считаем, что масса полученного сплава или раствора равна m0= m1, + m2 + …+ mk.

у

4. Концентрация компонентов в смеси $C\_{k}=\frac{V\_{k}}{V\_{0}}$ где $V\_{k}$ - объем чистого компонента, $V\_{0}$- объем смеси С1+С2+...+Ск=1.

у

Процентное содержание компонентов смеси $P\_{k}=C\_{k}100\%=\frac{V\_{k}}{V\_{0}}100\%$.

При работе со сплавами и растворами речь идет только о процентном

содержании $P\_{k}=\frac{m\_{k}}{m\_{0}}100\%$.

6. *Задачи на стоимость.*

При решении этих задач используется следующая формула, связывающая цену 1 ед. - Ц, количество единиц - m и стоимость т единиц –Ст,:

$$С\_{Т}=Ц∙m$$

[61]

В последнее время получила распространение типология задач, в которой каждый тип задач соотносится с компонентами учебной деятельности: организационно-действенным, стимулирующим и контрольно-оценочным. Указанное сопоставление выделяет следующие типы задач:

1) задачи, стимулирующие учебно-познавательную деятельность;

2) задачи, организующие и осуществляющие учебно-познавательную деятельность школьников;

3) задачи, в процессе решения которых осуществляется контроль и самоконтроль эффективности учебно-познавательной деятельности.

В зависимости от конкретизации учебной деятельности классификация будет наполняться более конкретным содержанием:

1) задачи, стимулирующие усвоение знаний, умений и навыков;

2) задачи, в процессе решения которых осуществляется усвоение знаний, умений и навыков;

3) задачи, контролирующие усвоение знаний, умений и навыков.

С задачами (житейскими, производственными, научными) человек встречается ежедневно. Любое дело, любая работа, в конечном счете, сводится к решению задач. Поэтому научиться решать задачи чрезвычайно важно. Конечно, в математике решаются не любые задачи, а лишь математические и сводимые к ним. Но умение решать математические задачи оказывают огромное влияние на общее умение решать задачи, и тот, кто умеет решать эти задачи, сумеет решить и другие. [69, с.47]

Однако умение решать задачи самостоятельно, без посторонней помощи формируется автоматически, непроизвольно лишь у небольшой части учащихся. Для большинства же требуется специальная работа учителя в этом направлении. Необходимо учить школьников решать задачи, думать над задачей.

Роль задач в обучении и развитии учащихся исследуются в работах Р.С. Черкасова и А.А. Столяра [47], Г.И. Саранцева [57], Л.И. Кузнецовой [36], М. Тарановой [64], В. Марковой [43], Л. Перминовой [51].

Р.С. Черкасов и А.А. Столяр рассматривают следующие роли задач[47]:

1) Обучающая роль математических задач.

Обучающую роль математические задачи выполняют при формировании у учащихся системы знаний, умений и навыков по математике и ее конкретным дисциплинам. Авторы выделяют несколько типов задач по их обучающей роли:

- задачи для усвоения математических понятий;

- задачи для овладения математической символикой;

- задачи для обучения доказательствам;

- задачи для формирования математических умений и навыков;

- задачи, которые предваряют изучение новых фактов, концентрируют внимание учащихся на вновь изучаемых идеях, понятиях и методы, задачи, которые создают проблемную ситуацию с целью приобретения учащимися новых знаний.

2) Развитие мышления учащихся при решении математических задач.

- Мыслительные умения, восприятие и память при решении задач.

Решение математических задач требует применения многочисленных мыслительных умений: анализировать заданную ситуацию, сопоставлять данные и искомые, решаемую задачу с решенными ранее, выявляя скрытые свойства заданной ситуации; конструировать простейшие математические модели, осуществлять мысленный эксперимент; синтезировать, отбирая полезную для решения информацию, систематизируя ее; кратко и четко, в виде текста, символически, графически и так далее оформлять свои мысли; объективно оценивать полученные при решении задачи результаты, обобщать или специализировать результаты решения задачи, исследовать особые проявления заданной ситуации.

При обучении решению задач необходимо специально анализировать с учащимися связь и отношения элементов задачи. Так облегчится выбор приемов переработки условия задачи. При решении задач часто приходится обращаться к памяти. Индивидуальная память способного к математике ученика сохраняет не всю информацию, а преимущественно «обобщенные и свернутые структуры». Сохранение такой информации не загружает мозг избыточной информацией, а запоминаемую позволяет дольше хранить и легче использовать. Обучение обобщениям при решении задач развивает, таким образом, не только мышление, но и память, формирует «обобщенные ассоциации». При непосредственном решении математических задач и обучении их решению необходимо все это учитывать.

- Обучение мышлению.

Эффективность математических задач и упражнений зависит от степени творческой активности учеников при их решении.

Собственно, одно из основных назначений задач и упражнений и заключается в том, чтобы активизировать мыслительную деятельность учеников на уроке.

Математические задачи должны будить мысль учеников, заставлять ее работать, развиваться, совершенствоваться. При решении математических задач учащиеся обучаются четкому мышлению, умению рассуждать, сопоставлять и противопоставлять факты, находить в них общее и различное, делать правильные умозаключения.

Умение рассуждать включает в себя и умение оценивать истинность или ложность высказываний, правильно составлять сложные высказывания и суждения, то есть логически правильно употреблять союзы «и», «или», отрицание «не». Обучение верному применению этих связок помогает воспитанию у учащихся математически грамотной речи, а мышление связано с языком, речью человека.

Существенно для развития математического мышления учащихся формирование умений правильно выделять посылки и заключения. Такие умения формируются обычно при решении задач на доказательство.

- Задачи, активизирующие мыслительную деятельность учащихся.

Эффективность учебной деятельности по развитию мышления зависит от степени творческой активности учащихся при решении математических задач.

3) Воспитательная роль математических задач.

Процесс обучения тесным образом связан с воспитанием учащихся. В школе обучение не мыслится отдельно от воспитания. Обучая решению математических задач, учитель в то же время воспитывает учащихся, формирует у них качества (усидчивость, внимательность, сосредоточенность, настойчивость и упорство, аккуратность, математический стиль мышления и так далее), формирует в них личность. [47, с. 150-162]

Роль задач в обучении математике подчеркивает в работе Г.И. Саранцев.

В истории использования задач в обучении математике автор выделяет следующие этапы:

1) изучение математики с целью обучения решению задач;

2) обучение математике сопровождается решением задач;

3) обучение математике через решение задач.

Сущность этих этапов обусловлена целям обучения, новым образовательным концепциям, целям математического образования.

Задачи обеспечивают овладение умениями: распознавать объекты, принадлежащие понятию, выводить следствия из принадлежности объекта понятию, переходить от определения понятия к его признакам, переосмысливать объекты с точки зрения других понятий.

В своей работе Г.И. Саранцев приводит конкретные примеры, подтверждающие роль задач на различных этапах процесса обучения учащихся и говорит о том, что задача - основное средство развития пространственного мышления, творческой деятельности школьников, в процессе решения задач формируется не только логическая, эвристическая, алгоритмическая составляющие мышления, но и многие нравственные качества учащихся. [57, с. 128-130]

# Выводы по I главе

1. В ходе изучения психолого-педагогической, философской, методической литературы были рассмотрены различные определения понятия «модель» и «моделирование» и их классификации. Из всех определений этих понятий можно выделить основные черты модели:

* модель замещает объект-оригинал;
* сохраняет некоторые важные свойства объекта-оригинала;
* результаты исследования модели переносятся на оригинал.

В свою очередь под моделированием понимается процесс построения, изучения и применения моделей.

Из всего многообразия моделей большинство специалистов выделяют два класса моделей:

1. материальные (реально существующие, по­строенные из каких-либо вещественных предметов: из ме­талла, дерева, стекла и других материалов);

2) идеальные (воображаемые, основанные на мысленном представлении).

2. Математическое моделирование, как частный случай моделирования, предполагает использование в качестве средства исследования оригинала его математическую модель, с помощью которой появляется возможность сформулировать задачу его изучения как математическую и воспользоваться для анализа универсальным математическим аппаратом.

3. Использование моделирования в обучении имеет два аспекта. Во-первых, моделирование служит тем содержанием, которое должно быть усвоено учащимися в результате обучения, теми методами познания, которыми они должны овладеть, и, во-вторых, моделирование является учебным действием и средством, без которого невозможно полноценное обучение. Метод моделирования используется в любой науке, обладает огромной эвристической силой: позволяет свести изучение сложного к простому, невидимого  — к видимому, то есть сделать любой сложный объект доступным для тщательного всестороннего изучения.

4. Представления школьников о математическом моделировании весьма ограничены, хотя математическое моделирование играет важную роль в развитии диалектико-материалистического мировоззрения и является мощным методом научного познания. Включение в школьный курс математики уже на ранних этапах обучения понятий «модель» и «моделирование», формирование простейших умений математического моделирования играет важную роль в развитии личности в целом. Обучение моделированию учащихся приводит к повышению эффективности обучения и общеразвивающему эффекту. Наиболее эффективно, данный метод изучается и осваивается в ходе решения задач.

5. Из изученной литературы можно сказать, что каждая задача - это единство условия, которое в ней указано, требования или вопроса, на который надо найти ответ. Известно, что все задачи, решаемые в школе, различаются характером своих объектов. В одних задачах объектами являются реальные предметы, в других - все объекты математические. Таким образом можно выделить признаки, по которым классифицируются задачи: задачи, условие которых сформулировано в текстовой форме называются *текстовыми*, а в которых хотя бы один объект есть реальный предмет, называются *практическими, или сюжетными, или житейскими*. Задачи, все объекты которых математические, называются *математическими.*

6. Задача - основное средство развития пространственного мышления, творческой деятельности школьников. В процессе решения задач формируется не только логическая, эвристическая, алгоритмическая составляющие мышления, но и многие нравственные качества учащихся.

О роли задач говорят многие специалисты. Основными являются:

1) Обучающая роль математических задач.

2) Развитие мышления учащихся при решении математических задач.

3) Воспитательная роль математических задач.

7. Решение задачи является не одномоментным действием, а сложной многоплановой работой учащегося. Весь процесс решения задачи можно разделить на восемь этапов, но лишь четыре являются обязательными - это этапы анализа задачи, поиска решения, осуществления решения и формулирования ответа. Остальные этапы являются необязательными, и имеются лишь при решении сложных или особых задач. Наибольшую трудность для ученика представляет этап поиска решения задачи.

8. Общий метод решения сюжетных задач состоит в моделировании их в виде уравнений или систем уравнений. Но этот общий метод начал внедряться в школьное обучение лишь в последние десятилетия. А до этого в обучении применялись разные методы решения задач: а*рифметический, алгебраический, геометрический, логический и практический методы.* Иногда в ходе решения задачи применяются несколько методов одновременно. В этом случае считают, что задача решается комбинаторным (смешанным) методом

# Глава II. Методические возможности использования метода математического моделирования при решении сюжетных задач.

## **§1. Обзор школьных учебников с точки зрения наличия элементов математического моделирования авторов**

### п.1. Краткий обзор текстовых задач в учебниках алгебры

Рассмотрим в данном параграфе, какое место занимают текстовые задачи в наиболее популярных учебниках основной школы.

Если рассматривать учебники по математике (5-6-х классов), то у разных авторов сюжетные и текстовые задачи встречаются в каждом пункте. Так что говорить о недостатке в их количестве не приходиться. Однако с точки зрения наличия математического моделирования или его пропедевтики, учебники построены по разному.

В учебниках по математике для 5 класса Дорофеева Г. В., Петерсон Л. Г. [26, 27] уже во втором параграфе предлагается для изучения тема «Математические модели», поэтому далее весь материал опирается на понятия «математическая модель» и «моделирование».

Авторы не дают определение модели, а на примере двух задач показывают, что в двух непохожих ситуациях используется одна и та же *математическая модель*, сразу указывая на ценность математического моделирования, что одна и та же модель может описывать различные явления. Для того чтобы построить математическую модель, надо, прежде всего, научиться переводить условия задач на математический язык.

Самая распространенная формулировка заданий, характерная для метода моделирования, звучит следующим образом:

* переведи условие задачи на математический язык;
* построй математическую модель задачи и реши ее.

Далее говорится, что после перевода задачи на математический язык поиск решения сводится *к работе с математическими моделями* – к вычислениям, преобразованиям, рассуждениям.

В 6 классе [14] выделяются этапы процесса математического моделирования, в соответствии с этими этапами выделяются этапы решения задач с помощью уравнений.

Большое внимание уделяется этапу формализации, который вызывает у школьников наибольшие трудности при решении задач.

Для сравнения возьмем учебники по математике для 5 – 6 классов Н. Я. Виленкина и других [19 – 20], Г.В. Дорофеева и И. Ф. Шарыгина [45 – 46], И. И. Зубаревой и А. Г. Мордковича [33 – 34] и определим, какую роль авторы этих учебников отводят моделированию.

В учебниках [19], [20] понятия «модель» и «моделирование» не вводятся ни в 5, ни в 6 классах, соответственно нет задач с формулировкой, характерной для метода моделирования.

В учебнике [46] небольшое внимание уделяется математическому языку, но не встречаются сюжетные задачи, требующие перевода условия задачи с русского на математический язык. Однако, седьмой главе есть пункт 53 «о математическом языке», где школьники учатся переводить русский текст на математический язык и обратно (например: произведение суммы двух слагаемых и некоторого числа равно сумме произведений каждого из слагаемых на это число. Ученики запишут в тетради: (a+b)c=ac+bc). Данный пункт можно считать пропедевтикой математического моделирования.

В учебнике [33] изучаются темы «Математический язык», «Математическая модель». Как и в учебнике [26] понятие модели вводится с помощью рассмотрения двух задач, в которых требуется найти значение одного и того же выражения. Выражение, полученное в процессе решения, - это математическая модель реальной жизненной ситуации, о которой говорится в задаче.

Авторы пишут: «Выполняя задания по переводу «обычной» речи на математический язык, мы каждый раз составляли математическую модель данной ситуации. Однако важно не только уметь составлять математические модели, но и выполнять обратную работу – понимать, какую ситуацию (или обстоятельства) описывает данная модель». Так неявно выделяются этапы моделирования: формализация и интерпретация.

Но следует отметить, что задачи, в которых требуется построить математическую модель, встречаются в учебниках [33], [34] очень редко.

Далее рассмотрим учебники по алгебре (7-9 классы).

Учебник Алимова входил в федеральный перечень учебников, рекомендованных (допущенных) Министерством образования и науки Российской Федерации к использованию в образовательном процессе в общеобразовательных учреждениях, на 2007/2008 учебный год.

Алгебра 7 Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, Ю.В. Сидоров [10].

Текстовые задачи появляются в первом параграфе («Числовые выражения», первой главы «Алгебраические выражения») и с их помощью вводится понятие числовое выражение.

Кроме того, текстовые задачи встречаются в темах: «Алгебраические равенства. Формулы», «Свойства арифметических действий», «Решение задач с помощью уравнений», «Степень с натуральным показателем», «Свойства степеней с натуральным показателем», «Функция», «Функция y=kx и её график», «Линейная функция и её график», «Решение задач с помощью систем уравнений».

