ЕГЭ

Под редакцией
Ф.Ф. Лысенко,
С.Ю. Кулабухова

готовимся к ЕГЭ

МАТЕМАТИКА

ПОДГОТОВКА К ЕГЭ-2014

УЧЕБНО-ТРЕНИРОВОЧНЫЕ ТЕСТЫ

**ПО НОВОЙ СПЕЦИФИКАЦИИ:
B1 – B15, C1 – C6**

ЛЕГИОН

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС
«МАТЕМАТИКА. ПОДГОТОВКА К ЕГЭ»

Учебные пособия издательства «Легион» допущены к использованию в образовательном процессе приказом Минобрнауки России № 729 от 14.12.2009

Учебно-методический комплекс «Математика. Подготовка к ЕГЭ»

Под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова

МАТЕМАТИКА

ПОДГОТОВКА К ЕГЭ-2014

УЧЕБНО-ТРЕНИРОВОЧНЫЕ ТЕСТЫ ПО НОВОЙ СПЕЦИФИКАЦИИ: B1–B15, C1–C6

Учебно-методическое пособие

ТМ

ЛЕГИОН
Ростов-на-Дону
2014

ББК 22.1
М 34

Рецензенты:
О. Б. Кожевников — кандидат физико-математических наук, доцент;
Л. Л. Иванова — заслуженный учитель РФ.

Авторский коллектив:
Войта Е. А., Дерезин С. В., Дрёмов В. А., Иванов С. О., Коннова Е. Г., Нужа Г. Л., Ольховая Л. С., Резникова Н. М., Фридман Е. М., Ханин Д. И.

М 34 **Математика. Подготовка к ЕГЭ-2014. Учебно-тренировочные тесты по новой спецификации: В1 – В15, С1 – С6**: учебно-методическое пособие / Под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова. — Ростов-на-Дону: Легион, 2014. — 144 с. — (Готовимся к ЕГЭ)

ISBN 978-5-9966-0477-7

В пособие включены тесты, составленные в соответствии с **утверждёнными спецификацией и демонстрационным вариантом ЕГЭ-2014**. Учтены изменения в структуре контрольно-измерительных материалов (**В1 – В15, С1 – С6**) и их содержании. Издание содержит необходимый материал и рекомендации для самостоятельной подготовки к ЕГЭ по математике:

- **20 новых авторских учебно-тренировочных тестов**, составленных по спецификации ЕГЭ-2014 с учётом опыта экзамена 2013 года и последних изменений в открытом банке заданий по математике;
- краткий математический **справочник**.

Книга позволит выпускникам и абитуриентам, не обращаясь к дополнительной литературе, получить желаемый результат — от минимального количества баллов, необходимого для сдачи ЕГЭ и получения аттестата, до максимально возможного.

Пособие предназначено выпускникам общеобразовательных учреждений, учителям и методистам.

Пособие входит в **учебно-методический комплекс «Математика. Подготовка к ЕГЭ»**. Продиагностировать уровень математической подготовки и в соответствии с полученными результатами оптимально подобрать необходимые пособия поможет брошюра **«Готовимся к ЕГЭ по математике. С чего начать?»**, содержащая всю информацию об учебно-методическом комплексе «Математика. Подготовка к ЕГЭ» издательства «Легион».

ББК 22.1

ISBN 978-5-9966-0477-7

Оглавление

2. Зак. № 270

От авторов

Предлагаемое пособие содержит **20 учебно-тренировочных тестов,** составленных в соответствии со спецификацией ЕГЭ-2014. Каждый тест, согласно **новой структуре КИМ**, включает **15 заданий группы В** с кратким ответом и **6 заданий группы С**, требующих развёрнутого письменного решения.

Значительная часть заданий посвящена отработке тем и идей, содержащихся в новой спецификации и получивших своё отражение в демонстрационном варианте. При составлении задач предпочтение отдавалось темам, появление которых наиболее вероятно на ЕГЭ-2014.

Согласно утверждённой спецификации ЕГЭ-2014, тест по математике состоит из двух частей. Часть 1 содержит 10 заданий (задания В1 – В10) с кратким ответом базового уровня сложности. Часть 2 содержит пять заданий (задания В11 – В15) с кратким ответом базового уровня и шесть заданий (задания С1 – С6) с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

Задания группы В составлены в соответствии с открытым банком задач. Из предлагаемого многообразия задач открытого банка авторы выделили набор, охватывающий все проверяемые на экзамене знания и навыки.

Варианты расположены в книге по возрастанию сложности. Первые варианты из предлагаемых двадцати наиболее простые и рекомендуются для начальных этапов подготовки к ЕГЭ. Последние варианты являются более сложными и рекомендуются для систематической подготовки, гарантирующей высокий результат на предстоящем экзамене.

Пособие является самодостаточным и позволяет не пользоваться дополнительным материалом, так как в него включён **краткий теоретический справочник**.

Прежде чем приступить к решению тестовых заданий, внимательно изучите **инструкцию по выполнению работы**, помещённую перед первым вариантом теста на стр. 63.

Отметим также, что новая шкала перевода набранных первичных баллов в тестовые (в 100-балльную систему) будет известна только по окончании сдачи ЕГЭ-2014.

Обсудить пособия, оставить свои замечания и предложения, задать вопросы можно на официальном форуме издательства `http://forum.legionr.ru`.

Следите за дополнениями и методическими рекомендациями на сайте издательства `http://legionr.ru` в связи с возможными изменениями спецификаций экзаменационных работ, разрабатываемых ФИПИ (доступ к материалам свободный).

Комплекс «Математика. Подготовка к ЕГЭ» издательства «Легион»:

- Математика. Подготовка к ЕГЭ-2014.
- Математика. Решебник. Подготовка к ЕГЭ-2014.
- Математика. Подготовка к ЕГЭ-2014. Учебно-тренировочные тесты.
- Математика. Решебник. Подготовка к ЕГЭ-2014. Учебно-тренировочные тесты.
- Математика. Подготовка к ЕГЭ-2014. Теория вероятностей.
- Математика. Базовый уровень ЕГЭ-2014. Пособие для «чайников». Часть 1: Арифметика и алгебра.
- Математика. Базовый уровень ЕГЭ-2014. Пособие для «чайников». Часть 2: Алгебра и начала анализа.
- Математика. Базовый уровень ЕГЭ-2014. Пособие для «чайников». Часть 3: Геометрия.
- Математика. Подготовка к ЕГЭ-2014. Тематические тесты. Уравнения, неравенства, системы (С1, С3).
- Математика. Учимся решать задачи с параметром. Подготовка к ЕГЭ-2014: задание С5
- Математика. 11-й класс. Повторение курса в формате ЕГЭ. Рабочая программа.
- Математика. 10-й класс. Промежуточная аттестация в форме ЕГЭ.
- Математика. 10 – 11 классы. Карманный справочник.

- Математика. Подготовка к ЕГЭ. Тригонометрические уравнения: методы решений и отбор корней (С1).
- Математика. Подготовка к ЕГЭ. Задание С2. Многогранники: типы задач и методы их решений.
- Математика. Подготовка к ЕГЭ-2014. Решение задач по стереометрии методом координат (задание С2).
- Математика. Подготовка к ЕГЭ: решаем задание С3 методом рационализации.
- Геометрия. Подготовка к ЕГЭ и ГИА-9. Учимся решать задачи и повторяем теорию.
- Математика. Подготовка к ЕГЭ: секреты оценки заданий части С. Решения и комментарии.
- Математика. Подготовка к ЕГЭ. Нестандартные методы решения уравнений и неравенств.
- Математика. Подготовка к ЕГЭ: математический бой. Задания частей В и С.

Желаем успехов на экзамене!

