**1.ВВЕДЕНИЕ.**

Задачи, связанные с последовательностями, в курсе алгебры занимают всего два урока. Немного больше времени уделяется частным видам последовательностей, а именно арифметической и геометрической прогрессиям. Однако для решения предлагаемых на Едином Государственном экзамене задач этих знаний недостаточно. Числовые последовательности являются одним из основных объектов рассмотрения в математическом анализе.

 **Цель исследования**: изучить понятие числовой последовательности, виды числовых последовательностей и научиться решать задачи, связанные с числовыми последовательностями.

 Для достижения цели поставлены следующие **задачи**:

1.изучение литературы по данной теме в печатном и электронном виде;

2. изучение видов последовательностей;

3. отработка полученных знаний в ходе решения задач;

4. ознакомление учеников 9-11 классов с решением нестандартных задач.

 **Объект исследования:** свойства числовых последовательностей

 **Предмет исследования** - числовые последовательности

 **Методы исследования:**

1. изучение литературы;

2. выполнение практических заданий;

 3. сравнение и обобщение полученных результатов

 **Практическая значимость**: использование материала при подготовке к Единому Государственному Экзамену.

 **Новизна проведённой исследовательской работы**: изучение числовых последовательностей как темы, не входящей в школьную программу 9 класса. Задачи с использованием свойств сравнений также встречаются среди заданий под номером 21(бывшие С6) Единого государственного экзамена, которые оцениваются максимальным количеством баллов .

1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ВИДЫ ЧИСЛОВЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Понятие числовой последовательности возникло задолго до создания учения о функциях. В нашей жизни многие события происходят последовательно: например, смена дня и ночи, смена дней недели, смена возраста живого существа с течением времени. Последовательно увеличивает свою скорость автомобиль, последовательно пронумерованы дома на улицах.

Я сравнил несколько определений числовых последовательностей.

Определение 1. Пусть Х – множество вещественных чисел. Тогда последовательность  элементов множества  называется **числовой последовательностью**.

Определение2. Последовательностью называется функция, которая переводит множество натуральных чисел N в некоторое множество Х:

 .

Определение 3.Числовой последовательностьюназывается бесконечное множество чисел

 следующих одно за другим в определенном порядке и построенных по определенному закону, с помощью которого задается как функция целочисленного аргумента т.е. .

Обычно последовательность целесообразнее задавать формулой ее общего члена, которая позволяет найти любой член последовательности, зная его номер.

Пример 1. Найти общий член последовательности

2,5,10,17,26,37,50…

2= $1^{2}$ + 1

5=$ 2^{2} $+ 1

10=$3^{2} $+ 1

Нетрудно видеть,что каждый член данной числовой последовательности равен увеличенному на 1 квадрату его номера, то есть общий член последовательности можно записать в виде $a\_{n}$ = $n^{2}$ +1.

Элементами последовательности не обязательно должны быть различные числа. Так, если  *yn* = 1, то последовательность имеет вид 1, 1, ..., 1, ...

Общий член    определяет знакочередующуюся последовательность вида 1, –1, 1, –1, ...

Другим способом задания последовательности является задание последовательности с помощью рекуррентного соотношения. В этом случае задается один или несколько первых элементов последовательности, а остальные определяются по некоторому правилу. Например, известен первый член  последовательности и известно, что  , то есть  и так далее до нужного члена.

Примером рекуррентно заданной последовательности является знаменитая последовательность чисел Фибоначчи 1.1,2,3,5,8,13,21,34…., в которой каждое последующее число является суммой двух предыдущих. Данную последовательность можно задать рекуррентным соотношением:

$a\_{n+2}$= $a\_{n }$ +$  a\_{n+1}$, где $ а\_{1}= а\_{2}$ = 1

Числовые последовательности бывают конечными и бесконечными. К бесконечным последовательностям можно отнести ряд натуральных чисел, к конечным последовательностям можно отнести, например, четные двузначные числа.

Виды числовых последовательностей:

1)**Возрастающая последовательность**– последовательность, каждый член которой больше предыдущего 

2) **Неубывающая последовательность** – последовательность, каждый член которой не меньше предыдущего

3) Убывающая **последовательность** – последовательность, каждый член которой каждый меньше предыдущего

4) **Невозрастающая последовательность** – последовательность, каждый член которой не больше предыдущего 

5) Ограниченная последовательность имеет место тогда, когда найдутся такие действительные числа  и , что для всех натуральных чисел выполняется неравенство 

6) Последовательность  называется неограниченной, если она постоянно или растет или убывает.

3.ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

ЗАДАЧА 1.