По планированию на темы: «Решение задач с помощью уравнений» и «Решение задач с помощью систем уравнений» отводится по 3 часа.

В теме «Решение задач с помощью уравнений» приводится 1 разобранная задача и 10 задач в качестве упражнений, 2 из которых повышенной сложности. Решение данных задач сводиться к решению линейного уравнения. В теме «Решение задач с помощью систем уравнений» приводиться 3 разобранные задачи и 28 задач, 6 из которых повышенной трудности и 4 трудные. Задачи решаются с помощью системы линейных уравнений.

Алгебра 8 Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, Ю.В. Сидоров [11].

В данном учебнике текстовые задачи встречаются в темах: «Решение неравенств», «Решение систем неравенств», «Приближенные вычисления», «Оценка погрешности», «Округление чисел», «Относительная погрешность», «Решение задач с помощью квадратных уравнений», «Решение простейших систем, содержащих уравнение второй степени», «Построение графика квадратичной функции».

По планированию на тему: «Решение задач с помощью квадратных уравнений» отводится 4 часа.

В теме «Решение задач с помощью квадратных уравнений» приводиться 3 разобранные задачи и 17 задач в качестве упражнений, 5 из которых повышенной трудности и 4 трудные. Задачи решаются при помощи квадратных уравнений.

Алгебра 9 Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, Ю.В. Сидоров [12].

В данном учебнике текстовые задачи встречаются в темах: «Функция », «Радианная мера угла», «Арифметическая прогрессия», «Сумма n первых членов арифметической прогрессии» «Геометрическая прогрессия», а так же в дополнительных упражнениях к главам.

В теме «Функция » приводятся физические задачи, в которых надо найти центростремительное ускорение, объем газа или силу тока. Эти задачи показывают связь между данной темой и курсом физики.

В теме «Радианная мера угла», для наглядности, приводиться задача в которой надо найти путь минутной стрелки Кремлевских курантов.

В теме «Арифметическая прогрессия» приведены 2 текстовые задачи в разделе задач повышенной трудности.

В теме «Геометрическая прогрессия» приведены 3 текстовые задачи в разделе задач повышенной трудности.

Ни в одном из своих учебников автор не вводит понятие «модели» и «моделирования» явно.

Алгебра 7 А.Г. Мордкович [4 – 5].

Уже в первой главе автор говорит о математическом языке, обращая внимание на существование как письменной, так и устной математической речи. Понятие математической модели вводится на четырех аналогичных примерах, но точного определения не дается. Приводится таблица различных реальных ситуаций и их математических моделей (всего семь) [с.14], акцентируется внимание на том, что существуют не только алгебраические модели, но и словесная, геометрическая, графическая, приводится пример последней. После решения конкретной задачи выделяются этапы её решения, а затем и общие этапы метода математического моделирования (всего три) [с.17]. Уже в четвертом параграфе первой главы «линейное уравнение с одной переменной» встречаются текстовые задачи, которые необходимо решать методом моделирования. Далее данная терминология (модель, моделирование и т.п.) часто употребляется в учебнике, а изученный метод решения сюжетных задач становится основным. А.Г. Мордкович неоднократно напоминает как пользоваться методом математического моделирования, приводя примеры решенных задач(7 параграф с.40, 14 параграф с.70, 26 параграф с.109) .

Алгебра 8 А.Г. Мордкович [6 – 7].

В восьмом классе автор не много внимания уделяет моделированию. Только лишь после овладения навыками решения рациональных уравнений, учащимся предлагается параграф «Рациональные уравнения как математические модели реальных ситуаций». В нем собрано достаточное количество текстовых и сюжетных задач. По планированию на изучение данного параграфа отводится 4 часа.

Алгебра 9 А.Г. Мордкович [8 – 9].

Ситуация аналогичная 8 классу. Здесь учащимся предлагается параграф «Системы уравнений как математические модели реальных ситуаций». Автор напоминает алгоритм решения сюжетной задачи методом математического моделирования на примере задачи, решенной в 8 классе. Акцентируется внимание на том, что математическая модель одной и той же задачи может быть различной. Отмечаются так же плюсы и минусы каждого способа решения. По планированию на изучение данного параграфа отводится 5 часов.

### п.2. Обзор текстовых задач, входивших в задания ГИА

В данном параграфе мы рассмотрим текстовые задачи, входящие в новую систему государственной (итоговой) аттестации по алгебре в 9 классе. Основное назначение новой системы – введение открытой, объективной, независимой процедуры оценивания учебных достижений учащихся, результаты которой будут способствовать осознанному выбору дальнейшего пути получения образования. Экзаменационные материалы реализуют современные подходы к построению измерений, они обеспечивают более широкие по сравнению с действующим экзаменом дифференцирующие возможности.

Экзаменационная работа рассчитана на выпускников девятых классов общеобразовательных учреждений (школ, гимназий, лицеев). Её содержание находится в рамках обязательного минимума содержания образования по математике в основной школе, при этом подбор заданий осуществлен с учетом идеологии требований к уровню подготовки учащихся, предъявляемых новыми образовательными стандартами.

Работа состоит из двух частей.

Первая часть направлена на проверку базовой подготовки выпускников в её современном понимании. По сравнению с традиционным экзаменом здесь усилены понятийный и практический аспекты. Проверке подвергается не только усвоение основных алгоритмов и правил, но и понимание смысла важнейших понятий и их свойств, содержание применяемых приемов, умение применять знания в простейших практических ситуациях. При выполнении заданий первой части учащиеся должны продемонстрировать определенную системность знаний, умение пользоваться разными математическими языками и переходить с одного из них на другой, распознавать стандартные задачи в разнообразных формулировках.

Эта часть работы содержит 16 заданий с выбором ответа, с кратким ответом и на соотнесение. В основу структурирования первой части работы положен содержательный принцип – задания располагаются группами в соответствии с разделами содержания, к которым они относятся.

Вторая часть направлена на дифференцированную проверку повышенных уровней подготовки. Она содержит 5 заданий из различных разделов курса, предусматривающих полную запись хода решения. Задания во второй части расположены по нарастанию сложности – от относительно простых до достаточно сложных, требующих свободного владения материалом и высокого уровня математического развития.

Задания второй части позволяют выявить владение формально-оперативным алгебраическим аппаратом, способностью к интеграции знаний из различных тем школьного курса, владение исследовательскими навыками, а также умение найти и применить нестандартные приемы рассуждений. При выполнении второй части работы учащиеся должны продемонстрировать умение математически грамотно записать решение, приводя при этом необходимые пояснения и обоснования.

**Примеры текстовых задач, входящих в первую часть.**

1. *В двух библиотеках было одинаковое количество книг. Через год в первой библиотеке число книг увеличилось на 50%, а во второй – в 2 раза. В какой библиотеке книг стало больше?*

*А. В первой библиотеке В. Книг осталось поровну Б. Во второй библиотеке Г. Для ответа не хватает данных*

1. *На коробке с кукурузными хлопьями массой 190 граммов имеется надпись, информирующая, что допустимое отклонение массы нетто  граммов. Какую массу не могут иметь кукурузные хлопья?*

*А. 194 г Б. 185 г В. 184 г Г. 186 г*

1. *Из прямоугольного листа жести, длина которого 10, а ширина 6, требуется сделать открытую коробку, длина основания которой в два раза больше ширины. Для этого из каждого угла листа вырезают квадрат и после этого сгибают оставшуюся часть в коробку. Из какого уравнения может быть найдена сторона  вырезаемых квадратов?*
2. *Велосипедист от озера до деревни ехал со скоростью 15 км/ч, а обратно – со скоростью 10 км/ч. Сколько времени ушло у него на дорогу от озера до деревни, если на весь путь туда и обратно велосипедист затратил 1 ч? Пусть x ч – время, затраченное на дорогу от озера до деревни. Какое из уравнений соответствует условию задачи?*

*А. 15x = 10(1 – x) B. 15x + 10(1 – x) = 1 Б. Г. 15(1 – x) = 10x*

1. *В классе 18 учащихся. Для поливки сада каждая девочка принесли по 2 ведра воды, а каждый мальчик – по 5 ведер. Всего было принесено 57 ведер воды. Сколько в классе девочек и сколько мальчиков. Пусть в классе x девочек и y мальчиков. Какая система уравнений соответствует условию задачи?*

*А. В.  Б. Г. *

**Примеры тестовых задач, входящих во вторую часть.**

* 1. *Велосипедист едет сначала 3 минуты с горы, а затем 9 минут в гору. Обратный путь он проделывает за 12 минут. При этом в гору велосипедист едет всегда с одной и той же скоростью, а с горы – с большей, но также всегда одинаковой скоростью. Во сколько раз скорость движения велосипедиста с горы больше, чем его же скорость в гору?*
	2. *Клиент внес 3000 р. на два вклада, один из которых дает годовой доход, равный 8%, а другой – 10%. Через год на счетах у него было 3260 р. Какую сумму клиент внес на каждый из счетов?*
	3. *Длина детской площадки прямоугольной формы на 5 м больше её ширины. Длину площадки увеличили на 2 м, а ширину – на 5 м, при этом её площадь увеличилась на 280 м2. Найдите площадь новой детской площадки.*
	4. *На соревнованиях по кольцевой трассе один лыжник проходил круг на 3 мин быстрее другого и через час обогнал его ровно на круг. За сколько минут каждый лыжник проходит круг?*
	5. *Фирма A может выполнить некоторый заказ на производство игрушек на 4 дня быстрее, чем фирма В. За какое время может выполнить этот заказ каждая фирма, если известно, что при совместной работе за 24 дня они выполнят заказ в 5 раз больший?*
	6. *Каждый слушатель на курсах изучает один из языков – английский, немецкий или французский. Отношение числа слушателей, изучающих английский, к числу слушателей изучающих немецкий, равно 3 : 2, а изучающих немецкий к числу изучающих французский равно 8 : 5. Сколько процентов слушателей изучает наименее популярный на курсах язык.*

## **§2. Методические рекомендации изучения математического моделирования в шестом классе по учебнику авторов Н. Я.Виленкин, В. И. Жохов и др.**

Решение сюжетных задач идет на протяжении всего школьного курса математики. Учащиеся начинают их решать уже в начальной школе и приходят в пятый класс с определенными навыками чтения текста условия задачи, анализа её содержания, составления краткой записи условия, со знаниями зависимости между величинами. Впереди новые типы задач и новые способы их решения. Как осуществить переход к новым более сложным задачам и сделать этот переход более легким для восприятия учащимися, причем, не теряя, а развивая уже имеющиеся знания и навыки? Эту проблему мы попытаемся решить.

Если обратить внимание на методику обучения решения сюжетных задач, то большинство авторов рассматривают решение конкретной задачи, показывая тем самым логику рассуждения и пример. Однако, четкого выделения этапов решения нет. Из личного опыта выяснилось, что учитель на уроке самостоятельно, на своё усмотрение выделяет эти этапы и акцентирует на этом внимание своих подопечных.

В учебнике Мордковича А.Г.[7] в теме «Решение текстовых задач с помощью уравнений» автор выделяет три этапа и акцентирует внимание на моделировании задачи. Но на наш взгляд говорить о методе моделирования, как о методе решениия сюжетных задач необходимо раньше, ведь при решении любой текстовой задачи неотъемлемой частью является построение модели задачи, следовательно перевод с естественного языка на математический (символический, графический). Исследование этой модели служит средством для получения ответа на требование задачи. В ходе решения задачи выбранным методом строится «своя» математическая модель: запись решения по действиям с объяснением или выражение, если задача решается арифметическим методом; уравнение или система уравнений и неравенств, если задача решается алгебраическим методом; диаграмма или график, если она решается наглядно – геометрическим методом. Интерпретация полученных результатов осуществляется с помощью обратного перевода с математического языка на естественный, что также является важным умением.

А.Г.Мордкович учит составлять математические модели. Автор говорит о том, что алгебра в основном занимается тем, что описывает различные реальные ситуации на математическом языке в виде математических моделей, а затем имеет дело уже не с реальными ситуациями, а с этими моделями, используя разные правила, свойства, законы, выработанные в алгебре. Автор начинает обучение методу математического моделирования лишь в седьмом классе.

В шестом классе (авторы Н.Я. Виленкин, В.И.Жохова и др.[20]) учащиеся осваиваю такие важные алгебраические модели, как пропорция и уравнение. Выделим темы учебника, в которых необходимо уделить особое внимание решению текстовых задач.

|  |
| --- |
| Учебник Виленкин Н.Я.и др. Математика. Учебник для 6 класса. М., «Мнемозина». |
| № п\п | Наименование темы | Кол-во часов |
| **4** | **Умножение и деление обыкновенных дробей** |  |
| 4.2 | ***Нахождение дроби от числа*** | 4 |
| 4.6 | ***Нахождение числа по его дроби*** | 5 |
| **5** | **Пропорции** |  |
| 5.3 | ***Прямая и обратная пропорциональные зависимости*** | 3 |
| **9** | **Решение уравнений** |  |
| 9.4 | Решение уравнений | 6 |

[53]

Целесообразно познакомить учащихся с методом математического моделирования после закрепления навыков решения уравнений. На всю тему отводится 17 часов, среди которых по три часа на «раскрытие скобок» и «подобные слагаемые», шесть часов непосредственно на решение уравнений. Из последних шести часов мы предлагаем два часа отвести на решение сюжетных задач методом математического моделирования.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 9.1 | Раскрытие скобок | 3 |
| 9.2 | Коэффициент | 2 |
| 9.3 | Подобные слагаемые | 3 |
| 9.4 | Решение уравнений | 6 |
| 9.5 | Обобщение, систематизация и коррекция знаний. | 1 |
| ***9.6*** | ***Контрольная работа № 6 по теме "Решение уравнений"*** | ***1*** |
| 9.7 | Итоги контрольной работы | 1 |

***Тематическое планирование двух уроков по теме «Математическое моделирование, как метод решения сюжетных задач.»***

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Тема | № | Тема, изучаемые дидактические единицы | Учебные задачи, диагностируемые цели | Тип урока | Задачи |
| В классе | Дома  |
| ***Уравнения, как математические модели реальных ситуаций*** | 1 | Математическое моделирование, как метод решения сюжетных задач. Дидактические единицы: модель, математическая модель, виды моделей, уравнение, алгоритм решения уравнения, этапы решения сюжетных задач. | **Учебная задача урока:** в совместной деятельности с учащимися научиться переводить условия задач с привычного родного языка на специальный, математический язык.**Диагностируемые цели:**В результате урока ученик*Знает:* описание математической модели, метода математического моделирования, некоторые виды математических моделей;*Умеет:* переводить текст задачи на математический язык, строить и выделять математическую модель задачи, отличать математические модели от иных, работать с математическими моделями;*Понимает:* что такое модель, математическая модель; что различные задачи могут иметь одну и ту же математическую модель; задача может иметь несколько моделей; необходимость изучения математического аппарата.  | Урок изучения нового | Задача1, Задача 2 | Решить задачу 1 двумя способами, №1305, №1309. |
|  | 2 | Решение задач с применением метода математического моделирования.Дидактические единицы: математическая модель, уравнение, алгоритм решения уравнения, этапы решения сюжетных задач | **Учебная задача:** в совместной деятельности с учащимися сформулировать алгоритм решения задачи с помощью уравнений методом математического моделирования, научиться его применять.**Диагностируемые цели:**В результате урока ученик**Знает:** этапы математического моделирования, этапы решения задач с помощью уравнения, некоторые особенности решения сюжетных задач и самопроверки решения;**Умеет:** переводить текст задачи на математический язык, строить математическую модель задачи, решать задачи методом математического моделирования с помощью уравнения, четко выделять каждый этап; | Урок систематизации и обобщения. |  |  |
|  |  |  | **Понимает:** суть математического моделирования, значимость каждого его этапа; различные задачи могут иметь одну и ту же математическую модель,при этом значение неизвестной будут совпадать; задача может иметь несколько моделей, при этом ответ должен получаться одинаковым. |  |  |  |

**Урок изучения нового «Математическое моделирование, как метод решения сюжетных задач»**

**Учебник:** Виленкин Н. Я. Математика, 6 класс. Учебник для 6 кл. общеобразовательных учреждений / Н. Я. Виленкин, В. И. Жохов, А. С. Чесноков, С. И. Шварцбург. / 12-е изд., стереотип. – М.: Мнемозина, 2003. - 304 с.