Краткий теоретический справочник

Предлагаемый справочник содержит основные результаты и формулы, предусмотренные программой 2002 года для общеобразовательных учреждений. В основу отбора материала положен курс B, по которому разрабатывались КИМы 2002–2013 годов. Однако, как при подготовке к ЕГЭ, так и при его сдаче, учащимся понадобятся сведения, которые требуют значительных усилий при их доказательстве, выводе, исследовании. Они не входят в нормативные рамки курса B, но большинство из них включено в курс углубленного изучения математики и отмечено звездочкой (*).

§ 1. Условные обозначения

При изложении теоретического материала, содержащегося в этой главе, мы будем пользоваться следующими общепринятыми математическими обозначениями.

N — множество всех натуральных чисел.
N_0 — множество всех неотрицательных целых чисел.
Z — множество всех целых чисел.
Q — множество всех рациональных чисел.
R — множество всех действительных (вещественных) чисел.
R^+ — множество всех положительных действительных чисел.
$\Rightarrow$ — следует.
$\Leftrightarrow$ — равносильно; эквивалентно; тогда и только тогда.
$\stackrel{\text{def}}{=}$ — по определению равно.
$D(f)$ — область определения функции $y = f(x)$.
$E(f)$ — множество (область) значений функции $y = f(x)$.
const — постоянная величина.
$\in$ — принадлежит, содержится; например,
$x \in R$ — x принадлежит множеству действительных чисел, то есть x является действительным числом.
$n \,\vdots\, m$ (для $n, m \in Z$) — число n делится нацело на число m.

§ 2. Степени и корни

Определение степени и корня

1. Пусть $a \in R, n \in N$. Тогда

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ сомножителей}};$$

$$a^0 \stackrel{\text{def}}{=} 1, \quad \text{если } a \neq 0;$$

$$a^{-n} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{a^n}, \text{ если } a \neq 0;$$

$$0^0 \text{ не определено;}$$

$$\sqrt[n]{a} \stackrel{\text{def}}{=} b \Leftrightarrow b^n = a \text{ и } b \geqslant 0 \text{ при } n \text{ чётном;}$$

$$\sqrt[n]{a} \stackrel{\text{def}}{=} b \Leftrightarrow b^n = a \text{ при } n \text{ нечётном.}$$

2. Пусть $a \in R^+$; $m \in Z, n \in N, n > 1$. Тогда

$$a^{\frac{m}{n}} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt[n]{a^m}.$$

Правила действий с радикалами

Пусть $m, n, k \in N$; $m, n > 1$; $a, b \in R^+$. Тогда

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}; \qquad \sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m};$$

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}; \qquad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}};$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}; \qquad \sqrt[n]{a+b} < \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}.$$

Правила действий со степенями

Пусть $p, q \in Q$, $a, b \in R^+$. Тогда

$$a^p a^q = a^{p+q}; \qquad (a^p)^q = a^{pq};$$

$$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}; \qquad (ab)^p = a^p b^p.$$

Не приводя определения степени с действительным показателем, отметим, что правила действий с такими степенями «сохраняются», то есть приведённые правила верны и для p, $q \in R$.

Формулы сокращённого умножения

Пусть $a, b \in R$. Тогда

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2;$$
$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3;$$
$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b);$$
$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2);$$
$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$$

Таблица квадратов

$11^2 = 121$	$16^2 = 256$	$21^2 = 441$	$26^2 = 676$
$12^2 = 144$	$17^2 = 289$	$22^2 = 484$	$27^2 = 729$
$13^2 = 169$	$18^2 = 324$	$23^2 = 529$	$28^2 = 784$
$14^2 = 196$	$19^2 = 361$	$24^2 = 576$	$29^2 = 841$
$15^2 = 225$	$20^2 = 400$	$25^2 = 625$	$30^2 = 900$

§ 3. Модуль и его свойства

1. Определение модуля числа.

$$|x| \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} x, & \text{если } x > 0; \\ 0, & \text{если } x = 0; \\ -x, & \text{если } x < 0; \end{cases} \quad \text{или} \quad |x| \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} x, & \text{если } x \geqslant 0; \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

2. Геометрически $|x|$ есть расстояние от точки x числовой оси до начала отсчёта — точки O.

3. $|x - a|$ есть расстояние между точками x и a числовой оси.

4. Модуль произведения, частного и степени.

$$|xy| = |x| \cdot |y|; \quad \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|},\ y \neq 0; \quad {}^*|x^n| = |x|^n, n \in Z, \left[\begin{array}{l} x \neq 0, \\ n > 0. \end{array} \right.$$

5. $\sqrt{x^2} = |x|$.

§ 4. Прогрессии

Арифметическая прогрессия

1. Если a_n есть n-й член, d — разность и S_n — сумма n первых членов арифметической прогрессии, то

$$a_{n+1} = a_n + d,\ a_n = a_1 + d(n-1),$$
$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{\big(2a_1 + d(n-1)\big)n}{2}.$$

Арифметическая прогрессия возрастает, если $d > 0$, и убывает, если $d < 0$.

2*. Если a_k, a_l, a_m, a_n — члены арифметической прогрессии с такими номерами, что $k + l = m + n$, то $a_k + a_l = a_m + a_n$.

3. Каждый член арифметической прогрессии, отличный от первого и последнего, равен среднему арифметическому соседних с ним членов:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

Геометрическая прогрессия

1. Если b_n есть n-й член, q — знаменатель и S_n — сумма n первых членов геометрической прогрессии, то

$$b_{n+1} = b_n q,\ b_1 \neq 0,\ q \neq 0; \qquad b_n = b_1 q^{n-1},$$
$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q-1},\ q \neq 1.$$

2*. Если b_k, b_l, b_m, b_n — члены геометрической прогрессии с такими номерами, что $k + l = m + n$, то $b_k \cdot b_l = b_m \cdot b_n$.

3. Квадрат каждого члена геометрической прогрессии, отличного от первого и последнего, равен произведению соседних с ним членов:

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}.$$

Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия

Если S есть сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии ($|q| < 1$), то $S = \dfrac{b_1}{1-q}$.

§ 5. Логарифмы

Определение логарифма

Логарифмом данного числа x по данному основанию a называется показатель степени y, в которую нужно возвести основание a, чтобы получить данное число x: $y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$.

Свойства логарифмов

Пусть $a > 0, a \neq 1$.

1. Основное логарифмическое тождество:

$$a^{\log_a x} = x, \text{ для } x > 0.$$

2. Логарифм произведения, частного и степени:

$$\log_a(xy) = \log_a|x| + \log_a|y|, xy > 0;$$
$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a|x| - \log_a|y|, xy > 0;$$
$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y, x > 0, y > 0;$$
$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y, x > 0, y > 0;$$
$$\log_a x^\alpha = \alpha\log_a x, x > 0;$$
$$\log_a x^k = k\log_a|x|, k \text{ — чётное целое.}$$

3. Формула перехода к новому основанию. Пусть $b > 0, b \neq 1, x > 0$. Тогда

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}, \text{ в частности } \log_a x = \frac{1}{\log_x a}, \text{ при } x \neq 1.$$

Кроме того, $\log_a x\log_b y = \log_a y\log_b x$.

4. Пусть $b > 0, a \neq 0, a \neq 1$, тогда

$$\log_{a^p} b = \frac{1}{p}\log_a b, p \neq 0;$$

$$\log_{a^k} b = \frac{1}{k}\log_{|a|} b, k \neq 0, k \text{ — чётное целое.}$$

5*. $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$.

При решении задач бывает полезна следующая теорема.

Если числа a и b на числовой оси расположены по одну сторону от единицы, то $\log_a b > 0$, а если по разные, то $\log_a b < 0$.