Все члены конечной последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, либо в 10 раз больше, либо в 10 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 3024.
а) Может ли последовательность состоять из двух членов?
б) Может ли последовательность состоять из трёх членов?
в) Какое наибольшее количество членов может быть в последовательности?

Решение

**а**) Если последовательность состоит из двух членов, *a* и 10 *a*(в произвольном порядке), то 

Уравнение   не имеет решений в натуральных числах. Поэтому последовательность не может состоять из двух членов.

**б**) Составим уравнение: *a+10a+a=3024 → a=252*

*10a+a+10a=3024 → a=144*

(*Пример*). Последовательность может состоять из трёх членов. Например: 252, 2520, 252 или 1440,144,1440

  в) Ближайшим к 3024 число, делящееся на 11 нацело, является 3014.

3014=11\*174. Таким образом, в последовательности 174 пары вида (10;1) и число 10.

Допустим, что в последовательности более чем 549 членов.

Разобьём первые 550 членов последовательности на 275 пар соседних членов: первый и второй, третий и четвертый, пятый и шестой и т.д.

Сумма двух членов в каждой паре делится на 11 и поэтому не меньше 11.

Значит, сумма всех членов последовательности не меньше, чем    противоречие.

 Ответ:  **а**) нет;   **б**) да;  **в**) 549.

ЗАДАЧА 2.

Дана последовательность натуральных чисел, причем каждый следующий ее член отличается от предыдущего либо на 10, либо в 6 раз. Сумма всех членов последовательности равна 257.

а) Какое наименьшее (минимальное) число членов может быть в данной последовательности?
б) Какое наибольшее (максимальное) количество членов может быть в этой последовательности?

Решение:

А) Предположим, что последовательность состоит из двух чисел, одно из которых больше другого на 10. Если первое число нечетно, то второе число тоже нечетно. А сумма двух нечетных чисел есть число четное. Если же первое число четно, то второе число, которое больше первого на 10, тоже четно. А сумма двух четных чисел есть четное число. Получается, что ни при каких обстоятельствах нечетного числа 257 в сумме у нас не получится.

Предположим теперь, что второе число в 6 раз больше первого. То есть первое число есть  тогда второе число есть . Их сумма равна  и равна 257. Однако 257 на 7 без остатка не делится. Значит, этот вариант также не удовлетворяет нашему условию.

Исходя из вышеизложенного, делаем следующий вывод: двух чисел в этой последовательности быть не может.

Рассмотрим следующий вариант. Предположим, что последовательность состоит из 3 чисел. Пусть каждое из них на 10 больше предыдущего. Тогда первое равно*х*, второе равно *х+10*, а третье *х+20*. Тогда их сумма равна *3х+30* и равна 257. То есть

 *3х+30=257*

*3х=227*. Но бе**з** остатка 227 на 3 не делится.

Рассмотрим такой вариант: пусть второе число в 6 раз больше первого, а третье на 10 больше второго. Тогда *х+6х+6х+10=257* или

*13х+10=257*

*13х=247,* то есть *х =19.*

Значит, минимальное количество чисел в нашей последовательности равно трем. Меньше уже не получается. К примеру, это может быть вот такая последовательность:

19,114,124.  Теперь нам нужно, чтобы в последовательности было как можно больше членов. Поэтому пара вида (1;6) должна встречалась в ней как можно чаще.

Сумма чисел этой пары равна 7. Если разделить 257 на 7, то получится 36 и 5 в остатке. Но эту *5* не получится представить, используя члены нашей последовательности. Поэтому мы лучше скажем, что пар вида (1;6) в последовательности 35 штук, а оставшиеся число **12** представлено в ней парой(1;11**)**. Все! Теперь мы получили последовательность 1;11;1;6;1;6;1;.. (пар типа  (1;6) всего 35 штук) с максимально возможным числом членов. В этой последовательности  числа. То есть максимально возможное число членов последовательности равно 72.

Ответ: а)3 б) 72

 **ЗАДАЧА 3.**
Все члены конечной последовательности являются натуральными числами.
Каждый член этой последовательности, начиная со второго, либо в 5 раз больше, либо в 5 раз меньше предыдущего.

Сумма всех членов последовательности равна 2013.
а). может ли эта последовательность состоять из трёх членов?
б). может ли эта последовательность состоять из четырёх членов?
в). может ли эта последовательность состоять из пяти членов?
г). какое наибольшее число членов может быть в этой последовательности?

Путем разложения на простые множители получим натуральные делители числа 2013:1,3,11,33,61,183,671,2013.

А) Если последовательность имеет вид *5х,х,5х* то сумма членов последовательности будет равна
*5х+х+5х=11х*
2013 делится на 11 без остатка, следовательно последовательность может состоять из 3 членов :915, 183, 915.