**Тип урока:** Урок изучения нового

**Учебная задача:** в совместной деятельности с учащимися научиться переводить условия задач с привычного родного языка на специальный, математический язык.

**Диагностируемые цели:**

В результате урока ученик

**Знает:** описание математической модели, метода математического моделирования, некоторые виды математических моделей;

**Умеет:** переводить текст задачи на математический язык, строить и выделять математическую модель задачи, отличать математические модели от иных, работать с математическими моделями;

**Понимает:** что такое модель, математическая модель; что различные задачи могут иметь одну и ту же математическую модель; задача может иметь несколько моделей; необходимость изучения математического аппарата.

**Методы обучения:** эвристическая беседа, репродуктивный, аналогия

**Форма работы:** фронтальная, индивидуальная

**Структура урока:**

Мотивационно – ориентировочная часть – 15 минут

Операционально – познавательная часть – 20 минут

Рефлексивно – оценочная часть – 5 минут

**Ход урока**

|  |  |
| --- | --- |
| **Деятельность учителя** | **Деятельность учеников** |
| 1. **Мотивационно – ориентировочный этап.**
 |
| *Актуализация.*Учитель предлагает ребятам решить 2 задачи по вариантам.**Задача 1. (1 вариант)** На выставке кошек представлены кошки сибирской, ангорской, персидской и сиамской пород. Сибирских кошек на 3 больше, чем сиамских, персидских на одну меньше, чем ангорских, ангорских в 4 раза больше, чем сиамских. Сколько кошек каждой породы на выставке, если всего их 32.**Задача 2. (2 вариант)** На вопрос учеников о прошедшей контрольной работе учитель ответил: «Пятерок на 3 больше, чем двоек, троек на одну меньше, чем четверок, а четверок в 4 раза больше, чем двоек». Сколько человек получили пятерки и сколько четверки, если в классе 32 человека? Затем учитель просит по одному человеку от каждого варианта записать на доске уравнение, получившееся в результате решения задачи.Что вы заметили? | Решают задачи самостоятельно (не более 5 минут).1. Пусть х – сиамских кошек, тогда сибирских х+3; ангорских – 4х; персидских - 4х-1.

х+(х+3)+4х+(4х-1)=3210х=30х=3 – сиамских,3+3=6 – сибирских,4\*3=12 – ангорских,4\*3-1=11 – персидских.1. Пусть х – число двоек, тогда пятерок – х+3; четверок – 4х, троек – 4х-1.

х+(х+3)+4х+(4х-1)=3210х=30х=3 – двоек,3+3=6 – пятерок,4\*3=12 – четверок,4\*3-1=11 – троек.1. х+(х+3)+4х+(4х-1)=322. х+(х+3)+4х+(4х-1)=32- задачи разные, а уравнения одинаковые. |
| *Мотивация.*Мы видим, что в совершенно различных, на первый взгляд, задачах можно обнаружить, что их решение практически одинаково. В этих двух непохожих ситуациях мы использовали одну и ту же математическую модель. Полученное вами уравнение – это и есть математическая модель задачи. Ребята, а знакомы ли вы вообще с понятием «модель»? Можете ли вы привести примеры известных вам моделей.- Итак, полученное уравнение – это математическая модель задачи, тогда в чем состоит отличие математической модели от других моделей.- Хорошо. Приведите пример такой математической модели.- Посмотрите на модель задачи, что еще может использоваться?- Молодцы. Можете привести пример, если вместо числа стоит некоторая переменная (буква)- Обобщим выше сказанное: Математическая модель описывается средствами математики, то есть с помощью математических знаков и символов и представляет собой математическое выражение или равенство. | - Можно в качестве примера привести такие модели: глобус – модель земного шара, перед тем, как построить дом, архитектор создает его уменьшенную копию – модель и т.п.(если ученики затрудняются, то учитель приводит несколько примеров самостоятельно).- в математических моделях используются числа и арифметические действия.- 25\*3+32-15- скобки или другие математические символы, например: (12-5)+4(8-15)-  |
| *Учебная задача.* - Для того чтобы построить математическую модель задачи, что, на ваш взгляд, прежде всего нужно научиться делать?- Абсолютно верно. | - Нужно уметь переводить условия задач с привычного родного языка на специальный, математический язык. |
| 1. **Операционально – познавательный этап.**
 |
| Рассмотрим несколько задач с примерами перевода условия текстовой задачи на математический язык. Начнем с простых: **Задача 1.** Сережа, Костя и Денис принесли на выставку 120 почтовых марок. Сережа принес 25 марок, а Костя – в 2 раза больше марок, чем Сережа. Сколько марок принес на выставку Денис.- Артем, как будешь решать задачу? - Молодец. Запиши получившееся выражение на доске.Это выражение является математической моделью данной задачи.- Присаживайся.**Задача 2.** В соревнованиях по плаванию приняло участие 60 человек, причем мальчиков было в 3 раза больше, чем девочек. Сколько мальчиков и сколько девочек участвовало в соревнованиях.- Кристина, с чего начнешь решение задачи?- Верно, рассуждай дальше.- Запиши полученное уравнение на доске.- Это уравнение является математической моделью данной задачи. Обратите внимание на то, что модели получились различные. В первой задаче математической моделью является алгебраическое выражение, во второй – уравнение.- Мы перевели условия задачи на математический язык, таким образом получились новые тексты задач. Но мы их не решили, то есть не ответили на поставленный вопросы. Как же найти неизвестные числа?- Для первой задачи, Артем? - Сформулируй ответ задачи.(ученик оценивается)- Для второй задачи, Кристина?- Сформулируй ответ задачи.(ученик оценивается)- Из рассмотренных примеров видно, что после перевода текста задачи на математический язык поиск решения сводится к **работе с математическими моделями** – к вычислениям, преобразованиям, рассуждениям.Далее ученикам предлагается выполнить следующие задания.**Задание 1.** Переведите условие задачи с русского языка на математический двумя различными способами:Тетради в клетку дороже тетрадей в линейку на 400 руб. За 8 тетрадей в клетку надо заплатить на 1600 руб. больше, чем за 10 тетрадей в линейку. Какова цена этих тетрадей?- Что можно принять за неизвестную?- Оба варианта верны. Пусть каждый попробует записать текст задачи на математическом языке, обозначив за неизвестное тот вид тетрадей, который хочет. Какие уравнения получились?- Запишите к себе в тетрадь оба варианта(не забудьте что обозначает х в каждом из уравнений). Решение задачи, оба способа, выполните дома.Построй математическую модель задачи и реши ее.**Задание 2.** Из двух городов, расстояние между которыми 294 км, одновременно навстречу друг другу выехали два мотоциклиста. Через 1 ч 40 мин расстояние между ними стало равно 24 км. Скорость первого мотоциклиста составляет 80% скорости второго. С какой скоростью они ехали? - Какая формула, прежде всего, необходима для решения задач на движение?- Какие из этих величии известны из текста задачи?- Какую величину можем найти без труда?- Из чего будет складываться этот путь?- Еще дана зависимость. Какая?- Как найти скорость первого, если была бы известна скорость второго?- Что обозначим за неизвестную? Составьте математическую модель задачи.- Денис выйди к доске запиши, что у тебя получилось. Молодец продолжай работать с моделью. Сформулируй ответ задачи (ученик оценивается), присаживайся.**Задание 3.** Предприятию было выделено для сотрудников 120 садовых участков. Из них 25% участков еще не освоено, а на освоенных участках построены деревянные и кирпичные дома. Сколько построено кирпичных домов, если их число составляет 20% от числа деревянных домов?Эту задачу попробуйте решить самостоятельно. Можете обсуждать решение в парах.- Какой получилась математическая модель?- Что в этом случае обозначает неизвестная?Решите уравнение, чему равно значение переменной? |   120 С . К. Д. 25  ?- Марки Дениса составляют часть всех марок, которые принесли мальчики. Поэтому для ответа на вопрос задачи надо из всех марок вычесть марки Сережи и Кости. Из условия известно, что все трое ребят принесли 120 марок. Сережа принес 25 марок, а Костя -  марок. Значит, Денис принес  марок.- - для решения задачи нужно ввести переменную. Обозначим число девочек через *x*. Тогда число мальчиков равно 3*x*, а всего участников соревнований . Так же из условия знаем, что всего в соревнованиях приняло участие 60 человек. Тогда получим уравнение: .- найти результат выражения: .- Денис принес на выставку 45 марок.- Решить уравнение., тогда .,,=45.- В соревнованиях участвовало 15 девочек и 45 мальчиков.Пусть х – стоимость тетрадей в клетку, тогда х-400 – стоимость тетрадей в линейку.8х+1600=10(х-400).Пусть х – стоимость тетрадей в линейку, тогда х+400 – стоимость тетрадей в клетку.10х=8(х+400)+1600- стоимость тетрадей в клетку,- стоимость тетрадей в линейку,- 8х+1600=10(х-400)- 10х=8(х+400)+1600- Формула зависимости пути от скорости и времени. S=Vt- знаем время: 1час 40 минут или 100 минут.- можем найти путь, пройденный двумя мотоциклистами.- из пути пройденного первым мотоциклистом и пути пройденного вторым мотоциклистом. То есть 100V1+100V2, где V1 и V2 – это скорости.- зависимость скоростей мотоциклистов. В задаче сказано, что скорость первого мотоциклиста составляет 80% скорости второго- нужно скорость второго умножить на 80%.Пусть х – скорость второго мотоциклиста, тогда100х+80%\*100х=294-24180х=270х=1,5(км/мин) или 1,5\*60=90(км/ч)80%\*90=0,8\*90=72(км/ч)Ответ: первый мотоциклист ехал со скоростью 72 км/ч, а второй – 90 км/ч.- 120-25%\*120=х+20%\*х- 120-0,25\*120=х+0,2х(возможны другие варианты)- х – это число деревянных домов.х=75а количество кирпичных домов равно 20%\*75=0,2\*75=15. |
| 1. **Рефлексивно – оценочный этап.**
 |
| - Вами были решены две различные задачи с использованием математической модели задачи. Давайте обратим внимание, не было ли в ходе их решения общего? - Что делали в самом начале решения задачи?- Хорошо. Построили математическую модель задачи. Какой был следующий шаг?- Верно, таким образом находили некоторое значение (обсуждать как именно работали с моделью не нужно). - И самое последнее.- Да, запись ответа или интерпретация полученных результатов.- Такой метод решения сюжетных задач имеет свое название, но об этом мы будем говорить на следующем уроке, а сейчас с какими понятиями вы познакомились сегодня на уроке?- В школе в качестве моделей изучаются не только числовые или буквенные выражения и уравнения. В старших классах вы познакомитесь с другими видами моделей: неравенствами, системами уравнений или неравенств, а также с функциями.- Что необходимо уметь для построения математической модели?- Научились вы это делать.- Что на ваш взгляд является самым трудным при решении текстовой задачи?- Что является залогом успешной работы с математической моделью?- Ваше домашнее задание: решить задачу 1 двумя способами, №1305, №1309.- Урок окончен. До свидания. | - В самом начале необходимо было перевести текст задачи с русского языка на язык математический или построить математическую модель.- дальше решали эту модель или работали с математической моделью задачи.- Запись ответа.- понятие модели, математической модели- Нужно уметь переводить условия задач с привычного родного языка на специальный, математический язык.- Да, но еще не очень хорошо.- Верно составить математическую модель.- Хорошие математические знания. |

**Урок систематизации и обобщения по теме «Решение задач с применением метода математического моделирования»**

**Учебник:** Виленкин Н. Я. Математика, 6 класс. Учебник для 6 кл. общеобразовательных учреждений/ Н. Я. Виленкин, В. И. Жохов, А. С. Чесноков, С. И. Шварцбург. / 12-е изд., стереотип. – М.: Мнемозина, 2003. - 304 с.

**Тип урока:** систематизации и обобщения.

**Учебная задача:** в совместной деятельности с учащимися сформулировать алгоритм решения задачи с помощью уравнений методом математического моделирования, научиться его применять.

**Диагностируемые цели:**

В результате урока ученик

**Знает:** этапы математического моделирования, этапы решения задач с помощью уравнения, некоторые особенности решения сюжетных задач и самопроверки решения;

**Умеет:** переводить текст задачи на математический язык, строить математическую модель задачи, решать задачи методом математического моделирования с помощью уравнения, четко выделять каждый этап;

**Понимает:** суть математического моделирования, значимость каждого его этапа; различные задачи могут иметь одну и ту же математическую модель, при этом значение неизвестной будут совпадать; задача может иметь несколько моделей, при этом ответ должен получаться одинаковым.

**Методы обучения:** эвристический, репродуктивный, аналогия;

**Форма работы:** фронтальная, групповая;

**Структура урока:**

Мотивационно – ориентировочная часть – 7 минут

Операционально – познавательная часть – 33 минуты

Рефлексивно – оценочная часть – 5 минут

**Ход урока:**

|  |  |
| --- | --- |
| **Деятельность учителя** | **Деятельность учеников** |
| 1. **Мотивационно – ориентировочный этап.**
 |
| *Актуализация.*- Выберите из списка математические моделиА) 2+53-56/2Б) глобусВ) (12\*3-7)\*15-23Г) :-\*Д) 16к-12к+8=0- Являются ли остальные примеры моделями, если да, то моделями чего?- Хорошо. Чем же описывается математическая модель? | А), В), Д)- Глобус – модель земли; :-\* - модель поцелуя.- Математическая модель описывается средствами математики, то есть с помощью математических знаков и символов и представляет собой математическое выражение или равенство. |
| *Мотивация. Учебная задача.*Распространенным видом математических моделей являются уравнения. На этом занятии мы будем учиться решать задачи с помощью уравнений. Но прежде чем ответить на вопрос, как решать задачи, попытаемся разобраться, для чего их решать. Задачи в истории возникли как инструмент тренировки ума. Ситуации, описанные в задачах, иногда кажутся надуманными. Но для составителя это не важно, так как он не повторяет реальную ситуацию, а конструирует ее, сохраняя связи между величинами в реальных процессах. Таким образом, решая задачи, мы учимся строить математические модели реальных ситуаций.В завершении прошлого урока, решая сюжетные задачи, мы выделили несколько этапов. Вспомним их. Верно. Такой метод решения задач называется «методом математического моделирования». Какова на ваш взгляд цель сегодняшнего урока?Верно. Итак тема занятия «метод математического моделирования» | - Сначала переводили текст задачи на математический язык, потом работали с полученной моделью, потом записывали ответ.- Решать задачи методом математического моделирования. |
| 1. **Операционально – познавательный этап.**
 |
| Математическое моделирование включает в себя три этапа:1. построение модели (перевод условия задачи на математический язык);
2. работу с моделью;
3. практический вывод.