§ 6. Теория вероятностей

Классическое определение вероятности

Вероятностью события A называется отношение числа благоприятных для A исходов к числу всех равновозможных исходов

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где n — общее число равновозможных исходов, m — число исходов, благоприятствующих событию A.

Противоположные события

Событие, противоположное событию A, обозначают $\overline{A}$. При проведении испытания всегда происходит ровно одно из двух противоположных событий и

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1; \qquad P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

Объединение несовместных событий

Два события A и B называют несовместными, если отсутствуют исходы, благоприятствующие одновременно как событию A, так и событию B.

Событие C называют объединением событий A и B (пишут $C = A \cup B$), если событие C означает, что произошло хотя бы одно из событий A и B.

Если события A и B несовместны, то вероятность их объединения равна сумме вероятностей событий A и B

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Пересечение независимых событий

Два события A и B называют независимыми, если вероятность каждого из них не зависит от появления или непоявления другого события.

Событие C называют пересечением событий A и B (пишут $C = A \cap B$), если событие C означает, что произошли оба события A и B.

Если события A и B независимы, то вероятность их пересечения равна произведению вероятностей событий A и B

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

§ 7. Тригонометрия

Радианное измерение углов

Определение. Один радиан равен центральному углу окружности, длина дуги которого равна радиусу этой окружности.

$$1 \text{ радиан} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ 17' 45''.$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ радиана} \approx 0{,}017453 \text{ радиана}.$$

Углы в градусах	φ°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Углы в радианах	$\frac{\pi}{180^\circ} \cdot \varphi^\circ$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π

Значения тригонометрических функций некоторых углов

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	0	–
$\operatorname{ctg}\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	–	0

Основные тригонометрические тождества

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1; \qquad \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1;$$
$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}; \qquad 1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Формулы суммы и разности аргументов

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y;$$
$$\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y;$$
$$\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}.$$

Формулы двойного и тройного аргументов

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1;$$
$$\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x;$$
$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}; \qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2};$$
$$^*\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x; \qquad ^*\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x;$$
$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}; \qquad ^*\operatorname{tg} 3x = \frac{3\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3\operatorname{tg}^2 x}.$$

Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного угла

Если $x \neq \pi + 2\pi k,\ k \in Z$, то

$$^{*}\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}};\qquad ^{*}\cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}.$$

Преобразование суммы и разности тригонометрических функций в произведение

$$\sin x \pm \sin y = 2\cdot\sin\frac{x\pm y}{2}\cdot\cos\frac{x\mp y}{2};$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2};$$

$$\cos x - \cos y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\sin\frac{y-x}{2};$$

$$^{*}\sin x + \cos y = 2\sin\left(\frac{x-y}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\left(\frac{x+y}{2}-\frac{\pi}{4}\right);$$

$$^{*}\sin x - \cos y = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\left(\frac{x-y}{2}+\frac{\pi}{4}\right);$$

$$^{*}\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x\pm y)}{\cos x\cdot\cos y};$$

$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\cdot\sin(x+\varphi)$, где $a^2+b^2 \neq 0$, а φ определяется из формулы $\sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $\cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$;

$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\cdot\cos(x-\alpha)$, где $a^2+b^2 \neq 0$, а α определяется из формулы $\sin\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $\cos\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму

$$\sin x\cdot\sin y = \frac{1}{2}\bigl(\cos(x-y)-\cos(x+y)\bigr);$$

$$\cos x\cdot\cos y = \frac{1}{2}\bigl(\cos(x-y)+\cos(x+y)\bigr);$$

$$\sin x\cdot\cos y = \frac{1}{2}\bigl(\sin(x-y)+\sin(x+y)\bigr).$$

Определение обратных тригонометрических функций

$y \overset{\text{def}}{=} \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y$ и $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$;

$y \overset{\text{def}}{=} \arccos x \Leftrightarrow x = \cos y$ и $0 \leqslant y \leqslant \pi$;

$y \overset{\text{def}}{=} \operatorname{arctg} x \Leftrightarrow x = \operatorname{tg} y$ и $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$;

$y \overset{\text{def}}{=} \operatorname{arcctg} x \Leftrightarrow x = \operatorname{ctg} y$ и $0 < y < \pi$.

***Свойства обратных тригонометрических функций**

$D(\arcsin x) = [-1; 1]$; $E(\arcsin x) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;

$D(\arccos x) = [-1; 1]$; $E(\arccos x) = [0; \pi]$;

$D(\operatorname{arctg} x) = R$; $E(\operatorname{arctg} x) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$;

$D(\operatorname{arcctg} x) = R$; $E(\operatorname{arcctg} x) = \Big(0; \pi\Big)$;

$\arcsin(-x) = -\arcsin x$; $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$;

$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$; $\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$;

$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, если $x \in [-1; 1]$;

$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$;

$\sin(\arcsin x) = x$, если $x \in [-1; 1]$;

$\arcsin(\sin x) = x_0$, где $x_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ и $\sin x_0 = \sin x$;

$\cos(\arccos x) = x$, если $x \in [-1; 1]$;

$\arccos(\cos x) = x_0$, где $x_0 \in [0; \pi]$ и $\cos x_0 = \cos x$;

$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$, $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x$;

$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x_0$, где $x_0 = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ и $\operatorname{tg} x_0 = \operatorname{tg} x$;

$\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} x) = x_0$, где $x_0 \in (0; \pi)$ и $\operatorname{ctg} x_0 = \operatorname{ctg} x$.

$\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$; $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$;

$\sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$; $\cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$;

$\sin(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$; $\cos(\operatorname{arcctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$.

Некоторые значения обратных тригонометрических функций

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	-1
$\arcsin x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$
$\arccos x$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0	π

x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{arctg} x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\operatorname{arcctg} x$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

Формулы для решения простейших тригонометрических уравнений

$\sin x = a; \quad |a| \leqslant 1; x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \ n \in Z;$

$\sin x = 0; \quad x = \pi k; k \in Z;$

$\sin x = 1; \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k; k \in Z;$

$\sin x = -1; x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k; k \in Z;$

$\cos x = a; |a| \leqslant 1; \ x = \pm \arccos a + 2\pi n, \ n \in Z;$

$\cos x = 0; \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi k; k \in Z;$

$\cos x = 1; \quad x = 2\pi k; k \in Z;$

$\cos x = -1; x = \pi + 2\pi k; k \in Z;$

$\operatorname{tg} x = a; \quad x = \operatorname{arctg} a + \pi n; n \in Z;$

$\operatorname{ctg} x = a; \quad x = \operatorname{arcctg} a + \pi n; n \in Z.$

§ 8. Многочлены и их корни

Определение многочлена

Многочленом степени n ($n \in N_0$) называется всякое выражение вида

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

где $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in R$ и $a_n \neq 0$.

Всякое вещественное число, отличное от нуля, принято трактовать как многочлен нулевой степени. Числа $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ называются коэффициентами многочлена, a_n — старший коэффициент, a_0 — свободный член.

Число x_0 называется корнем многочлена $f(x)$, если $f(x_0) = 0$.

Квадратный трёхчлен

Квадратный трёхчлен — это многочлен степени 2:

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Если x_1, x_2 — корни $f(x)$, то $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$;

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2);$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a} \ \textbf{(Теорема Виета)}.$$

Если второй коэффициент делится на 2, то есть

$f(x) = ax^2 + 2kx + c$, то $x_{1,2} = \dfrac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}$.

Если старший коэффициент равен 1, то есть $f(x) = x^2 + px + q$,

то $x_{1,2} = -\dfrac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{p}{2}\right)^2 - q}$.

Выражение $b^2 - 4ac$ называется дискриминантом соответствующего многочлена $f(x)$ (уравнения $f(x) = 0$). Дискриминант принято обозначать большой буквой D. Отметим, что $D = 0 \Leftrightarrow k^2 - ac = 0 \Leftrightarrow \left(\dfrac{p}{2}\right)^2 - q = 0$.