Б) 2013 является нечетным числом. Получить нечётное число из 4 натуральных слагаемых можно только, если:
1)Среди них 1 четное и 3 нечётных
2)среди них 3 чётных и 1 нечётное.
При умножении или делении на 5 (как и на любое нечётное число) число свою чётность не меняет. Тогда все члены последовательности будут числами одной четности (справедливо для любого количества членов), и их сумма будет четным числом, таким образом, в последовательности не может быть 4 члена.

В)Такая последовательность может существовать, если вс её члены - нечётные числа.
например, если последовательность имеет вид *25х,5х,25х,5х,х,*  то сумма её членов будет равна *61х*;

2013 делится на 61, следовательно последовательность может состоять из 5 членов (825,165,825,165,33)

Г)Если члены последовательности чередуются (*х;5х;х;5х;х;5х , )*то последовательность содержит максимальное количество членов. сумма чисел в каждой паре делится на 6. последовательность не может содержать четное число членов, так как 2013 не делится нацело на 6.
если последовательность начинается с 5х,то  *6кх + 5х=2013*,если с *х,  то*

*6кх + х=2013* (х должен быть как можно меньше)[к-количество пар *(х;5х)*
1) то  *6кх + 5х=2013*
*6кх = 2013-5х*
*2013 – 5х* делится на 6
5х даёт в остатке 3 при делении на 6 (2013 при делении на 6 даёт 3 в остатке)
х =3 (15 =2\*6+3)
к=111 максимум членов в последовательности 111\*2+1 =223
2) *6кх + х=2013*
аналогично рассуждая, получим х=3
18 к=2010, к не является натуральным числом
 таким образом, в последовательности максимум 223 члена