- В соответствии с этим выделим этапы решение задач с помощью уравнений.- Что будет являться математической моделью? Значит первый этап – это?- Составили уравнение. Какой следующий шаг?- Верно. Этап решения уравнения (не обращая внимания на текст задачи). - И завершающий этап.- Или интерпретация полученных результатов.- Обратим внимание на ключевые моменты. С чего начинается составление уравнения?- Верно. Для этого, прежде всего надо определить, о каких величинах идет речь в задаче, какая между ними взаимосвязь, какие из величин известны, а какие нет.- Что обычно принимают за  *x*?- Да, однако, это совсем не обязательно. Лучше обозначать величины так, чтобы получилось более простое и удобное для решения уравнение. Есть еще один важный момент, на который нужно обращать внимание при составлении уравнения – это соответствие единиц измерения величин. Если, например, скорость движения выражена в километрах в час, а время в минутах, то что необходимо сделать?- И последнее. Решая задачу с помощью уравнения, надо помнить о том, что не всегда корни уравнения представляют собой искомые величины. Поэтому перед тем, как записать ответ, надо сопоставить введенные обозначения с вопросом задачи. Кроме того, ответ должен соответствовать реальности. Например, если получилось, что в классе 25,8 учащихся, то либо задача составлена не корректно, либо в решении допущена ошибка.Итак. Решим задачу, четко соблюдая все этапы метода математического моделирования.**Задача.** В первой бочке было в 2 раза меньше огурцов, чем во втором. После того как из первой бочки взяли 500 г огурцов, а из второй – 6 кг, во второй бочке осталось на 60% огурцов больше, чем в первой. Сколько огурцов было во второй бочке первоначально?- Прежде всего, заметим, что масса огурцов выражена в разных единицах. - В задаче требуется найти исходную массу огурцов во второй бочке. Но за *x* удобнее принять исходную массу огурцов в первой бочке, так как она меньше и у нас не появится дробей.- Для того чтобы составить уравнение, заполним таблицу.- Заметим, что, составляя таблицу, делая к задаче рисунок или чертеж, мы также составляем математическую модель данной задачи, которая называется графической, что во многих случаях позволяет нам облегчить решение задачи- Составили уравнение, можем переходить ко второму этапу.- Каким будет следующий шаг?(Здесь учитель отвечает на возникшие вопросы, если они есть и делит класс на 4 группы. Каждой группе дается решить по одной задаче, после чего она презентует решение всему классу и происходит обсуждение решения) | (записывают в тетрадь)- уравнение.Составление уравнения.- Его надо решить.- Записать ответ.(запись в тетради:«Этапы решение задач с помощью уравнений:1) составление уравнения;2) решение уравнения;3) ответ на вопрос задачи.»)- Составление уравнение начинается с выбора неизвестной величины, которую обозначают буквой *x* (или любой другой буквой).- Обычно за *x* принимают искомую величину.- Необходимо или время выразить в часах, или скорость – в километрах в минуту.1 этап. - Переведем граммы в килограммы: 500 г = 0,5 кг.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | Масса огурцов в 1 бочке | Масса огурцов во 2 бочке |
| Было | *x* кг | 2*x* кг |
| Стало | (*x –* 0,5) кг | (2*x* – 6)кг |

Решение:1) 100% + 60% = 160% - составляет масса огурцов, оставшихся во второй бочке от массы огурцов, оставшихся в первой бочке.2) Пусть в первой бочке было *x* кг огурцов, тогда во второй бочке было 2*x* кг огурцов. В первой бочке осталось (*x* – 0,5)кг, а во второй – (2*x* – 6)кг огурцов. Масса огурцов, оставшихся в первой бочке, составляет 160% от массы огурцов, оставшихся во второй бочке, значит:- Решим уравнение.2 этап. (кг)- третий этап – запись ответа3 этап. Ответ: во второй бочке было 26 кг огурцов. |
| **Задача 1.** Из коробки взяли сначала 4 конфеты, а потом еще четверть оставшихся конфет. После этого в коробке осталось  всех конфет. Сколько конфет осталось в коробке? (№ 118)**Задача 2.** Грузовик проехал в первый день треть всего пути, а во второй день – 90% пути, пройденного в первый день, а за третий день – остальные 440 км. Сколько километров проехал грузовик за второй день? (№ 117 (а))**Задача 3.** На двух элеваторах зерна было поровну. Когда из первого элеватора вывезли 140 т зерна, а из второго в 2,5 раза больше, во втором элеваторе зерна осталось в 2,4 раза меньше, чем в первом. Сколько тонн зерна было на элеваторах первоначально? (№ 150)**Задача 4.** Мастер может выполнить весь заказ за 8 ч, а его ученик - за 10 ч. В час ученик делает на 15 деталей меньше мастера. Найди производительность мастера и производительность ученика (№116(а)) |
| 1. **Рефлексивно – оценочный этап.**
 |
| - С каким методом решения сюжетных задач познакомились сегодня на уроке?- Сколько этапов включает в себя этот метод? Перечислите их.- Что необходимо для успешного разрешения каждого этапа?- Перечислите этапы решение задач с помощью уравнений. | - методом математического моделирования.- Три этапа.1. построение модели,
2. работу с моделью;
3. практический вывод.

Для верного построения модели нужно уметь переводить текст задачи на математический язык. Для успешной работы с математической моделью необходимо хорошо владеть математическими знаниями. Для правильного вывода – логическое мышление.- 1) составление уравнения;2) решение уравнения;3) ответ на вопрос задачи. |

## **§3. Методические рекомендации изучения математического моделирования в восьмом классе по учебнику автора А. Г. Мордковича.**

Для учащихся восьмого класса метод математического моделирования не является новым, так как в седьмом классе они уже встречались с ним и решали сюжетные задачи данным методом.

В восьмом классе в теме квадратные уравнения, на которую отводится 20 часов, после изучения основных понятий, основной формулы корней квадратного уравнения и рациональных уравнений, изучается параграф «Рациональные уравнения, как математические модели реальных ситуаций». На этот параграф отводится четыре часа. Представим подробное тематическое планирование параграфа.

***Тематическое планирование системы уроков по теме «Рациональные уравнения как математические модели реальных ситуаций»***

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Тема | № | Тема, изучаемые дидактические единицы | Учебные задачи, диагностируемые цели | Тип урока | Задачи |
| В классе | Дома  |
| Рациональные уравнения как математические модели реальных ситуаций. | 1 | Рациональные уравнения как математические модели реальных ситуаций.Дидактические единицы: математическая модель, рациональное уравнение, алгоритм решения рационального уравнения, этапы решения сюжетных задач. | **Учебная задача урока:** В совместной деятельности с учащимися выявить типы задач, в которых математическими моделями выступают рациональные уравнения, а также отразить общую схему решения данных задач.**Диагностируемые цели:** В результате урока ученик:*Знает:* понятие математической задачи, понятие рационального уравнения, алгоритм решения рационального уравнения, этапы решения текстовой (сюжетной) задачи. | Урок решения ключевых задач | Задача1, Задача 2 | 27.5, 27.16, 27.18 |
|  |  |  | *Умеет:* проводить этапы решения задач в конкретной ситуации: строить математические модели, то есть составлять рациональное уравнение в соответствии с условиями задачи, проводить решение рационального уравнения, записывать правильно ответ задачи.*Понимает:* роль математического моделирования при решении данных задач и в математике в целом. |  |  |  |
|  | 2,3 | Рациональные уравнения как математические модели реальных ситуаций.Дидактические единицы: математическая модель, рациональное уравнение, алгоритм решения рационального уравнения, этапы решения сюжетных задач. | **Учебная задача урока:** В совместной деятельности с учащимися закрепить навыки решения задач, в которых математической моделью выступают рациональные уравнения; открыть новые типы данных задач.**Диагностируемые цели:** В результате урока ученик:*Знает*: понятие математической задачи, понятие рационального уравнения, алгоритм решения рационального уравнения, этапы решения текстовой (сюжетной) задачи.*Умеет:* проводить этапы решения задач в конкретной ситуации: строить математические модели, то есть составлять рациональное уравнение в соответствии с условиями задачи, проводить решение рационального уравнения, записывать правильно ответ задачи.*Понимает:* роль математического моделирования при решении данных задач и в математике в целом; что существуют задачи, не только на  | Урок практикум. Самостоятельная работа. | Задача1, Задача 2 из учебника, | 27.28, 27.29, 27.44, 27.22, |
|  |  |  | равномерное движение, в которых математической моделью выступает рациональное уравнение, но и геометрические, арифметические задачи. |  |  |  |
|  | 4 | Рациональные уравнения как математические модели реальных ситуаций.Дидактические единицы: математическая модель, рациональное уравнение, алгоритм решения рационального уравнения, этапы решения сюжетных задач. | **Учебная задача урока:** * Закрепить навыки решений задач, математическими моделями которых являются рациональные уравнения.
* Развить коллективный метод работы у учеников.

**Диагностируемые цели:** В результате урока ученик:*Знает:* общую схему решения задач;*Умеет:* проводить этапы решения задач в конкретной ситуации: строить математические модели, то есть составлять рациональное уравнение в соответствии с условиями задачи, проводить решение рационального уравнения, записывать правильно ответ задачи.*Понимает:* роль математического моделирования при решении данных задач и в математике в целом. | Урок практикум, дидактическая игра | Задачи выбираются самими учениками |  |

Далее приведены конспекты данных уроков.

**Урок решения ключевых задач по теме:**

 **«Рациональные уравнения как математические модели реальных ситуаций».**

**Тема: Рациональные уравнения как математические модели реальных ситуаций.**

**Тип урока:** Урок решения ключевых задач (1 час).

**Учебная задача урока:** В совместной деятельности с учащимися выявить типы задач, в которых математическими моделями выступают рациональные уравнения, а также отразить общую схему решения данных задач.

**Диагностируемые цели:**

В результате урока ученик:

*Знает:* понятие математической задачи, понятие рационального уравнения, алгоритм решения рационального уравнения, этапы решения текстовой (сюжетной) задачи.

*Умеет:* проводить этапы решения задач в конкретной ситуации: строить математические модели, то есть составлять рациональное уравнение в соответствии с условиями задачи, проводить решение рационального уравнения, записывать правильно ответ задачи.

*Понимает:* роль математического моделирования при решении данных задач и в математике в целом.

**Форма:** фронтальная, индивидуальная.

**Средства:** мел, доска, учебник, интерактивная доска.

**Методы:** Частично-поисковый метод.

**Структура урока:**

*Мотивационно – ориентировочный этап*

Актуализация знаний. Проводится входная диагностика знаний учащихся, на установления уровня знаний по темам: решение рациональных уравнений, математические модели, этапы решения сюжетных задач.

*Операционно – познавательный этап*

Решение задачи №1. Решение задачи №2.

*Рефлексивно – оценочный этап*

Подведение итогов урока. Выдача задания ученикам.

**Ход урока:**

|  |  |
| --- | --- |
| Речь учителя | Речь ученика |
| **Мотивационно - ориентировочный этап.** |
| *Актуализация*Учитель предлагает ученикам выполнить следующий тест. |  |
| **Тест**1. Указаны действия алгоритма решения рационального уравнения. Составьте правильную последовательность действий, выбрав нужную букву действия, алгоритма:
	1. Преобразовать уравнение к виду алгебраической дроби $\frac{p(x)}{q(x)}$;
	2. Для каждого корня уравнения p(x)=0 сделать проверку: удовлетворяет ли он условию q(x)$\ne $0. Если нет, то это корень уравнения, если да – посторонний корень;
	3. Преобразовать уравнение к виду p(x)=0;
	4. Перенести все члены уравнения в одну часть;
	5. Решить уравнение p(x)=0;
	6. Решить уравнение q(x)=0;
	7. Для каждого корня уравнения p(x)=0 сделать проверку: удовлетворяет ли он условию q(x)$\ne $0. Если да, то это корень уравнения, если нет – посторонний корень;

Ответ: \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.1. Решением рационального уравнения $\frac{10}{x+2}+\frac{6}{x-2}=2$:
	1. -8; 0;
	2. 1,6; 0;
	3. 0, 8;
	4. -4+$2\sqrt{6}$; -4-$2\sqrt{6}$.

Ответ:\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.1. Для приведенной ниже ситуации постройте математическую модель:

Лодка прошла 10 км по течению реки и 6 км против течения, затратив на весь путь 2 ч. Собственная скорость лодки неизвестна – x, скорость течения реки равна 2 км/ч.Ответ:\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.1. Опишите этапы решения текстовых задач, выделите данные этапы и опишите какие действия выполняются на них.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ |
| Учитель просит записывать ответы на двух листках: один из которых сдается учениками учителю, а второй оставляется для проверки.Далее, после выполнения работы и сдачи ответов учениками, идет совместное обсуждение. - Какова последовательность действий при решении рационального уравнения?Верно. Далее необходимо было выполнить решение рационального уравнения, чтобы найти его корни. Представьте решение данного уравнения. (Вызывает ученика к доске)Верное. Представленное решение удовлетворяет всем этапам алгоритма решения задачи.Прежде чем ответить на следующий вопрос, вспомним что называется математической моделью?Какова будет математическая модель конкретной ситуации, представленной задачи?Верно. Составьте задачу на основе данной ситуации, чтобы математические модели данной ситуации и задачи совпадали.Из каких этапов состоит решение задачи?Верно. Второй этап задачи вы выполнили выполните третий этап.Итак, мы с вами только что решили задачу, в которой математической моделью при ее решении выступило простейшее рациональное уравнение. Однако мы с вами уже научились решать более сложные рациональные уравнения, следовательно, наша задача рассмотреть решение текстовых задач, которых данные уравнения выступают в роли математических моделей.Какова цель нашего урока?Верно, запишем тему урока: «Рациональные уравнения как математические модели реальных ситуаций».  | Ученики выполняют самостоятельно, индивидуально данный тест.  - Перенести все члены уравнения в одну часть;- Преобразовать уравнение к виду алгебраической дроби $\frac{p(x)}{q(x)}$; - Решить уравнение p(x)=0;- Для каждого корня уравнения p(x)=0 сделать проверку: удовлетворяет ли он условию q(x)$\ne $0. Если да, то это корень уравнения, если нет – посторонний корень;$\frac{10}{x+2}+\frac{6}{x-2}=2$;$\frac{10}{x+2}+\frac{6}{x-2}-2$=0;$\frac{10}{x+2}+\frac{6}{x-2}-\frac{2}{1}=0$;$\frac{10\left(x-2\right)+6\left(x+2\right)-2\left(x-2\right)(x+2)}{\left(x+2\right)(x-2)}=0$;$\frac{10x-20+6x+12-2x^{2}+8}{\left(x+2\right)(x-2)}=0$;$\frac{-2x^{2}+16x}{\left(x+2\right)(x-2)}=0$;$-2x^{2}+16x=0$;$x\_{1}=0$, $x\_{2}=8$.q(x)=$ \left(x+2\right)(x-2)$q(0)$\ne $0, q(8)$\ne $0Ответ: 0 и 8.Различные реальные ситуации описываются с помощью математического языка в виде математической модели (уравнения, алгебраического выражения, системы уравнений), затем исследуют уже непосредственно математическую модель процесса, ситуации, используя средства алгебры.Приняв за неизвестную x собственную скорость лодки, тогда:$\frac{10}{x+2}$ - время затраченное лодкое на прохождение 10 км по течению реки; $\frac{6}{x-2}$ - время затраченное лодкой на прохождение 6 км. Против течения реки.Математическая модель данной ситуации:$$\frac{10}{x+2}+\frac{6}{x-2}=2$$Лодка прошла 10 км по течению реки и 6 км против течения, затратив на весь путь 2 ч. Чему равна собственная скорость лодки, если скорость течения реки равна 2 км/ч?Решение задачи состоит из следующих этапов:1. Составление математической модели: на данном этапе выбирается неизвестная величина, записываются отношения, математическая модель, которая содержит неизвестную.
2. Работа с математической моделью: на данном этапе решается уравнение или система уравнений.
3. Ответ на вопрос задачи: получив решение уравнения или системы уравнений, возвращаются к ситуации описанной задачи и отвечают на вопрос поставленный в задаче.