***Теорема Безу и схема Горнера**

Для любого многочлена степени $n > 0$

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

и любого числа $x_0 \in R$ найдётся такой многочлен степени $n - 1$

$$q(x) = b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0,$$

что справедливо равенство

$$f(x) = (x - x_0)\, q(x) + f(x_0) \quad \textbf{(Теорема Безу)},$$

причём коэффициенты $q(x)$ могут быть вычислены по следующему алгоритму:

$$b_{n-1} = a_n, \ \ b_{n-2} = x_0 b_{n-1} + a_{n-1},$$
$$b_{n-3} = x_0 b_{n-2} + a_{n-2}, \ldots, \ b_{i-1} = x_0 b_i + a_i, \ldots$$
$$\ldots, \ b_1 = x_0 b_2 + a_2, \ b_0 = x_0 b_1 + a_1, \ f(x_0) = x_0 b_0 + a_0.$$

Результаты вычисления коэффициентов многочлена $q(x)$ удобно помещать в таблицу **(схему Горнера)**.

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\cdots$	a_{i+1}	a_i	$\cdots$	a_2	a_1	a_0
x_0	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	$\cdots$	b_i	b_{i-1}	$\cdots$	b_1	b_0	$f(x_0)$

Понятно, что если x_0 — корень многочлена $f(x)$, то $f(x_0) = 0$ и, следовательно,

$$f(x) = (x - x_0)\,q(x) \quad \textbf{(следствие из теоремы Безу).}$$

Таким образом, чтобы выяснить, является ли число x_0 корнем многочлена $f(x)$, нужно заполнить приведённую выше таблицу (схему Горнера). Если $f(x_0)$ окажется равным 0, то x_0 — корень. В противном случае x_0 не корень $f(x)$.

Приведём ещё одну теорему о многочленах и следствие из неё, касающееся рациональных корней многочлена.

Теорема. Пусть $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ — многочлен с целыми коэффициентами. Если несократимая дробь (рациональное число) p/q является корнем многочлена $f(x)$, то

1) $a_n \vdots q$;

2) $a_0 \vdots p$.

Следствие. Пусть $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ — многочлен с целыми коэффициентами. Тогда все рациональные корни многочлена $f(x)$ являются целыми и являются делителями свободного члена a_0.

Эти теоремы будут очень полезными при выполнении некоторых заданий части B и части C, их использование существенно экономит время решения.

Пример 1. Найдите целые корни уравнения $x^4 + 3x^3 + x^2 - 3x - 2 = 0$.

Решение. По следствию целые корни находятся среди делителей свободного члена: ± 1; ± 2. Проверяем по схеме Горнера каждое из этих чисел.

	1	3	1	−3	−2	
1	1	4	5	2	0	корень
1	1	5	10	12		не корень (не кратный корень)
−1	1	3	2	0		корень
−1	1	2	0			корень (кратности 2)

$x^4 + 3x^3 + x^2 - 3x - 2 = (x - 1)(x + 1)^2(x + 2)$.

Данное уравнение имеет 3 корня: 1; −1; −2, причём −1 — корень кратности 2.

Пример 2. Решите уравнение $6x^4 + 17x^3 + 20x^2 + 14x + 3 = 0$.

Решение. По теореме все рациональные корни уравнения находятся среди чисел $\frac{p}{q}$, где $6 \vdots q$, $3 \vdots p$.

Делители 3: ± 1; ± 3.

Делители 6: ± 1; ± 2; ± 3; ± 6.

Числа вида $\frac{p}{q}$: ± 1; $\pm\frac{1}{2}$; $\pm\frac{1}{3}$; $\pm\frac{1}{6}$; ± 3; $\pm\frac{3}{2}$.

Видим, что корнями могут быть лишь отрицательные числа. Поэтому проверяем числа -1; $-\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{6}$; -3; $-\frac{3}{2}$.

	6	17	20	14	3	
-1	6	11	9	5	-2	не корень
$-\frac{1}{2}$	6	14	13	$\frac{15}{2}$		не корень
$-\frac{1}{3}$	6	15	15	9	0	корень

Данное уравнение эквивалентно $\left(x + \frac{1}{3}\right)(6x^3 + 15x^2 + 15x + 9) = 0$.

$x_1 = -\frac{1}{3}$; $2x^3 + 5x^2 + 5x + 3 = 0$.

Делители 3: ± 1; ± 3.

Делители 2: ± 1; ± 2.

Числа вида $\frac{p}{q}$: ± 1; $\pm\frac{1}{2}$; ± 3; $\pm\frac{3}{2}$.

Корнями могут быть лишь отрицательные числа, причём -1 и $-\frac{1}{2}$ не являются корнями (проверили выше).

Проверяем числа -3; $-\frac{3}{2}$.

	2	5	5	3	
-3	2	-1	8	-21	не корень
$-\frac{3}{2}$	2	2	2	0	корень

Данное уравнение эквивалентно $\left(x+\frac{3}{2}\right)(2x^2+2x+2)=0$, $x_2=-\frac{3}{2}$, $x^2+x+1=0$ — корней нет.

Ответ: $-\frac{1}{3}$; $-\frac{3}{2}$.

§ 9. Уравнения

Уравнения с одним неизвестным

Напомним, что *уравнением* называется равенство, содержащее неизвестное, обозначаемое буквой. Пользуясь понятием функции, можно сказать, что *уравнение* (с одним неизвестным) — это пара функций от одной и той же переменной x, соединённых знаком равенства

$$f(x)=g(x).$$

Областью допустимых значений (ОДЗ) данного уравнения называется пересечение области определения функций $f(x)$ и $g(x)$

$$D(f)\cap D(g).$$

Число a называется *корнем (или решением)* данного уравнения, если при подстановке в уравнение вместо каждого вхождения x числа a уравнение обращается в верное числовое равенство $f(a)=g(a)$.

Существуют эквивалентные определения корня уравнения, в которых требуется принадлежность числа a ОДЗ исходного уравнения.

Решить уравнение — это значит найти все его корни или доказать, что данное уравнение корней не имеет. Отметим, что если мы нашли подбором какие-то корни уравнения и доказали, что других корней у данного уравнения быть не может, то тем самым мы уравнение решили.

Два уравнения называются *равносильными,* если множества их корней совпадают. Уравнение A является *следствием* уравнения B, если все корни уравнения B являются корнями уравнения A (но, быть может, среди корней уравнения A есть такие, которые не являются корнями B).

Преобразование уравнения называется *равносильным,* если преобразуемое уравнение равносильно исходному.

1. Если при решении уравнения вы производили лишь равносильные преобразования, то для найденных корней нет нужды делать проверку.

2. Если вы нашли ОДЗ и в пределах ОДЗ производили равносильные преобразования уравнения, то проверку также делать не нужно, но необходимо выяснить, входят ли найденные корни в ОДЗ.

3. Если не все преобразования были равносильными, но каждое уравнение было следствием предыдущего, то необходимо сделать проверку.

Отметим, что очень часто находить ОДЗ нецелесообразно, если экономнее (по времени) найти «корни» (среди которых, быть может, есть лишние) и сделать проверку.

Всё сказанное в отношении проверки справедливо с чисто математической точки зрения. То есть, если все ваши преобразования были равносильны, то приводить в конце решения проверку нет необходимости. И в этом случае (при наличии соответствующей оговорки) ваше решение будет смотреться более грамотным с точки зрения математики.

Но совсем иное дело, если речь идёт о самоконтроле. Здесь мы рекомендуем делать в некоторых случаях не одну, а несколько проверок.