Ответ: А)да ;Б)нет; В)да; Г)223

**ЗАДАЧА 4.**

|  |
| --- |
| Можно ли из последовательности  1, $\frac{1}{2}$ , $\frac{1}{3}$ , $\frac{1}{4}$ , …..выделить арифметическую прогрессиюа) длиной 4; б) длиной 5; в) длиной n, где n - любое натуральное число?Решение: Возьмём пару произвольных членов последовательности и найдём их разность.http://egetrener.ru/cgi-bin/mimetex.cgi?\frac%7b1%7d%7bm%7d          http://egetrener.ru/cgi-bin/mimetex.cgi?\frac%7b1%7d%7bm+k%7d                    http://egetrener.ru/cgi-bin/mimetex.cgi?d=\frac%7b1%7d%7bm+k%7d-\frac%7b1%7d%7bm%7d=\frac%7b-k%7d%7bm(m+k)%7dТеперь продолжим начатую арифметическую прогрессию с найденной разностью:http://egetrener.ru/cgi-bin/mimetex.cgi?\frac%7b1%7d%7bm%7d          http://egetrener.ru/cgi-bin/mimetex.cgi?\frac%7b1%7d%7bm+k%7d          http://egetrener.ru/cgi-bin/mimetex.cgi?\frac%7bm-k%7d%7bm(m+k)%7d          http://egetrener.ru/cgi-bin/mimetex.cgi?\frac%7bm-2k%7d%7bm(m+k)%7d          http://egetrener.ru/cgi-bin/mimetex.cgi?\frac%7bm-3k%7d%7bm(m+k)%7dЕсли первые два числа привести к тому же знаменателю *m(m + k)*, то получим:http://egetrener.ru/cgi-bin/mimetex.cgi?\frac%7bm+k%7d%7bm(m+k)%7d          http://egetrener.ru/cgi-bin/mimetex.cgi?\frac%7bm%7d%7bm(m+k)%7d          http://egetrener.ru/cgi-bin/mimetex.cgi?\frac%7bm-k%7d%7bm(m+k)%7d          http://egetrener.ru/cgi-bin/mimetex.cgi?\frac%7bm-2k%7d%7bm(m+k)%7d          http://egetrener.ru/cgi-bin/mimetex.cgi?\frac%7bm-3k%7d%7bm(m+k)%7dЧтобы прогрессия состояла из трёх членов данной последовательности, третья дробь должна сократиться, и при этом в числителе должна оказаться *единица*, т.е. знаменатель *m(m + k)* должен поделиться на числитель *(m - k)*.Это произойдёт, например, при *m = 2k*. Получим прогрессию:http://egetrener.ru/cgi-bin/mimetex.cgi?\frac%7b1%7d%7b2k%7d               http://egetrener.ru/cgi-bin/mimetex.cgi?\frac%7b1%7d%7b3k%7d               http://egetrener.ru/cgi-bin/mimetex.cgi?\frac%7b1%7d%7b6k%7dПодставляя различные натуральные *k*, будем получать разные примеры прогрессий.Например при к=2 получим убывающую последовательность $\frac{1}{4}$ $; \frac{1}{6}$ ; $\frac{1}{12}$ с разностью, равной -$ \frac{1}{12}$Чтобы в четвёртом члене прогрессии при сокращении оказалась единица,знаменатель *m(m + k)* должен поделиться на числитель *(m - 2k)*.Это произойдёт, например, при *m = 3k*: $\frac{1}{3к }$ ; $\frac{ 1}{4к}$ ; $\frac{1}{6к}$ ; $\frac{1}{12 к}$Потребуем теперь, чтобы сократилась пятая дробь. Возьмём *m = 4k*. Наша прогрессия:$\frac{1}{4k}$ $\frac{1}{5k} $ $\frac{3}{20k}$ $ \frac{2}{24k}$ $\frac{1}{20k}$ Чтобы во всех числителях оказалась единица (третья дробь подводит), возьмём *k = 3*:$\frac{1}{12}$ $ \frac{1}{15}$ $\frac{1}{20}$ $\frac{1}{36}$ $\frac{1}{60}$                                                            Присмотримся внимательно к прогрессии, найденной в самом начале решения:http://egetrener.ru/cgi-bin/mimetex.cgi?\frac%7bm+k%7d%7bm(m+k)%7d      http://egetrener.ru/cgi-bin/mimetex.cgi?\frac%7bm%7d%7bm(m+k)%7d      http://egetrener.ru/cgi-bin/mimetex.cgi?\frac%7bm-k%7d%7bm(m+k)%7d      http://egetrener.ru/cgi-bin/mimetex.cgi?\frac%7bm-2k%7d%7bm(m+k)%7d      http://egetrener.ru/cgi-bin/mimetex.cgi?\frac%7bm-3k%7d%7bm(m+k)%7d      http://egetrener.ru/cgi-bin/mimetex.cgi?\frac%7bm-4k%7d%7bm(m+k)%7d      http://egetrener.ru/cgi-bin/mimetex.cgi?\frac%7bm-5k%7d%7bm(m+k)%7dЧислители образуют арифметическую прогрессию, знаменатели равны. Возьмём в качестве знаменателя *n!*, а в качестве числителей *1, 2, 3,*....http://egetrener.ru/cgi-bin/mimetex.cgi?\frac%7b1%7d%7bn!%7d      http://egetrener.ru/cgi-bin/mimetex.cgi?\frac%7b2%7d%7bn!%7d    http://egetrener.ru/cgi-bin/mimetex.cgi?\frac%7b3%7d%7bn!%7d    http://egetrener.ru/cgi-bin/mimetex.cgi?\frac%7b4%7d%7bn!%7d    http://egetrener.ru/cgi-bin/mimetex.cgi?\frac%7b5%7d%7bn!%7d    http://egetrener.ru/cgi-bin/mimetex.cgi?\frac%7b6%7d%7bn!%7d    http://egetrener.ru/cgi-bin/mimetex.cgi?\frac%7b7%7d%7bn!%7d    http://egetrener.ru/cgi-bin/mimetex.cgi?\frac%7b8%7d%7bn!%7d    ...    http://egetrener.ru/cgi-bin/mimetex.cgi?\frac%7bn%7d%7bn!%7dОтвет: можно. |

**4.ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

 1.изучив литературу по теме, я ознакомился с понятием числовой последовательности, с их видами, а также с их применением на практике.

 2. я рассмотрел основы ранее неизвестного мне раздела математики и убедился в его большой практической пользе для решения задач..

 Можно сделать вывод, что изучение последовательностей полезно для каждого школьника, интересующегося математикой. Последовательности сравнений могут быть использованы при решении выходящих за пределы базового уровня заданий, предлагаемых на олимпиадах и экзаменах. Поскольку в будущем я собираюсь поступать в высшее учебное заведение, изучение данного материала было для меня очень полезно.

**5.СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**:

1. Сайт для подготовки к ЕГЭ по математике <http://alexlarin.net/>

2. Ященко И.В. «ЕГЭ-2014. Типовые экзаменационные варианты». (М., 2014)

3. Дубинина Л.Я., Никулина Л.С., Ткалич А.Н «Числовые последовательности».

 ( http://mathus.ru/)

4. «Математический справочник «ЕГЭ-2015»( http://mathus.ru/)

5. И.В.Яковлев «Задача С6 на ЕГЭ по математике»( http://mathus.ru/)

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение

**Теоретическая часть** стр. 1

1. Определение последовательности стр.2
2. Виды и способы задания последовательностей стр.3

**Практическая часть**

1. Решение задач с применением свойств последовательностей стр.4
2. Заключение. стр.10
3. Список литературы стр.11