На втором этапе мы получили, что корни уравнения 0 и 8. Вопрос в задаче: какова скорость лодки в стоячей воде. Скорость не может быть 0, поэтому собственная скорость лодки в стоячей воде 8 км/ч.Научится решать текстовые задачи, в которых математической моделью выступают рациональные уравнения. |
| **Операционно – познавательный этап.** |
| Рассмотрим первую задачу.Пристани А и В расположены на реке, причем В на 80 км ниже по течению, чем А. Катер прошел путь из А в В и обратно за 8 я и 20 мин. За какое время катер прошел расстояние от А до В и от В до А, если известно, что его собственная скорость (скорость в стоячей воде) равна 20 км/ч?Каков первый этап?Данная задача несколько трудней задачи, что была в начале урока.В каком случае реальной ситуации скорость катера будет меньшей: от А к В или от В к А?Как выразиться скорость катера против течения и по течению?Каково будет время преодоления катера расстояния от А к В?Каково будет время преодоления катера расстояния от А к В?Что принять за неизвестную?Какова будет математическая модель данной ситуации?Запись правой части мы тоже должны перевести на математический язык. То есть представить время в виде числа.Верно. Теперь необходимо выполнить второй этап решения задачи – работа с математической задачи, то есть необходимо решить данное уравнение. (Вызывает ученика к доске).(Продолжает работу с данным учеником) Каков следующий этап при решении задачи?Каков бал вопрос задачи?А что мы находили, решая уравнение?Верно. То есть при решении задачи важным этапом является составление математической модели реальной ситуации. Верное составление математической модели способствует успешному решению задачи. Рассмотрим следующую задачу:Перегон в 60 км поезд должен был проехать с постоянной скоростью за определенное время. Простояв у семафора перед перегоном 5 мин., машинист вынужден был увеличить скорость прохождения перегона на 10 км/ч, чтобы наверстать к окончанию прохождения перегона потерянные 5 мин. С какой скоростью поезд должен был пройти перегон по расписанию?Запишите условие данной задачи с помощью схемы.Верно. Теперь необходимо составить математическую модель данной задачи.Что принять за неизвестную?Каково будет время прохождения поездом данного расстояния?Какова будет скорость поезда при прохождении расстояния с запозданием?Каково будет время прохождения поездом данного расстояния с данной скоростью?В каком отношении находятся данные величины: $\frac{60}{x}$ и $\frac{60}{x+10}$? Известно ли на сколько $\frac{60}{x}>\frac{60}{x+10}$?Составьте математическую модель данной задачи.Выполните следующий этап решения задачи самостоятельно.Необходимо определить ответ на вопрос задачи.Рассмотренная ситуация несколько идеализирована: вряд ли в реальной жизни поезд пройдет весь перегон с постоянной скоростью, ведь всегда есть ускорения или замедления. На такую идеализацию математикам приходиться идти сознательно. | Составление математической модели.Скорость катера будет меньше в случае преодоления расстояния от В к А, поскольку катер будет двигаться против течения.$20+v\_{p}$ – скорость катера по течению;$20-v\_{p}$ – скорость катера против течения;$\frac{80}{20+v\_{p}}$.$\frac{80}{20-v\_{p}}$.За неизвестную x лучше принять скорость течения реки.$\frac{80}{20+x}+\frac{80}{20-x}$= 8 ч 20 мин.8 ч 20 мин.=$8\frac{1}{3}$ ч.$\frac{80}{20+x}+\frac{80}{20-x}=8\frac{1}{3}$;$\frac{80}{20+x}+\frac{80}{20-x}=\frac{25}{3}$.$\frac{80}{20+x}+\frac{80}{20-x}=\frac{25}{3}$.$\frac{80}{20+x}+\frac{80}{20-x}-\frac{25}{3}=0$.$\frac{240\left(20-x\right)+240\left(x+20\right)-25\left(20-x\right)(x+20)}{3\left(x+20\right)(20-x)}=0$;$\frac{4800-240x+240x+4800-10000+25x^{2}}{3\left(x+20\right)(20-x)}=0$;$\frac{25x^{2}-400}{3\left(x+20\right)(20-x)}=0$;$25x^{2}-400=0$;$x\_{1}=-4$, $x\_{2}=4$.q(x)=$ 3\left(x+20\right)(20-x)$q(-4)$\ne $0, q(4)$\ne $0-4, 4 – корни данного уравнения.Ответ на вопрос задачи.За какое время катер прошел расстояние от А до В и от В до А?Мы находили скорость течения реки. Скорость не может быть отрицательна, следовательно, скорость течения реки равна 4 км/ч.Тогда, зная, что $\frac{80}{20+x}$ - время преодоления катером расстояния от А до В, получим $\frac{80}{24}=\frac{10}{3}=3\frac{1}{3}$ ч. То есть 3 часа 20 минут.$\frac{80}{20-x}$ - время преодоления катером расстояния от В до А, получим $\frac{80}{16}=\frac{10}{2}=5$ ч. Ответ: 3 часа 20 минут и $5$ ч.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | S | V | t |
| Без задержания | 60 | ? | ? |
| С задержанием | 60 | ? на 10 км/ч >, | ?, на 5 мин. >,  |

Скорость поезда, с которой должен был пройти перегон по расписанию.$\frac{60}{x}$*.*$$x+10$$$\frac{60}{x+10}$*.*$\frac{60}{x}>\frac{60}{x+10}$*.*Да, известно на 5 мин или $\frac{1}{12}$ часа.$\frac{60}{x}-\frac{60}{x+10}=\frac{1}{12}$.$\frac{60}{x}-\frac{60}{x+10}=\frac{1}{12}$.$\frac{60}{x}-\frac{60}{x+10}-\frac{1}{12}=0$.$\frac{720\left(x+10\right)-720x-x(x+10)}{12x(x+10)}=0$;$\frac{720x+7200-720x-x^{2}-10x}{12x(x+10)}=0$;$\frac{-x^{2}-10x+7200}{12x(x+10)}=0$;$-x^{2}-10x+7200=0$;$x^{2}+10x-7200=0$;$$x\_{1,2}=\frac{-10\pm \sqrt{100+28800}}{2}$$$$x\_{1,2}==\frac{-10\pm \sqrt{28900}}{2}=\frac{-10\pm 170}{2}$$$x\_{1}=-90$, $x\_{2}=80$.q(x)=$12x(x+10)$q(-90)$\ne $0, q(80)$\ne $0-90, 80 – корни данного уравнения.Отрицательным числом скорость поезда выражена быть не может, следовательно, ответ однозначный 80 км/ч.Ответ: 80 км/ч. |
| **Рефлексивно – оценочный этап.** |
| Итак, мы рассмотрели несколько задач, в которых математической моделью реальных ситуаций являются рациональные уравнения.Итак каковы этапы решения задач?Итак, перед вами лежат листы с заданиями. Выполните данные задания. | Первый этап: Составление математической модели;Второй этап Работа с математической моделью.Третий этап: Ответ на вопрос задачи. |
| Задание 1. Напротив каждого задания поставьте + если вы знаете как решать задание, - , если не знаете как выполнить задание, ? - затрудняетесь ответить на данный вопрос.Задание 2. Выполните на отдельном листке данные задания.1. Составьте математические модели следующих задач:
	1. Первый пешеход прошел 6 км., а второй 5 км. Скорость первого пешехода на 1 км/ч меньше, чем скорость второго. Найдите скорость первого пешехода, если известно, что он был в пути на 30 мин. больше второго.
	2. Увеличив скорость на 10 км/ч, поезд сократил на 1 ч. Время затрачиваемое им на прохождение пути в 720 км. Найдите первоначальную скорость поезда.
	3. Моторная лодка прошла 20 км. Против течения реки и 14 км по озеру, затратив на путь по озеру на 1 ч. меньше, чем на путь по реке. Скорость течения реки равна 4 км/ч. Найдите скорость хода лодки против течения.
2. Решите одно из составленных уравнений (математических моделей) для предложенных выше задач.
3. Для данной математической модели придумайте условие задачи:

$$\frac{50}{x}-\frac{50}{x+15}=\frac{1}{6}$$Задание 3. Оцените свою работу на уроке. |
| **Домашнее задание**27.5 Два автомобиля выезжают одновременно из одного города в другой. Скорость первого автомобиля на 10 км/ч больше скорости второго, и поэтому первый приезжает на место на 1 ч. раньше второго =. Найдите скорость каждого автомобиля, зная, что расстояние между городами равно 560 км.27.16 Моторная лодка прошла 5 км. По течению реки и 6 км против течения, затратив на весь путь 1 ч. Скорость течения реки равна 3 км/ч. Найдите скорость движения лодки по течению реки.27.18 Моторная лодка прошла 54 км по течению реки и 42 км против течения реки за то же время, что она проходит 96 км в стоячей воде. Найдите скорость лодки в стоячей воде, если скорость течения реки равна 3 км/ч. |

**Урок решения задач по теме:**

 **«Рациональные уравнения как математические модели реальных ситуаций».**

**Тема: Рациональные уравнения как математические модели реальных ситуаций.**

**Тип урока:** Урок решения задач. Урок – практикум. Самостоятельная работа (2 часа).

**Учебная задача урока:** В совместной деятельности с учащимися закрепить навыки решения задач, в которых математической моделью выступают рациональные уравнения; открыть новые типы данных задач.

**Диагностируемые цели:**

В результате урока ученик:

*Знает*: понятие математической задачи, понятие рационального уравнения, алгоритм решения рационального уравнения, этапы решения текстовой (сюжетной) задачи.

*Умеет:* проводить этапы решения задач в конкретной ситуации: строить математические модели, то есть составлять рациональное уравнение в соответствии с условиями задачи, проводить решение рационального уравнения, записывать правильно ответ задачи.

*Понимает:* роль математического моделирования при решении данных задач и в математике в целом; что существуют задачи, не только на равномерное движение, в которых математической моделью выступает рациональное уравнение, но и геометрические, арифметические задачи.