*Полезные неравенства

Отметим, что при решении уравнений (и неравенств) иногда бывают полезны следующие неравенства, истинные для $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$:

$$a \leqslant \frac{a^2+1}{2}; \quad \frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}; \quad \frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Равенства достигаются при $a = b$ (в первом случае при $a = 1$).

Полезны также некоторые их следствия:

$$a + \frac{1}{a} \geqslant 2 \text{ при } a > 0; \quad a + \frac{1}{a} \leqslant -2 \text{ при } a < 0.$$

Равенства достигаются при $a = 1$ в первом случае и при $a = -1$ во втором.

Системы уравнений с двумя неизвестными

Уравнением с двумя неизвестными x и y называется пара функций от двух переменных (x и y), соединённых знаком равенства

$$f(x, y) = g(x, y).$$

Решением такого уравнения называется всякая пара чисел (x_0, y_0), подстановка которых в уравнение вместо соответствующих неизвестных обращает это уравнение в верное числовое равенство.

Системой двух уравнений с двумя неизвестными называется пара уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} f(x, y) = g(x, y), \\ h(x, y) = t(x, y). \end{cases}$$

Решением системы называется всякая пара чисел (x_0, y_0), являющаяся решением и первого, и второго уравнений системы.

Решить систему — это значит найти все её решения или доказать, что система решений не имеет.

Системы линейных уравнений

Пусть дана система $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$

1. Система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$.

2. Система имеет бесконечное множество решений тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} a_1b_2 - a_2b_1 = 0, \\ a_1c_2 - a_2c_1 = 0, \\ b_1c_2 - b_2c_1 = 0. \end{cases}$$

3. Система не имеет решений тогда и только тогда, когда $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, но $a_1c_2 - a_2c_1 \neq 0$ или $b_1c_2 - b_2c_1 \neq 0$.

§ 10. Неравенства

Неравенства и системы неравенств

Неравенством с одним неизвестным называется пара функций от одной и той же переменной, соединённая одним из знаков: $>$, $\geqslant$, $<$, $\leqslant$, $\neq$.

Решением неравенства (системы неравенств) называется всякое действительное число, подстановка которого в неравенство (каждое неравенство системы) вместо каждого вхождения неизвестного (переменной) обращает это неравенство (все неравенства системы) в верное числовое неравенство (верные числовые неравенства).

Решить неравенство (систему неравенств) — значит найти множество всех решений этого неравенства (этой системы неравенств) или доказать, что оно (она) решений не имеет. Два неравенства (две системы неравенств) называются *равносильными,* если множества их решений совпадают. Соответственно, преобразования неравенства называются *равносильными*, если при этих преобразованиях множество решений полученного неравенства совпадает с множеством решений исходного неравенства.

Отметим, что проверка правильности всех найденных решений неравенства подстановкой в исходные неравенства в подавляющем большинстве случаев невозможна. Поэтому при решении неравенств (систем неравенств) нужно пользоваться равносильными преобразованиями (равносильными преобразованиями в рамках ОДЗ). Нахождение ОДЗ не обязательно, если вы пользуетесь исключительно равносильными преобразованиями. В противном случае нахождение ОДЗ обязательно. При этом возможны два подхода к оформлению решения:

1. ОДЗ в виде неравенства или системы неравенств присоединяют к данному неравенству (данной системе) и полученную систему решают.

2. Находят ОДЗ. Решают данное неравенство (систему неравенств), пользуясь лишь равносильными преобразованиями в рамках ОДЗ. Из полученных решений удаляют те, которые не входят в ОДЗ.

Объединение неравенств

Отметим также, что очень часто решениями данного неравенства (системы неравенств) является объединение решений двух или более неравенств (систем неравенств). В таких случаях мы будем употреблять запись вида $\left[\begin{array}{l} f(x) \geqslant g(x), \\ h(x) < u(x). \end{array}\right.$

Эту запись будем называть *объединением* неравенств. Решением объединения двух неравенств является всякое число, являющееся решением хотя бы одного из двух неравенств объединения. Иначе говоря, для решения объединения нужно найти множества всех решений первого и второго неравенств и найденные множества объединить.

Рациональные неравенства

Рациональным называется всякое неравенство, сводящееся к неравенству вида $\dfrac{P(x)}{Q(x)} > 0$ или вида $\dfrac{P(x)}{Q(x)} \geqslant 0$, где $P(x)$, $Q(x)$ — некоторые многочлены.

Поскольку $\dfrac{P(x)}{Q(x)} > 0 \Leftrightarrow P(x) \cdot Q(x) > 0,$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \geqslant 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} P(x) \cdot Q(x) \geqslant 0, \\ Q(x) \neq 0, \end{array}\right.$$

то для решения рациональных неравенств удобно применять метод интервалов.

Пример. Решите неравенство $\dfrac{x^2 - 7x + 10}{x - 3} + \dfrac{6x - 9}{x + 1} \leqslant 1.$

Решение. $\dfrac{x^2 - 7x + 10}{x - 3} + \dfrac{6x - 9}{x + 1} - 1 \leqslant 0,$

$$\frac{(x^2 - 7x + 10)(x + 1) + (6x - 9)(x - 3) - (x - 3) \cdot (x + 1)}{(x - 3)(x + 1)} \leqslant 0,$$

$\dfrac{x^3 - x^2 - 22x + 40}{(x-3)\cdot(x+1)} \leqslant 0$. Числитель последней дроби разложим на множители. Подбором находим, что $x = 2$ является корнем многочлена $x^3 - x^2 - 22x + 40$; разделив данный многочлен (уголком или по схеме Горнера) на $x - 2$, получаем $x^3 - x^2 - 22x + 40 = (x-2)\cdot(x^2 + x - 20) = (x-2)\cdot(x-4)\cdot(x+5)$. Значит, исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} (x-2)\cdot(x-4)\cdot(x+5)\cdot(x-3)\cdot(x+1) \leqslant 0, \\ (x-3)\cdot(x+1) \neq 0. \end{cases}$$

Решая первое неравенство этой системы методом интервалов (см. рис. 1) и выкалывая точки $x = -1$, $x = 3$, получаем ответ

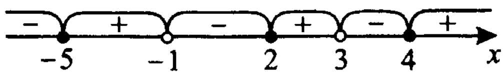


Рис. 1.

$x \in (-\infty; -5] \cup (-1; 2] \cup (3; 4]$.

§ 11. Функции

Область определения функции

Областью определения $D(y)$ *функции* $y = f(x)$ называется множество всех значений аргумента x, для которых выражение $f(x)$ определено (имеет смысл). Например, рассматривается функция $y = \sin x$ на отрезке $[0;\ \pi]$. В данном случае $D(y) = [0;\ \pi]$, так как данной фразой функция $y = \sin x$ определена лишь на отрезке $[0;\ \pi]$. Если же рассматривается функция $y = \sin x$ без каких-либо оговорок, то это означает, что $D(y) = R$. В этом случае говорят также, что функция $y = \sin x$ определена на всей числовой прямой. С другой стороны, пусть рассматривается функция $y = \dfrac{\sqrt{x-1}}{x^2-4}$. В данной фразе также нет каких-либо оговорок относительно того, на каком числовом промежутке рассматривается функция. Вместе с тем мы видим, что эта функция не определена для $x < 1$, так как при $x < 1$ под корнем будет отрицательное число. Эта функция также не определена при $x = \pm 2$, так как при $x = \pm 2$ знаменатель обращается в нуль. Таким образом, для данной функции $D(y) = [1;\ 2) \cup (2;\ +\infty)$.

Напомним области определения основных элементарных функций. Область определения любого многочлена — R.

$D\left(\frac{1}{x}\right) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$. $D\left(\sqrt[2k]{x}\right) = [0;\ +\infty)$.

$D\left(\sqrt[2k+1]{x}\right) = R$. $D(\log_a x) = (0;\ +\infty)$.

$D(\sin x) = D(\cos x) = R$. $D(a^x) = R$.

$^*D(\arcsin x) = D(\arccos x) = [-1;\ 1]$.

$^*D(\mathrm{arctg}\, x) = D(\mathrm{arcctg}\, x) = R$.

$D(\mathrm{tg}\, x) = \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) \cup \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ \frac{3}{2}\pi + 2\pi k\right),\ k \in Z$.

Или $D(\mathrm{tg}\, x):\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in Z$.

$D(\mathrm{ctg}\, x) = (2\pi k; \pi + 2\pi k) \cup (\pi + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k), \quad k \in Z$.

Или $D(\mathrm{ctg}\, x):\ x \neq \pi k, \quad k \in Z$.

Множество значений функции

Множеством (областью) значений $E(y)$ *функции* $y = f(x)$ называется множество всех таких чисел y_0, для каждого из которых найдётся такое число x_0, что $f(x_0) = y_0$.

Напомним области значений основных элементарных функций.

Областью значений всякого многочлена чётной степени является промежуток $[m;\ +\infty)$, где m — наименьшее значение этого многочлена, либо промежуток $[-\infty;\ n]$, где n — наибольшее значение этого многочлена.

Областью значений всякого многочлена нечётной степени является R.

$E\left(\frac{1}{x}\right) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$. $E\left(\sqrt[2k]{x}\right) = [0;\ +\infty)$.

$E\left(\sqrt[2k+1]{x}\right) = R$. $E(a^x) = (0;\ +\infty)$.

$E(\log_a x) = R$. $E(\sin x) = E(\cos x) = [-1;\ 1]$.

$^*E(\arcsin x) = \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$. $^*E(\arccos x) = [0;\ \pi]$.

$E(\mathrm{tg}\, x) = E(\mathrm{ctg}\, x) = R$. $^*E(\mathrm{arctg}\, x) = \left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$.

$^*E(\mathrm{arcctg}\, x) = (0;\ \pi)$.

Отметим, что задания на нахождение множества значений какой-то функции решаются преимущественно двумя методами: аналитическим и алгебраическим.

Приведём одно *замечание*. Предположим, что функция $f(x)$ является сложной функцией, в которой можно выделить «подфункцию» $t = t(x)$. Тогда $y = f(t) = f\big(t(x)\big)$. Отметим, что неважно, какой является функция $t = t(x)$ (возрастающей, возрастающе-убывающей и т. д.). Если нам известна её область значений $E(t)$, то при нахождении области значений функции $y = f(t) = f\big(t(x)\big)$ целесообразно считать, что t возрастает на $E(t)$ как какой-то новый аргумент. В соответствии с этим функцию $y = f(t)$ целесообразно считать такой, каковой она является от аргумента t на промежутке $E(t)$. Например, пусть нам дана функция $y = 2\cos x + 1$. Вводим новую переменную $t(x) = \cos x$. Понятно, что $E(t) = [-1;\ 1]$. Тогда функцию $y(t) = 2t + 1$ целесообразно считать линейной на промежутке $[-1;\ 1]$. Это никак не повлияет на нахождение $E(y)$, но, напротив, облегчит нам эту процедуру. Находим $E(y)$. Функция $y(t) = 2t + 1$ на промежутке $[-1;\ 1]$ является линейной и возрастающей, поэтому $E(y) = [2(-1) + 1;\ 2 \cdot 1 + 1] = [-1;\ 3]$.

При решении задач аналитическим методом будем пользоваться следующими фактами.

1. Пусть $f(x)$ — какая-то функция и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, где a — какое-то число, или $a = +\infty$, или $a = -\infty$. Тогда $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = 0$, причём при значениях x, достаточно близких к a, величина $\dfrac{1}{f(x)}$ будет достаточно близкой к нулю, но вместе с тем больше нуля. В этом случае мы будем говорить, что величина $\dfrac{1}{f(x)}$ стремится к нулю справа при x, стремящемся к a: $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = +0$. В этом смысле будем употреблять запись $\dfrac{1}{+\infty} = +0$.

2. В аналогичном смысле будем употреблять также запись вида $\dfrac{1}{-\infty} = -0$.

3. Пусть теперь $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, причём при всех x, достаточно близких к a, функция $f(x) > 0$. Тогда $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$. Этот факт мы будем записывать иногда в виде $\dfrac{1}{+0} = +\infty$.

4. В подобном же смысле мы будем употреблять запись $\dfrac{1}{-0} = -\infty$.

5. Ниже мы приводим записи, которые будем в дальнейшем использовать, но понимать эти записи следует не в буквальном смысле. Фактический смысл этих записей вам предлагается привести самим.

$$a^{+\infty} = \begin{cases} +\infty \text{ при } a > 1, \\ +0 \text{ при } 0 < a < 1; \end{cases} \qquad a^{-\infty} = \begin{cases} +0 \text{ при } a > 1, \\ +\infty \text{ при } 0 < a < 1; \end{cases}$$

$$\log_a(+0) = \begin{cases} -\infty \text{ при } a > 1, \\ +\infty \text{ при } 0 < a < 1; \end{cases} \qquad \log_a(+\infty) = \begin{cases} +\infty \text{ при } a > 1, \\ -\infty \text{ при } 0 < a < 1. \end{cases}$$

Чётность и нечётность функции

Функция $y = f(x)$ называется *чётной*, если для любого $x \in D(f)$ верно равенство $f(-x) = f(x)$. График чётной функции симметричен относительно оси Oy.

Функция $y = f(x)$ называется *нечётной*, если для любого $x \in D(f)$ верно равенство $f(-x) = -f(x)$. График нечётной функции симметричен относительно начала координат.

Графики элементарных функций. На рисунках 2 – 7 изображены графики основных элементарных функций.

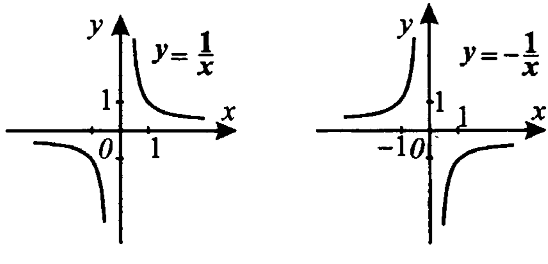


Рис. 2.

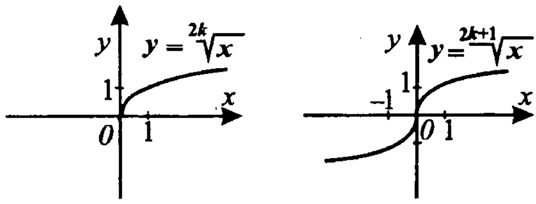


Рис. 3.

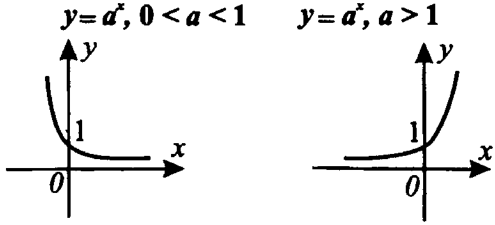


Рис. 4.

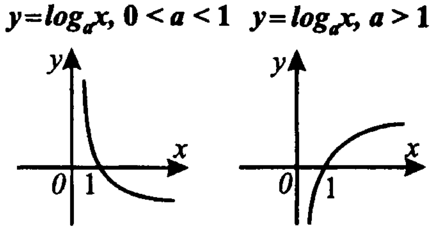


Рис. 5.