**Форма:** фронтальная, индивидуальная, групповая.

**Средства:** мел, доска, учебник, интерактивная доска.

**Методы:** Частично-поисковый метод.

**Ход урока:**

|  |  |
| --- | --- |
| Речь учителя | Речь ученика |
| **Мотивационно - ориентировочный этап.** |
| Актуализация. Проверка домашнего задания. Осуществляется в парах. Проверяется правильность составления математических моделей, решения рациональных уравнений, правильность записи ответа задачи.Далее обсуждается решение теста, который был на предыдущем уроке в качестве выходной диагностики.Какова математическая модель в первой задаче?Первый пешеход прошел 6 км., а второй 5 км. Скорость первого пешехода на 1 км/ч меньше, чем скорость второго. Найдите скорость первого пешехода, если известно, что он был в пути на 30 мин. больше второго.Какова математическая модель во второй задаче?Увеличив скорость на 10 км/ч, поезд сократил на 1 ч. Время затрачиваемое им на прохождение пути в 720 км. Найдите первоначальную скорость поезда.Какова математическая модель в третьей задаче?Моторная лодка прошла 20 км. против течения реки и 14 км по озеру, затратив на путь по озеру на 1 ч. меньше, чем на путь по реке. Скорость течения реки равна 4 км/ч. Найдите скорость хода лодки против течения.Класс делится на три варианта. Каждый вариант представляет решения одного из трех рациональных уравнения.Итак, зная решения каждого рационального уравнения мы можем записать ответ каждой задачи подобрав правильный вариант.Сегодня на уроке мы продолжим решать сюжетные задачи и убедимся, что существует большой круг задач, не только задачи на равномерное движение, в которых рациональное уравнение выступает как математическая модель.Цель урока остается прежней.Научится решать текстовые задачи, в которых математической моделью выступают рациональные уравнения. | $$\frac{6}{x}-\frac{5}{x+1}=\frac{1}{2}$$$$\frac{720}{x}-\frac{720}{x+10}=1$$$$\frac{14}{x-4}-\frac{20}{x}=1$$1 вариант. $\frac{6}{x}-\frac{5}{x+1}=\frac{1}{2}$.$\frac{6}{x}-\frac{5}{x+1}-\frac{1}{2}$=0;$\frac{12\left(x+1\right)-10x-x(x+1)}{2x(x-1)}=0$;$\frac{12x+12-10x-x^{2}-x}{2x(x-1)}=0$;$\frac{-x^{2}+x+12}{2x(x-1)}=0$;$-x^{2}+x+12=0$;$x^{2}-x-12=0$;$$x\_{1,2}=\frac{1\pm \sqrt{1+48}}{2}$$$$x\_{1,2}=\frac{1\pm \sqrt{49}}{2}$$$x\_{1}=4$, $x\_{2}=-3$.q(x)=$ 2x(x-1)$q(4)$\ne $0, q(-3)$\ne $0Уравнение имеет решение 4 и -3Второй вариант.$$\frac{720}{x}-\frac{720}{x+10}=1$$$\frac{720}{x}-\frac{720}{x+10}-\frac{1}{1}$=0;$\frac{720\left(x+10\right)-720x-x(x+10)}{x(x+10)}=0$;$\frac{720x+7200-720x-x^{2}-10x}{x(x+10)}=0$;$\frac{-x^{2}-10x+7200}{x(x+10)}=0$;$-x^{2}-10x+7200=0$;$x^{2}+10x-7200=0$;$$x\_{1,2}=\frac{10\pm \sqrt{100+28800}}{2}$$$$x\_{1,2}=\frac{10\pm \sqrt{28900}}{2}$$$x\_{1}=90$, $x\_{2}=-80$.q(x)=$ x(x-10)$q(90)$\ne $0, q(-80)$\ne $0Уравнение имеет решение 90 и -80.Третий вариант.$$\frac{14}{x-4}-\frac{20}{x}=1$$$\frac{14}{x-4}-\frac{20}{x}-\frac{1}{1}$=0;$\frac{-20\left(x-4\right)+14x-x(x-4)}{x(x-4)}=0$;$\frac{-20x+80+14x-x^{2}+4x}{x(x-4)}=0$;$\frac{-x^{2}-2x+80}{x(x-4)}=0$;$-x^{2}-2x+80=0$;$x^{2}+2x-80=0$;$$x\_{1,2}=\frac{2\pm \sqrt{4+320}}{2}$$$$x\_{1,2}=\frac{2\pm \sqrt{324}}{2}$$$x\_{1}=10$, $x\_{2}=-8$.q(x)=$ x(x-10)$q(10)$\ne $0, q(-8)$\ne $0Уравнение имеет решение 10 и -8.Первый вариант: 4 км/ч.Второй вариант: 90 км/ч.Третий вариант: 10 км/ч. |
| **Операционно – познавательный этап.** |
| Рассмотрим следующую задачу.Задача №1. Периметр прямоугольного треугольника равен 48 см., один его катет на 4 см. больше другого. Чему равны стороны этого треугольника?Построим прямоугольный треугольник и отметим на нем известные величины.О каких соотношениях в прямоугольном треугольнике мы знаем? Верно. Что лучше принять за неизвестную?В каком отношении находятся выраженные через неизвестную, величины?Итак, мы получили математическую модель данной задачи. Следовательно, первый этап решения задачи пройден. Теперь необходимо решить полученное уравнение. Самостоятельно выполните данное действие.Верно. Теперь важно правильно отобрать ответ задачи. Какое из найденных решений нас не устраивает и почему?Верно. Рассмотрим следующую задачу.Задача 2. В райцентре два кинотеатра – «Факел» и «Слава», первый – на 400, второй – на 600 мест. В зрительном зале кинотеатра «Слава» на 4 ряда больше, чем в зрительном зале кинотеатре «Факел», и, кроме того, в каждом ряду на 5 мест больше чем в кинотеатре «Факел». Сколько рядов в зрительном зале кинотеатра «Факел», если известно, что в каждом ряду кинотеатра «Слава» более 25 мест?Составьте схему условия данной задачи.Что лучше принять за неизвестную?Как найти количество мест в каждом ряду?Сколько мест в ряду в зале «Факел»? «Слава»?В каком отношении находятся данные величины?Как записать данное высказывание на математическом языке?Итак, получили математическую модель данной ситуации.Решите полученное рациональное уравнение.Какое же из полученных результатов записать в ответ задачи? 20 или 16 рядов в кинозале «Факел»?Какое важное условие мы с вами еще не рассмотрели?Решите данное неравенство.Какое из данных результатов подходит? x=16Каков же ответ? | По теореме Пифагора, квадрат гипотенузе равен сумме квадратов катетов треугольника.Периметр равен сумме длин сторон треугольника.х – длина одного из катетов,x+4 – длина другого катета,48-x-(x+4)=44-2x – длина гипотенузы.$$(44-2x)^{2}=x^{2}+(x+4)^{2}$$$$(44-2x)^{2}=x^{2}+(x+4)^{2}$$$$1936-176x+4x^{2}=2x^{2}+8x+16$$$$2x^{2}-184x+1920=0$$$$x^{2}-92x+960=0$$$$x\_{1,2}=\frac{92\pm \sqrt{8464-3840}}{2}$$$$x\_{1,2}=\frac{92\pm 68}{2}$$$x\_{1}=80$$x\_{2}=12$$x\_{1}=80$ - не устраивает нас, поскольку, если длина катета будет равна 80 см, то его длина больше периметра треугольника. Такого быть не может. Следовательно ответ в задаче 12 см, 16 см, 20 см.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Кол-во мест. | Кол-во рядов | Кол-во мест в каждом ряду |
| «Факел» | 400 | ?  | ? |
| «Слава» | 600 | ? , на 4 р. >, чем | ? на 5 >, чемБолее 25 мест. |

Сколько рядов в зрительном зале «Факел»?Количество рядов в зале «Факел».Тогда количество рядов в зале «Слава» - x+4Необходимо общее число мест разделить на количество рядов в зале.$\frac{400}{x}$ – количество мест в ряду в зале «Факел».$\frac{600}{x+4}$ – количество мест в ряду в зале «Слава».$\frac{400 }{x}<\frac{600}{x+4}$ на 5 мест.$$\frac{600}{x+4}-\frac{400 }{x}=5$$Ученики решают данное уравнение и получают следующие результаты:$x\_{1}=20$$x\_{2}=16$Число мест в каждом ряду кинотеатра «Слава» больше 25. То есть $\frac{600}{x+4}>25$.$$600>25(x+4)$$$$25x<500$$$$x<20$$В кинотеатре «Факел» 16 рядов по 25 мест. |
| **Рефлексивно – оценочный этап.** |
| Итак, на данном уроке мы рассмотрели еще некоторые типы задач, математическими моделями которых являются рациональные уравнения. Задачи геометрического содержания, задачи арифметические.Запишите домашнее задание: 27.28, 27.29, 27.22,  |  |
| **Домашнее задание**27.22Прогулочный теплоход отправился от пристани А к пристани В вниз по течению реки. После получасовой стоянки в В он отправился обратно и через 8 ч. после отплытия из А вернулся к той же пристани. Какова собственная скорость теплохода, если расстояние между пристанями А и В равно 36 км., а скорость течения реки равна 2 км/ч?27.28Бригада должна была изготовить 120 изделий к определенному сроку. Однако она изготовила в день на 2 изделия больше, чем предполагалось по плану, и поэтому закончила работу на 3 дня раньше срока. Сколько изделий в день должна изготовлять бригада по плану?27.29Знаменатель обыкновенной дроби больше числителя на 3. Если к числителю прибавить 7, а к знаменателю 5, то дробь увеличиться на $\frac{1}{2}$. Найдите эту дробь.27.44 В сплав золота с серебром, содержащий 80 г. золота, добавили 100 г. золота. В результате содержание золота в сплаве увеличилось на 20%. Сколько граммов серебра в сплаве? |

**Третий урок: урок практикум по теме:**

**«Рациональные уравнения как математические модели реальных ситуаций»**

|  |  |
| --- | --- |
| Речь учителя | Речь ученика |
| **Мотивационно - ориентировочный этап.** |
| Сегодня мы продолжим решать задачи, математическими моделями которых являются рациональные уравнения.Сейчас мы с вами разделимся на 4 группы. Каждой группе будут выданы списки задач, которые они должны будут выполнить. На решение данных задач дается 15 минут. Далее каждая группа должна предоставить решение интересной на их взгляд задачи, а так же задачу которую должны будут решить дома оставшиеся группы. Итого каждый ученик должен будет дома решить три задачи + творческое задание |  |
| **Операционно – познавательный этап.** |
| Раздается задание |  |
| Задание для первой группы1. Автомобиль пройдя путь от А до В , равный 300 км, повернул назад, увеличив скорость на 12 км/ч. В результате на обратный путь он затратил на 50 мин меньше, чем на путь от А до В. Найдите первоначальную скорость автомобиля. (стр.183, 5).
2. Два поля имеют общую площадь 20 га. С первого поля убрали 550 т, а со второго 540 т. картофеля. Сколько тонн картофеля собирали с 1 га каждого поля, если с 1 га первого поля собирали на 10 т. меньше, чем с 1 га второго поля? (27.26)
 | Задание второй группе1. Через два часа после выхода из А автобус был задержан на 30 минут и , чтобы прибыть в В по расписанию, должен был увеличить скорость на 5 км/ч. Найдите первоначальную скорость автобуса, если известно, что расстояние между пунктами А и В равно 260 км. (27.32)
2. Токарь должен был обработать 120 деталей к определенному сроку. Применив новый резец, он стал обтачивать в час на 20 деталей больше и поэтому закончил работу на 1 ч раньше срока. Сколько деталей он должен обрабатывать по плану?(27.27)
 |
| Аналогичные задания у третьей и четвертой группы.Далее идет обсуждение в классе проверка результатов. Работа проводится под четким руководством учителя.После проведения данного вида работы, ученикам дается на выполнение следующая самостоятельная работа. |  |
| **Самостоятельная работа**Вариант 1.Задача 1. Числитель несократимой обыкновенной дроби на 5 меньше знаменателя. Если числитель уменьшить на 2, а знаменатель увеличить на 16, то дробь уменьшится на $\frac{1}{3}$. Найдите эту дробь.Задача 2. Турист проплыл на байдарке 24 км по озеру и 9 км против течения реки за то же время, какое понадобилось ему, чтобы проплыть по течению 45 км. С какой скоростью плыл турист по озеру, если скорость течения реки равна 2 км/ч.Вариант 2Задача 1. Числитель обыкновенной дроби на 1 меньше ее знаменателя. Если числитель уменьшить на 2, а знаменатель увеличить на 16, то дробь уменьшится на $\frac{1}{14}$. Найдите эту дробь.Задача 2. Катер прошел 27 км по течению реки и 42 км против течения, затратив на путь по течению на 1 ч. меньше, чем на путь против течения. Какова скорость катера против течения, если скорость течения реки равна 3 км/ч? |
| В качестве домашнего задания даются задания учениками к ним добавляются задание со \* 27.44 (контрольная задача).Индивидуально задание: 1. Составить задачу, в которой математической моделью будет являться следующее уравнение:

$$\frac{50}{x}-\frac{50}{x+15}=\frac{1}{6}$$1. Составить самостоятельно задачу, в которой математической моделью является рациональное уравнение.
 |

**«Рациональные уравнения как математические модели реальных ситуаций»**

**«Проверяем знания одноклассников!!!»**

**Тема: Рациональные уравнения как математические модели реальных ситуаций.**

**Тип урока:** Урок – практикум. Дидактическая игра. (1 час).

**Учебная задача урока:**

* Закрепить навыки решений задач, математическими моделями которых являются рациональные уравнения.
* Развить коллективный метод работы у учеников.

**Диагностируемые цели:**

В результате урока ученик:

*Знает:* общую схему решения задач;

*Умеет:* проводить этапы решения задач в конкретной ситуации: строить математические модели, то есть составлять рациональное уравнение в соответствии с условиями задачи, проводить решение рационального уравнения, записывать правильно ответ задачи.

*Понимает:* роль математического моделирования при решении данных задач и в математике в целом.

**Форма:** фронтальная, парная.

**Средства:** мел, доска, интерактивная доска.

**Методы:** Частично-поисковый метод.

**Структура урока:**

*Мотивационно – ориентировочный этап*

На этапе актуализации вспоминается этапы решения задач, можно вспомнить алгоритм решения рационального уравнения. Описывается форма работы на уроке. Класс разделяется на группы. Приводятся описание работы и действий каждой группы.

*Операционно – познавательный этап*

На данном этапе проходит дидактическая игра «Проверяем знания одноклассников!!!»: проверка знаний учеников учениками по теме «Рациональные уравнения как математические модели реальных ситуаций».

*Рефлексивно – оценочный этап*

Подведение итогов урока. Выдача домашнего задания ученикам.

**Ход урока:**

**Мотивационно - ориентировочный этап.**

Учитель: Здравствуйте! Сегодняшний урок пройдет в необычной для нас форме. На прошлых занятиях мы подробно рассматривали решение задач, математическими моделями которых являются рациональные уравнения. Выделили с вами типы задач.

 Вспомним этапы решения данных задач?

Ученики:

1. Анализ условия задачи
2. Составление математической модели
3. Работа с математической моделью – решение рационального уравнения.
4. Запись и выбор ответа задачи.

Учитель: Сегодня урок закрепления навыков решения данных задач. На данном уроке мы будем проверять знания и умения решать задачи друг у друга. Для этого мы разделим класс на две группы: группа «экспертов», группа «проверяемых».

Сам урок будет состоять из двух частей. Первая часть заключается в том, что одна группа будет «экспертами», вторая «проверяемыми». Вторая часть – данные группы меняются местами, та группа, у которой проверяли знания становится «экспертами».

Каждый «эксперт» должен проверить знание сущности метода объемов, умение применять данный метод при решении задач, проверить домашние задания проверяемого по теме «Метод объемов при решении геометрических задач», выявить слабые стороны знаний одноклассника. Контрольной проверкой является решение задачи, которую составил сам эксперт в качестве домашнего задания, или задачи из списка №3.

Каждому ученику, у которого будут проверять уровень знаний, выдается «лист оценок». Каждый «эксперт» должен выставить объективную, соответствующую уровню знаний одноклассника, оценку по каждому из видов деятельности. Так же эксперт должен оценить, как одноклассник выполняет домашнюю работу, насколько корректно составлены им задачи, оценить решение задачи, которую «эксперт» составил самостоятельно.

**Операционно – познавательный этап.**

Каждому проверяемому выдается лист, который заполняет эксперт.

|  |  |
| --- | --- |
| Ф.И.О. ученика |   |
| Ф. И. О. «эксперта» |  |
| Тип задания | Выполнение домашних работ | Составление задач, в которых математической моделью является рациональное уравнение | Решение контрольной задачи, задачи со \* | Примечание «эксперта» |
|  |
| Оценка |  |  |  | Итог: |
|  |

Класс разбивается на пары вида: «проверяемый» - «эксперт». Учащиеся работают в парах.

Работа в классе идет под четким руководством учителя. Учитель должен контролировать процесс оценивания, проводящийся учениками, с целью выставления объективной оценки. Учитель может в любое время проверить решение учеником задачи, проверить правильность составления задачи экспертом.

После проведения первого этапа урока, учитель собирает листы оценок, каждого проверяемого ученика. После смены ролей, выдаются новые листы новым проверяемым учащимся. Идет аналогичная работа. После проведения второй части урока, учитель подводит итоги.

**Рефлексивно – оценочный этап.**

На данном этапе выявляются ученики,:

* которые прекрасно справлялись с заданиями, предложенными «экспертами»;
* которые составили интересные задачи, на применение метода объемов;
* которые выполняли домашниюю работу;
* которые подошли к данному виду работу несерьезно; которые не выполняли домашние задания, не составляли самостоятельно задач; которые не смогли провести решение задачи предлагаемой экспертом.

С классом проводится беседа о форме проведения урока, понравилось ли им быть в качестве эксперта, проверяющего уровень заний одноклассников. Выявляются слабые стороны проведения такого типа урока.

По имеющимся тематическим планированиям и разработанным конспектам уроков следует приступить к их проведению в условиях школьной практики. Поэтому следующим шагом в работе стало проведение и описание экспериментальной проверки эффективности уроков, разработанных по имеющимся методическим рекомендациям.

## **§4. Описание опытной работы**

В предыдущих параграфах диссертации были выдвинуты методологические характеристики исследования, рассмотрены теоретические основы темы «Математическое моделирование, как метод решения сюжетных задач», приведены методические рекомендации к проведению уроков по теме в школе, приведены подробные конспекты каждого занятия.