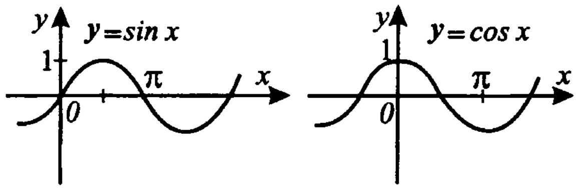


Рис. 6.

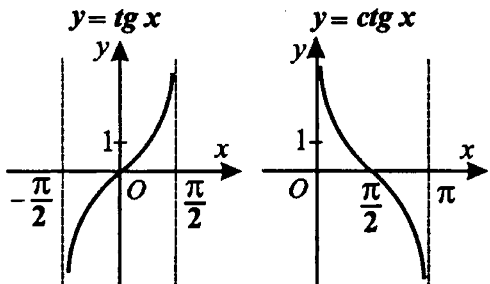


Рис. 7.

Построение графиков функций «механическими» преобразованиями

График функции $y=-f(x)$ получен из графика функции $y=f(x)$ отражением относительно оси Ox (см. рис. 8).

График функции $y=f(-x)$ получен из графика функции $y=f(x)$ отражением относительно оси Oy (см. рис. 9).

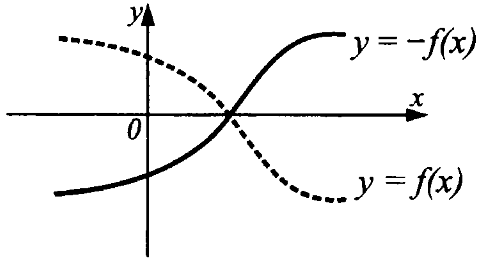


Рис. 8.

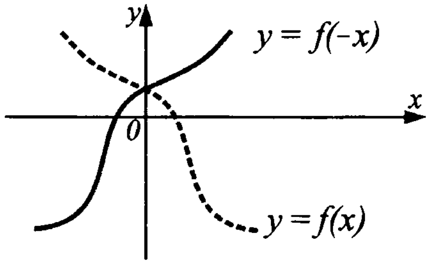


Рис. 9.

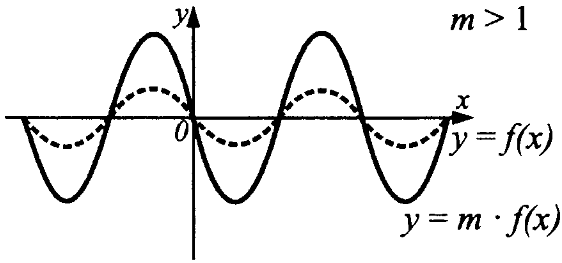


Рис. 10.

График функции $y = m \cdot f(x)$, $m > 1$, получен из графика функции $y = f(x)$ растяжением в m раз вдоль оси Oy от оси Ox (см. рис. 10).

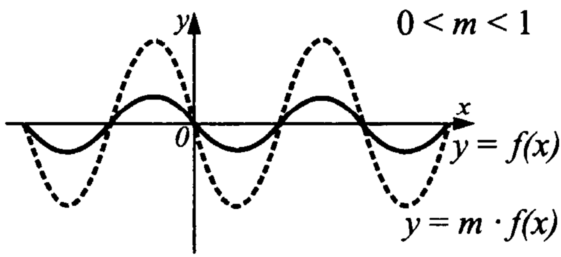


Рис. 11.

График функции $y = m \cdot f(x)$, $0 < m < 1$, получен из графика функции $y = f(x)$ сжатием в $\dfrac{1}{m}$ раз вдоль оси Oy к оси Ox (см. рис. 11).

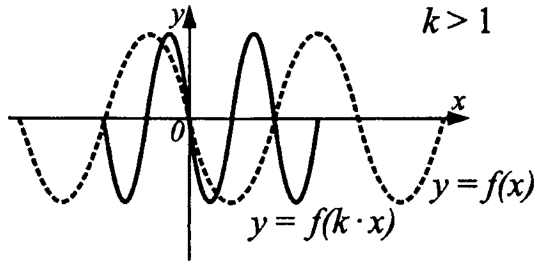


Рис. 12.

График функции $y = f(kx)$, $k > 1$, получен из графика функции $y = f(x)$ сжатием в k раз к оси Oy вдоль оси Ox (см. рис. 12).

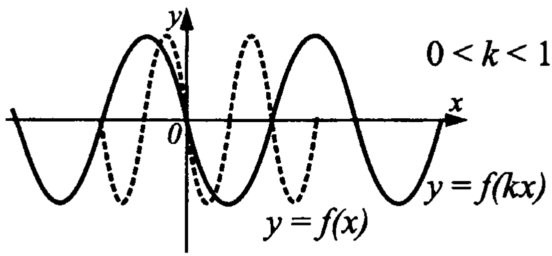


Рис. 13.

График функции $y = f(kx)$, $0 < k < 1$, получен из графика функции $y = f(x)$ растяжением в $\dfrac{1}{k}$ раз от оси Oy вдоль оси Ox (см. рис. 13).

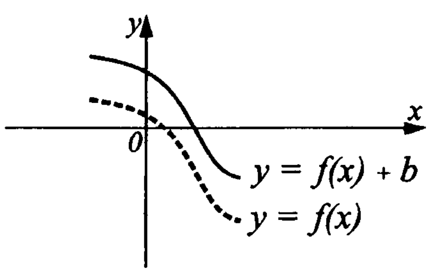


Рис. 14.

График функции $y = f(x) + b$ получен из графика функции $y = f(x)$ сдвигом вверх на число b при $b > 0$ и сдвигом вниз на число $(-b)$ при $b < 0$ (см. рис. 14).

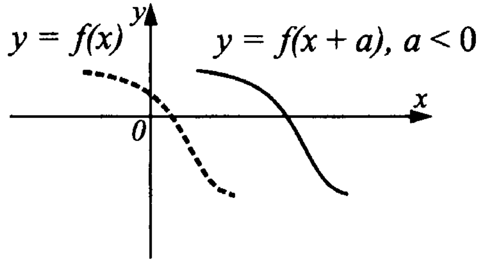


Рис. 15.

График функции $y = f(x + a)$ получен из графика функции $y = f(x)$ сдвигом вправо на число $-a$ при $a < 0$ и сдвигом влево на число a при $a > 0$ (см. рис. 15).

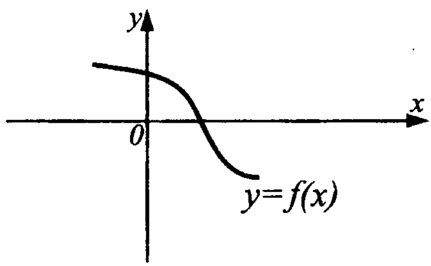


Рис. 16.

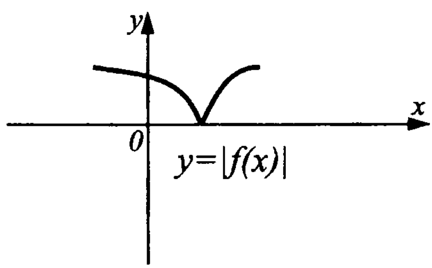


Рис. 17.

График функции $y = |f(x)|$ (рис. 17) получен из графика функции $y = f(x)$ (рис. 16) отражением относительно оси Ox части этого графика, лежащей ниже оси Ox.

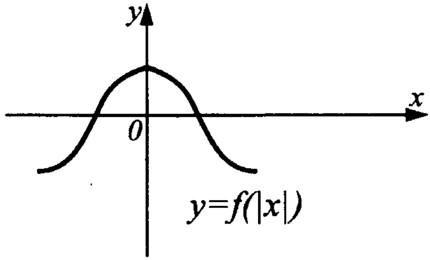


Рис. 18.