В ходе проведения данной работы возникла необходимость в проведении опытной проверки выдвинутой нами гипотезы и основных положений, разработанных методических рекомендациях.

Таким образом, цель опытной работы состоит в следующем:

- проверке эффективности основных положений и методических рекомендаций разработанных уроков по решению сюжетных задач методом математического моделирования,

- в подтверждении (либо опровержении) выдвинутой нами гипотезы исследования, которая состоит в том, что целенаправленное и систематическое изучение математического моделирования на всех этапах обучения средней школы делает процесс обучения математике более эффективным и осмысленным, дает представление о сущности математики, как науке, формирует межпредметные связи; а также способствует формированию у школьников диалектико-материалистического мировоззрения, умения проводить рациональные рассуждения;

- проверке эффективности рекомендаций по проведению уроков решения сюжетных задач, в шестом классе в теме «решение уравнений» и восьмом, в параграфе «Рациональные уравнения, как математические модели реальных ситуаций»

Эксперимент по реализации на практике методических рекомендаций по организации и проведению уроков решения сюжетных задач методом математического моделирования проводилась в течении третьей и четвертой четвертей 2011 – 2012 учебного года в 6 «а» (24 человека) и 8 «б» (34 человека) классах МБОУ СОШ № 70 с углубленным изучением отдельных предметов города Нижнего Новгорода под руководством учителя математики Потехиной Людмилы Леонидовны.

План опытной работы:

1. Постановка и формулировка целей опытной работы.
2. Разработка тематического планирования и конспектов уроков.
3. Проведение занятий элективного курса.
4. Анализ и интерпретация результатов опытной работы.

На *констатирующем этапе*, целью которого было обосновать актуальность проблемы организации и проведения уроков решения задач, выбраны следующие методы исследования: наблюдение за процессом обучения учащихся на уроках математики (6 класс) и уроков алгебры и геометрии (8 класс), а так же беседы с учителями математики по проблеме исследования.

При наблюдении за учащимися классов, посещении уроков, была выявлена скупость речи учащихся у доски. Ребята часто, в том числе на уроках математики, не могут объяснить классу ход своих рассуждений, проанализировать сложности, с которыми сталкиваются, при решении сюжетных задач. Не имеют целостного представления о методе решения задач. Плохо осознают связь математики с реальной жизнью. Хотя учащиеся имеют дело с моделями и занимаются математическим моделированием, изучают и преобразуют различные математические модели, но так как эти модели и процессы моделирования не являются непосредственной целью их действий (их целью является решение задач, вывод каких-то формул и т. п.), то многие учащиеся не осознают их как модели, а лишь как, например, формулы, уравнения, геометрические фигуры. Не всегда осознают, какими теоретическими положениями, приемами пользуются при решении задач, вследствие чего решение дается тяжело, требуется помощь учителя или одноклассников.

На этапе беседы с учителями математики, выявлялись ответы на следующие вопросы:

* какую роль сюжетные задачи игают к курсе математики средней школы;
* какие методы преимущественно используются при решении сюжетных задач, стоит ли внедрять метод математического моделирования, как метод решения сюжетных задач в школу;
* имеется ли необходимость в разработке математических рекомендаций к урокам решения сюжетных задач методом математического моделирования.

В результате проведенных бесед с учителями математики выяснялось, что на данный момент роль сюжетных задач остается столь же великой, как и раньше и решение таких задач просто необходимо в школьном курсе математики. Приоритетными методами решения сюжетных задач для многих все еще являются арифметический и алгебраический (особенно в младших классах), а в среднем звене практикуется использование метода математического моделирования, отмечается его универсальность и продуктивность (так говорят те, что работает по учебникам А.Г.Мордковича [4-9]). В том числе преподаватели отмечают недостаток методических рекомендаций по использованию данного метода на уроках математики.

Полученные результаты наблюдения стали еще одним подтверждением того, что подход к обучению учащихся решению сюжетных задач, а значит и организация самих уроков требует большего внимания,

На втором, *поисковом*, этапе эксперимента изучалась литература по проблеме исследования, выявлялась концепция, опираясь на которую после были разработаны методические рекомендации по организации и проведению уроков решения сюжетных задач, а также разработаны соответствующие тематические планирования и конспекты уроков.

Решались следующие задачи:

* Составление тематических планирований и конспектов уроков по темам «Математическое моделирование, как метод решения сюжетных задач» в шестом классе и «Рациональные уравнения как математические модели реальных ситуаций» в восьмом классе, отвечающих комплексному решению образовательных, воспитательных и развивающих задач обучения.
* Проверка доступности отобранного материала и качества его усвоения.
* Проверка эффективности методики проведения занятий.

На третьем, *формирующем* этапе эксперимента в каждой параллели (шестых и восьмых классов) рассматривались два класса. В контрольных классах проводились уроки в соответствии с разработанными методическими рекомендациями. Обучение проводилось с применением эвристической беседы, репродуктивного, частично-поискового методов, методов аналогии и укрупнения дидактических единиц.

В другом классе уроки проводились по стандартной схеме.

На практике удалось провести все запланированные уроки.

Учащиеся шестого класса восприняли уроки хорошо, активно включались в беседу с учителем, приводили собственные примеры различных моделей и некоторые ученики проявили инициативу, и принесли на следующий урок некоторые модели, в том числе и математические (небольшие игрушки, геометрические фигуры). Отметили, что такой метод решения сюжетных задач является логичным и простым в понимании, упрощает самопроверку, помогает в выявлении проблем решения сюжетных задач.

Контроль усвоения материала и влияние его на успешное решение задач проводился в ходе анализа двух сюжетных задач, входивших в текст итоговой контрольной работы по теме «Решение уравнений».

**Вариант 1**

**Задача 1.** На первой стоянке в 4 раза меньше автомашин, чем на второй. После того, как на первую приехали 35 автомашин, а со второй уехали 25, автомашин на стоянках стало поровну. Сколько автомашин было на каждой автостоянке первоначально?

**Задача 2.** С введением нового фасона расход ткани на платье увеличился с 3,2 м до 3,6 м. на сколько процентов увеличился расход ткани на платье?

**Вариант 2**

**Задача 1.** Во второй корзине было в 3 раза больше огурцов, чем в первой. Когда в первую корзину добавили 25кг огурцов, а из второй взяли 15 кг, то в обеих корзинах огурцов стало поровну. Сколько килограммов огурцов было в каждой корзине?

**Задача 2.** После обработки куска дерева его масса уменьшилась с 12,5 кг до 9,4 кг. На сколько процентов уменьшилась масса этого куска дерева?

Решение каждой задачи разбивалось на действия, предполагающий поэлементный анализ знаний. Действия при решении задачи соответствовали трем уровням знаний: I уровень – фактическое знание учебного материала; II уровень – понимание, умение применять теоретические факты в стандартных ситуациях; III уровень – умение применять новые факты в измененных ситуациях. Каждое произведенное действие оценивается по двухбалльной шкале: верно – 1 балл; неверно – 0 баллов.

Задача 1

1. Введение неизвестной величины (I)
2. Выражение через неизвестную всех данных задачи (I)
3. Составление математической модели (уравнения) (III)
4. Решение уравнение перенос слагаемых через знак равенства (III)
5. Нахождение неизвестного множителя (II)
6. Нахождение искомых данных задачи, выраженных ранее через неизвестную (I)
7. Формулировка ответа (II)

Задача 2

1. Краткая запись задачи (I)
2. Составление математической модели (пропорции) (III)
3. Применение основного свойства пропорции(II)
4. Выполнение алгебраических операций с десятичными дробями(I)
5. Нахождение искомых данных задачи(I)
6. Формулировка ответа (II)

При проверки контрольной работы, нами для каждого ученика был подсчитан коэффициент усвоения: $K=\frac{сумма верных ответов (баллов)}{число вопросов (выполняемых обязательных действий)}$.

В ходе оценивания, применялась примерная шкала оценок. Если K изменяется от 1 до 0,9 – оценка 5; если от 0,9 до 0.75 – оценка 4; если от 0,75 до 0,7 – оценка 3; если К ниже 0,7 – усвоение материала неудовлетворительное.

Проведя аналогичный анализ данных заданий в одном из параллельных классов, получили следующие результаты в процентном соотношении полученных оценок и представили их ниже в виде таблицы и в виде диаграммы:

Таблица 1

|  |  |
| --- | --- |
| Контрольный класс | Параллельный класс |
| Отметка | % от выборки  | Отметка | % от выборки |
| «5» | 15 | «5» | 9 |
| «4» | 58 | «4» | 37 |
| «3» | 22 | «3» | 41 |
| «2» | 5 | «2» | 13 |

Круговые диаграммы.

В восьмом классе ученики уже знакомы с методом математического моделирования, как методом решению сюжетных задач, изучали этапы решения, не однократно переводили текст задачи на математический язык, поэтому материал усваивался довольно быстро. Новой для школьников являлась лишь модель задач – рациональное уравнение, отработка решения которых проходила непосредственно до изучения темы «Рациональные уравнения, как математические задачи реальных ситуаций». По дано теме было проведено четыре урока. На третьем проведена самостоятельная работа, состоявшая из двух задач, а на последнем – дидактическая игра, которая вызвала большое количество положительных эмоций, так как уроки математики в подобной форме проводились впервые.

Контроль усвоения материала и влияние его на успешное решение задач проводился в ходе анализа самостоятельной работы.

**Вариант 1.**

**Задача 1.** Числитель несократимой обыкновенной дроби на 5 меньше знаменателя. Если числитель уменьшить на 2, а знаменатель увеличить на 16, то дробь уменьшится на $\frac{1}{3}$. Найдите эту дробь.

**Задача 2**. Турист проплыл на байдарке 24 км по озеру и 9 км против течения реки за то же время, какое понадобилось ему, чтобы проплыть по течению 45 км. С какой скоростью плыл турист по озеру, если скорость течения реки равна 2 км/ч.

**Вариант 2**

**Задача 1.** Числитель обыкновенной дроби на 1 меньше ее знаменателя. Если числитель уменьшить на 2, а знаменатель увеличить на 16, то дробь уменьшится на $\frac{1}{14}$. Найдите эту дробь.

**Задача 2.** Катер прошел 27 км по течению реки и 42 км против течения, затратив на путь по течению на 1 ч. меньше, чем на путь против течения. Какова скорость катера против течения, если скорость течения реки равна 3 км/ч?

Решение каждой задачи разбивалось на действия, предполагающий поэлементный анализ знаний. Действия при решении задачи соответствовали трем уровням знаний: I уровень – фактическое знание учебного материала; II уровень – понимание, умение применять теоретические факты в стандартных ситуациях; III уровень – умение применять новые факты в измененных ситуациях. Каждое произведенное действие оценивается по двухбалльной шкале: верно – 1 балл; неверно – 0 баллов.

Задача 1

1. Введение неизвестной величины (I)
2. Выражение через неизвестную всех данных задачи (I)
3. Составление математической модели (рационального уравнения) (III)
4. Перенос всех членов уравнения в одну часть (I)
5. Преобразование этой части к виду алгебраической дроби $\frac{p(x)}{q(x)}$/ (II)
6. Решение уравнения $p\left(x\right)=0$ (II)
7. Нахождение искомых данных задачи, выраженных ранее через неизвестную (I)
8. Формулировка ответа (II)

Задача 2

Для второй задачи действия аналогичны, добавляется лишь применения формулы зависимости пути от времени, скорости и течения реки (I).

Всего получается 17 действий.

При проверки контрольной работы, нами для каждого ученика был подсчитан коэффициент усвоения: $K=\frac{сумма верных ответов (баллов)}{число вопросов (выполняемых обязательных действий)}$.

В ходе оценивания, применялась примерная шкала оценок. Если K изменяется от 1 до 0,9 – оценка 5; если от 0,9 до 0.75 – оценка 4; если от 0,75 до 0,7 – оценка 3; если К ниже 0,7 – усвоение материала неудовлетворительное.

Проведя аналогичный анализ данных заданий в одном из параллельных классов, получили следующие результаты в процентном соотношении полученных оценок и представили их ниже в виде таблицы и в виде диаграммы:

Таблица 1

|  |  |
| --- | --- |
| Контрольный класс | Параллельный класс |
| Отметка | % от выборки  | Отметка | % от выборки |
| «5» | 18 | «5» | 10 |
| «4» | 59 | «4» | 42 |
| «3» | 14 | «3» | 33 |
| «2» | 9 | «2» | 15 |

Круговые диаграммы.

Исходя из содержания эксперимента и полученных результатов проведенной опытной работы, можно сделать вывод о том, что гипотеза, выдвигаемая в начале исследования, получила свое подтверждение. Следуя методическим указаниям, касающихся организации и проведения уроков решения сюжетных задач методом математического моделирования на разных этапах обучения. Разработанные рекомендации при применении их на практике способствуют повышению уровня усвоения материала темы, результативности при решении сюжетных задач, процесс обучения математике становится более эффективным и осмысленным. а также способствует формированию у школьников умения проводить рациональные рассуждения.

# Выводы по II главе

1. Анализ школьных учебников по математике показал, что большое внимание методу моделирования уделяется в основном в учебниках Г. В. Дорофеева, Л. В. Петерсон, А.Г. Мордковича, в остальных учебниках или эта тема не изучается вообще, или рассматривается обзорно.

2. Учебники данных авторов содержат большое количество задач, характерных для метода моделирования, а именно: задачи, непосредственно реализующие этапы процесса математического моделирования; задачи, в которых требуется выполнить действия, характерные для этапов моделирования.

3. В ходе опытного преподавания выяснилось, что изучение метода математического моделирования непосредственно влияет на успешное решение сюжетных задач. Систематизирует знания учащихся благодаря своей универсальности. Моделирование, как способ обучения способствует усилению творческой направленности процесса обучения, развитию умственных способностей учащихся.

4. Включение моделирования в содержание уроков математики необходимо для овладения моделированием как методом научного познания и решения сюжетных задач;

# Заключение.

Подводя итог проделанной работе, отметим следующее.

Для адаптации человека в обществе и полноценного функционирования в нем необходим высокий уровень общего развития человека.

Математическое образование вносит свой вклад в формирование общей культуры человека. Изучение математики формирует определенный стиль мышления, логику, развивает воображение.

Одной из основных целей обучения математике является развитие мышления учащихся. Обучение математике имеет для этого большие возможности, обусловленные особенностями самого предмета изучения основ математической науки.

Важную роль в организации учебно-воспитательного процесса играют задачи. В обучении математики они являются и целью, и средством обучения учащихся. В ходе решения задач развиваются творческая и прикладная стороны мышления. В то же время при организации учебного процесса необходимо использовать то ценное, что накоплено в психологии и педагогике по вопросам развития мышления человека.

Текстовые задачи играют важную роль в процессе обучения математике в школе. Они позволяют проверить не только владение определенными математическими операциями, но и умение анализировать, рассуждать, делать выводы, проверять правильность полученного результата, применять знания в нестандартной ситуации, т.е. развивают логику мышления.

В ходе теоретического и экспериментального исследования получены следующие результаты:

1. рассмотрены основные вопросы и выявлены проблемы обучения элементам математического моделирования;
2. рассмотрены понятия «математическая модель» и «математическое моделирование», выделены основные идеи и этапы метода математического моделирования;
3. выделены дидактические функции преподавания математического моделирования в школе;
4. рассмотрены понятия задача, сюжетная задача, их классификация, роль и место в обучении;
5. перечислены альтернативные методы решения сюжетных задач;
6. проанализированы учебники по математике с точки зрения наличия элементов математического моделирования и сделаны соответствующие выводы;
7. в процессе опытного преподавания, согласно рассмотренным методикам, были разработаны и проведены два занятия математического кружка и контрольная работа.

Результаты проведенного исследования позволяют сделать следующие выводы:

1. при решении задач посредством моделирования школьники учатся абстрагированию, анализу, синтезу, сравнению, аналогии, обобщению, переводу жизненных проблемных ситуаций в абстрактные модели и наоборот. Использование моделирования как способа обучения поисковой деятельности, обобщенным подходам, приемам в решении задач способствует усилению творческой направленности процесса обучения, развитию умственных способностей учащихся, то есть моделирование является средством совершенствования процесса обучения математике, которое позволяет активизировать познавательную деятельность учащихся и развивать их мышление;
2. включение моделирования в содержание уроков математики необходимо для ознакомления учащихся с современной научной трактовкой понятий модели и моделирования, овладения моделированием как методом научного познания и решения сюжетных задач;
3. следует включить изучение элементов математического моделирования в содержание уроков не только в 7 – 9 классах, а на ранних этапах обучения, то есть уже в 5 – 6 классах или еще раньше (в начальной школе). Это обосновано тем, что у учащихся создаются предпосылки для более осознанного изучения математики, формирования диалектико-материалистического стиля мышления и повышения интереса к самой науке математике.

Экспериментальная проверка разработанных рекомендаций была осуществлена в ходе прохождения практики в МБОУ с углубленным изучением отдельных предметов №70 города Нижнего Новгорода. Уроки проводились в соответствии с тематическим планированием. Для оценки эффективности использования методических разработок была выбрана контрольная группа, на ней проведена контрольная работа. Результаты сравнивались с результатами аналогичной группы в параллельном классе, которая обучалась по стандартной схеме.

Можно сделать общий вывод, что все задачи исследования решены, цель достигнута, гипотеза подтверждена и теоретическим анализом, и экспериментально.

# Список литературы:

1. Азаров, А.И. Текстовые задачи: пособие для учащихся / А.И. Азаров, С.А. Барвенов, В.С. Федосенко. – Минcк: ТетраСистемс, 2002.
2. Алгебра: Учебник для 9 кл. сред. шк./ Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, С. Б. Суворова; Под ред. С. А. Теляковского. – М.: Просвещение, 1990. -272 с.
3. Алгебра и начала анализа. Учебник для 10 – 11 кл. сред. шк./ А. Н. Колмогоров, А. М. Абрамов, Ю. П. Дудницын и др.: под. Ред. А. Н. Колмогорова. – 2-е изд. – М.: Просвещение, 1991. – 320 с.
4. Алгебра. 7 класс. В 2ч. Ч.1. учебник для учащихся общеобразовательных учреждений/А.Г.Мордкович. – 11-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2008. – 160 с.
5. Алгебра. 7 класс. В 2ч. Ч.2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений/[А.Г.Мордкович и др.]; под.ред. А.Г.Мордковича. – 11-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2008
6. Алгебра. 8 класс. В 2ч. Ч.1. учебник для учащихся общеобразовательных учреждений/А.Г.Мордкович. – 11-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2009. – 215 с.
7. Алгебра. 8 класс. В 2ч. Ч.2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений/[А.Г.Мордкович и др.]; под.ред. А.Г.Мордковича. – 11-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2009. – 255 с.
8. Алгебра. 9 класс. В 2ч. Ч.1. учебник для учащихся общеобразовательных учреждений/А.Г.Мордкович, П.В.Семенов. – 11-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2009. – 224 с.
9. Алгебра. 9 класс. В 2ч. Ч.2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений/[А.Г.Мордкович и др.]; под.ред. А.Г.Мордковича. – 11-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2009
10. Алимов, Ш. А., Колягин, Ю.М., Сидоров, Ю.В. Алгебра 7 класс.– 12-е изд.- М.: Просвещение: АО «Московский учебник», 2004.– 207 с.
11. Алимов, Ш. А., Колягин, Ю.М., Сидоров, Ю.В. Алгебра, 8 класс.– 11-е изд.– М.: Просвещение: АО «Московский учебник», 2004.– 255 с.
12. Алимов, Ш. А., Колягин, Ю.М., Сидоров, Ю.В. Алгебра 9 класс.– 4-е изд. - М.: Просвещение: АО «Московский учебник», 1998.– 223 с.
13. Алтухов, В.Л. О перестройке мышления: философско-методологические аспекты / В. Л. Алтухов, В.Ф. Шапошников. – М.: Просвещение, 1988.
14. Амосов Н.М. Моделирование информации и программ в сложных системах // Вопросы философии. – 1963. - №12.
15. Артемов, А.К. Введение в частные методики обучения: учеб. Пособие / А.К. Артемов, Т.В. Семенова. – Пенза: Пенз. политехн. ин- т, 1982.
16. Балл, Г.А. О психологическом содержании понятия «задача» [Текст] / Г.А. Балл // Вопросы психологии.– 1970.– № 5.– С. 81-87.
17. Веников, В.А. Теория подобия и моделирования / В. А. Веников. – М.: Высшая школа, 1986. – 480 с.
18. Вечтомов, Е.М. метафизика математики: монография/ Е.М. Вечтомов. – Киров: Изд-во Вят ГГУ, 2006/ - 508 c.
19. Виленкин Н. Я. Математика, 5 класс. Учебник для 5 кл. общеобразовательных учреждений/ Н. Я. Виленкин, В. И. Жохов, А. С. Чесноков, С. И. Шварцбург. / Изд. 6-е. - М.: Сайтком, 2000. - 358 с.
20. Виленкин Н. Я. Математика, 6 класс. Учебник для 6 кл. общеобразовательных учреждений/ Н. Я. Виленкин, В. И. Жохов, А. С. Чесноков, С. И. Шварцбург. / 12-е изд., стереотип. – М.: Мнемозина, 2003. - 304 с.
21. Гороховцева, Л.А. Процесс решения текстовой задачи при изучении Балл, Г.А. О психологическом содержании понятия «задача» // Вопросы психологии. - 1970. – № 6.
22. Гурова, Л.Л. Психологический анализ решения задач. - Воронеж: Изд-во Воронеж. ун-та, 1976. – 329 с.
23. Далингер В.А. обучение учащихся решению текстовых задач методом составления уравнения: пособие для учителей. – Омск, 1991.
24. Девитас Г.Г. об алгебраическом решении текстовых задач // Математика в школе:№8 2003.
25. Демидова, Т.Е. Теория и практика решения текстовых задач: учеб.пособие для студентов высш. пед. учеб. заведений /Т.Е.Демидова, А.П.Тонких. – М.: Академия, 2002. – 288 с.
26. Дорофеев, Г. В. Математика, 5 класс. Часть 1: учебник для 5 кл./ Г. В. Дорофеев, Л. Г. Петерсон. – М.: Баллас, С-инфо, 1996. – 176 с.
27. Дорофеев, Г. В. Математика, 5 класс. Часть 2: учебник для 5 кл./ Г. В. Дорофеев, Л. Г. Петерсон. – М.: Баллас, С-инфо, 1997. – 240 с.
28. Дорофеев, Г. В. Математика, 6 класс. Часть 1: учебник для 6 кл./ Г. В. Дорофеев, Л. Г. Петерсон. – М.: Баласс, С-инфо, 1998. – 112 с.
29. Дорофеев, Г. В. Математика, 6 класс. Часть 2: учебник для 5 кл./ Г. В. Дорофеев, Л. Г. Петерсон. – М.: Баллас, С-инфо, 1999. – 128 с.
30. Дорофеев, Г. В. Математика, 6 класс. Часть 3: учебник для 6 кл./ Г. В. Дорофеев, Л. Г. Петерсон. – М.: Баласс, С-инфо, 2002. – 176 с.
31. Зайцев, Г.Т. Теоретические основы обучения решению задач в начальных классах: учеб. пособие. – Ленинград, 1983.
32. Зиновьев А.А., Ревзин И.И.. логическая модель, как средство научного исследования // вопросы философии. – 1960. - №1.
33. Зубарева, И. И. Математика. 5 кл.: Учебник для общеобразоват. Учреждений/ И. И. Зубарева, А. Г. Мордкович. – 2-е изд. – М.: Мнемозина, 2003. – 293 с.
34. Зубарева, И. И. Математика. 6 кл.: Учебник для общеобразоват. Учреждений/ И. И. Зубарева, А. Г. Мордкович. – 2-е изд. – М.: Мнемозина, 2004. – 281 с.
35. Иванова Т.А. Современный урок математики: теория, технология, практика: Книга для учителя. – Н.Новгород: НГПУ, 2010. – 288 с.
36. Иванова Т.А., Перевощикова Е.Н., Григорьева Т.П., Кузнецова Л.И. Теоретические основы обучения математике в средней школе. – Н.Новгород: НГПУ, 2003.
37. Игнатьев, Е.В. В царстве смекалки, или Арифметика для всех: кн. для семьи и школы. Опыт математической хрестоматии: в 3 кн./ Худож. Н.Я. Бойко. – Ростов н/д: Кн. изд-во, 1995.
38. Канин, Е. С. Учебные математические задачи/ Е.С. Канин. – Киров: Изд-во ВятГГУ, 2004. – 154 c.
39. Капкаева Л.С. Интеграция алгебраического и геометрического методов при обучении математики в школе // учебное пособие для студ. мат. спец. пед. вузов. – Саранск, 2003.
40. Колягин, Ю.М. Задачи в обучении математике./ Ю.М. Колягин.– М.: Просвещение, 1977.– 267 с.: ил.
41. Кулюткин, Ю.Н. Эвристические методы в структуре решений/Ю.Н.Кулюткин. – М.: Педагогика,1970. – 232 с.
42. Мангейм, Дж. Б. Политология. Методы исследования: Перевод с англ. / Дж. Б. Мангейм, Р. К. Рич. – М.: Весь Мир, 1997. – 544 с.
43. Маркова В. Формирование мышления учащихся//математика. – 2004. - №34.
44. Математика в средней школе./ Л.А. Гороховцева // Теория и практика высш. проф. обр.– 2003.– № 9.– С. 14-21.
45. Математика: Учебник для 5 кл. общеобразоват. учреждений/ Г. В. Дорофеев, И. Ф. Шарыгин, С. Б. Суворова и др.; Под ред. Г. В. Дорофеева, И. Ф. Шарыгина. – 2-е изд. – М.: Просвещение, 1999. – 368с.
46. Математика: 6 класс: Учебник для общеобразоват. учеб. заведений/ Г. В. Дорофеев, И. Ф. Шарыгин, С. Б. Суворова и др.; Под ред. Г. В. Дорофеева, И. Ф. Шарыгина. – 2-е изд. – М.: Дрофа, 1995. – 416 с.
47. Методика преподавания математики в средней школе. Общая методика/сост. Р.С.Черкасов, А.А.Столяр. – М.,1985.
48. Мышкис, А. Д. О прикладной направленности школьного курса элементов математического анализа / А. Д. Мышкис // Математика в школе, 1990, - № 6, с. 7-11.
49. Новик, И. Б. О философских вопросах кибернетического моделирования/ И. Б. Новик – М., Знание, 1964.
50. Обойщикова, И. Г. Обучение моделированию учащихся 5 – 6 классов при изучении математики: Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата педагогических наук / И. Г. Обойщикова. - Саранск, 2002.
51. Перминова Л. Решение занимательных задач – один из путей активизации творческой деятельности учащихся//Математика. – 2000.
52. Полякова С.Ю. обучение математическому моделированию общественных процессов, средство гуманитаризации математического образования: Дис…канд. пед. наук. – Омск, 1999 – 173 с.
53. Программы ОУ Математика 5-6; изд. Просвещение, составитель Бурмистрова Т.А.
54. Программы ОУ Алгебра 7-9; изд. Просвещение, составитель Бурмистрова Т.А.
55. Роль задач в развитии логического мышления младших школьников// [www.poluchi5.ru](http://www.poluchi5.ru)
56. Савинцева, Н.В. О текстовых задачах в современном курсе математики 5-6 класса./ Н. Савинцева // Сборник научных трудов математического факультета МГПУ. М.:МГПУ, 2005.
57. Саранцев Г.И. общая методика преподавания математики: учебное пособие для студентов мат. спец. пед. вузов и университетов. –Саранск, 1999.
58. Севрюков П.Ф. задачи на движение: простые и не очень // Математика в школе:№10 2008.
59. Сем Ллойд. Математическая мозаика / сост. и ред. М. Гарнер; пер. с англ. Ю.Н. Сударева. – М.: Рипол, 1995.
60. Советский энциклопедический словарь/ гл.ред. А.М.Прохоров. – 3-е изд. – М.: Сов. Энциклопедия, 1984.
61. Справочное пособие по методам решения задач по математике для средней школы. Цыпкин А.Г., Пинский А.И. под редакцией физико-математической литературы
62. Статкевич, В.В. О начальном обучении решению задач /В.В. Статкевич. – Минск: Народна асвета, 1970.
63. Стойлова, Л.П. Математика: учеб. пособие для студ. сред. пед. учеб. заведений. - 2-е изд., испр. – М.: Академия, 1997
64. Таранова М. развитие творческого мышления учащихся//Математика. – 2004. - №27-28.
65. Уемов, А. И. Логические основы метода моделирования / А. И. Уемов. – М.: Просвещение, 1996.
66. Фридман, Л. М. Наглядность и моделирование в обучении [Текст] / Л. М. Фридман. – М.: Знание, 1984. – 80 с.
67. Фридман Л.М Сюжетные задачи по математике. История, теория, методика. – М.: Школьная пресса, 2002.
68. Фридман Л.М., Турецкий Е.Н. как научиться решать задачи. – М.: Просвещение, 1989.
69. Фридман Л.М. учитесь учиться математике: кн. для учащихся. – М.: Просвещение, 1985.
70. Царева С.Е. Обучение решению текстовых задач, ориентированное на формирование учебной деятельности младших школьников. – Новосибирск: Изд-во НГПУ, 1998. – 136 с.
71. Целищева, И. Моделирование в текстовых задачах/ И. Целищева, С. Зайцева // Приложение к газете «1 сентября». Математика, 2002, №33 – 34
72. Шарова О.П. сюжетные задачи в обучении математике//www.yspu.ya.ru/vestnik/uchenue\_praktikam
73. Шелехова Л.В. Сюжетные задачи по математике: Учебно-методическое пособие. - Майкоп: Изд-во АГУ, 2007.
74. Шестаков С.А о геометрических методах решения алгебраических задач // Математика в школе:№5 2006.
75. Штофф, В. А. Моделирование и философия. – М.-Л.: Наука, 1966. – 301 с.
76. <http://mat-modelir.narod.ru>
77. <http://festival.1september.ru>