График функции $y = f(|x|)$ (см. рис. 18) получен из графика функции $y = f(x)$ (см. рис. 16) объединением части этого графика, лежащей правее оси Oy, с её отражением относительно оси Oy и удалением части, лежащей левее оси Oy.

Определение производной

Пусть функция $y = f(x)$ определена в точке x и некоторой её окрестности (интервале, содержащем точку x). Дадим аргументу x приращение Δx (положительное или отрицательное), такое, чтобы не выйти из указанной окрестности. Найдём соответствующее приращение функции $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ и составим отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Если существует предел этого отношения при $\Delta x \to 0$, то этот предел называется производной функции $y = f(x)$ в точке x и обозначается $f'(x)$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Таблица производных основных элементарных функций

$(c)' = 0$ (c — const);	$(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$ (α — const);
$(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$;	$\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$;
$(\sin x)' = \cos x$;	$(\cos x)' = -\sin x$;
$(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;	$(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;
$(a^x)' = a^x \ln a$;	$(e^x)' = e^x$;
$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$;	$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$;

3. Зак. № 270

$^*(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $^*(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

$^*(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$; $^*(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

Основные правила дифференцирования

$(c \cdot u)' = c \cdot u'$, c — const; $(u \pm v)' = u' \pm v'$;

$(uv)' = u'v + uv'$; $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$;

$y = f\big(g(x)\big)$, $y' = f'_u(u) \cdot g'_x(x)$, где $u = g(x)$.

Отметим, что справедливо следующее свойство:

если функция $f(x)$ чётна (нечётна) и дифференцируема на всей области определения, то функция $f'(x)$ является нечётной (чётной).

Геометрический смысл производной

$f'(x_0)$ является угловым коэффициентом касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0. Напомним, что угловой коэффициент прямой равен тангенсу угла, образованного этой прямой с положительным направлением оси Ox. Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Механический смысл производной

Пусть $S = S(t)$ — уравнение зависимости пути от времени при движении какого-либо тела. Тогда $S'(t)$ — скорость движения этого тела в момент времени t. $S''(t)$ — ускорение движущегося тела в момент времени t.

Возрастание и убывание функции

Функция $y = f(x)$ *возрастает (убывает)* на множестве A, если для любых $x_1, x_2 \in A$, таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$.

Замечание. Если функция возрастает (убывает) на двух промежутках, из этого ещё не следует, что она возрастает (убывает) на объединении этих промежутков. Например, функция $y = \dfrac{1}{x}$ убывает на промежутках $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$, но она не является убывающей на области определения.

Если на каком-то промежутке функция $y = f(x)$ возрастает (убывает) и дифференцируема на этом промежутке, то $f'(x) \geqslant 0$ $(f'(x) \leqslant 0)$, причём равенство нулю невозможно на промежутке ненулевой длины.

Верно и обратное утверждение, которое мы сформулируем в частном случае. Именно, если на каком-то промежутке $f'(x) \geqslant 0$ $\big(f'(x) \leqslant 0\big)$, причём равенство $f'(x) = 0$ достигается лишь в конечном числе точек этого промежутка, то функция $y = f(x)$ на этом промежутке возрастает (убывает). Отсюда следует, что если производная в точке x_0 меняет знак с «+» на «−» (с «−» на «+»), то функция $y = f(x)$ в этой точке меняет возрастание на убывание (убывание на возрастание). А это значит, что функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 максимум (минимум).

Предлагаем доказать самостоятельно, что для сложной функции $f\big(g(x)\big)$ двух непрерывных функций $f(x)$ и $g(x)$ справедлива данная ниже табличка, в которой «+» означает возрастание функции, а «−» — убывание.

$f(x)$	+	+	−	−
$g(x)$	+	−	+	−
$f\big(g(x)\big)$	+	−	−	+

Наибольшее и наименьшее значения функции

Значение $f(x_0)$ функции $f(x)$ в точке x_0 называется ***наибольшим (наименьшим)*** значением этой функции, если для любого x из $D(f)$ выполняется неравенство

$$f(x_0) \geqslant f(x) \quad \big(f(x_0) \leqslant f(x)\big).$$

Справедлива следующая теорема.

Дифференцируемая на $(a; b)$ и непрерывная на $[a; b]$ функция $y = f(x)$ достигает своего наибольшего (наименьшего) значения на границе отрезка $[a; b]$ или в одной из стационарных точек на интервале $(a; b)$.

В частности, если функция удовлетворяет условиям теоремы и имеет единственную критическую точку, которая является точкой максимума (минимума), то в ней достигается наибольшее (наименьшее) значение.

Применение свойств функций при решении уравнений

Рассмотрим уравнение $f(x) = g(x)$.

1. Пусть на ОДЗ уравнения функция $f(x)$ возрастает, а $g(x)$ убывает. Тогда уравнение не может иметь более одного корня.

2. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a; b]$ и выполняются неравенства $f(a) > g(a)$, $f(b) < g(b)$. Тогда уравнение имеет по крайней мере один корень на интервале $(a; b)$.

4. Зак. № 270

3. Пусть число A является наибольшим значением функции $f(x)$ и наименьшим значением функции $g(x)$. Тогда исходное уравнение равносильно на ОДЗ системе уравнений $\begin{cases} f(x) = A, \\ g(x) = A. \end{cases}$

Первообразная

Пусть $f(x)$ — некоторая функция, заданная на некотором числовом промежутке A. Если функция $F(x)$ такова, что для любого x из промежутка A $F'(x) = f(x)$, то $F(x)$ называется *первообразной функцией* для функции $f(x)$ на промежутке A.

Отметим, что две первообразные для одной и той же функции отличаются на постоянную. И обратно, если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, то для любого c (c — const) функция $F(x) + c$ тоже первообразная для функции $f(x)$.

Приведём таблицу первообразных для основных элементарных функций. Буквой c везде обозначается произвольная постоянная.

$F(x^\alpha) = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c\ (\alpha \neq -1).$ $\qquad F\left(\dfrac{1}{x}\right) = \ln|x| + c.$

$F\left(\dfrac{1}{x}\right) = \ln x + c,\ \ x > 0.$ $\qquad F\left(\dfrac{1}{x}\right) = \ln(-x) + c,\ \ x < 0.$

$F(\sin x) = -\cos x + c.$ $\qquad F(\cos x) = \sin x + c.$

$F\left(\dfrac{1}{\cos^2 x}\right) = \operatorname{tg} x + c.$ $\qquad F\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}\right) = -\operatorname{ctg} x + c.$

$F(a^x) = \dfrac{a^x}{\ln a} + c.$ $\qquad F(e^x) = e^x + c.$

${}^*F\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right) = \operatorname{arctg} x + c.$ $\qquad {}^*F\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \arcsin x + c.$

Применение первообразной

Пусть функция $f(x)$ имеет первообразную на отрезке $[a;\ b]$, причём на этом отрезке $f(x) \geqslant 0$. Обозначим через S площадь фигуры (криволинейной трапеции), ограниченной графиком функции $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a$ и $x = b$. Тогда $S = F(b) - F(a)$, где $F(x)$ — одна из первообразных для $f(x)$.

§ 12. Планиметрия

Параллельные прямые

Свойства и признаки параллельных прямых

1. **Аксиома параллельных.** Через данную точку можно провести не более одной прямой, параллельной данной.

2. Если две прямые параллельны одной и той же прямой, то они параллельны между собой.

3. Две прямые, перпендикулярные одной и той же прямой, параллельны.

4. Если две параллельные прямые пересечь третьей, то образованные при этом внутренние накрест лежащие углы равны; соответственные углы равны; внутренние односторонние углы в сумме составляют 180°.

5. Если при пересечении двух прямых третьей образуются равные внутренние накрест лежащие углы, то прямые параллельны.

6. Если при пересечении двух прямых третьей образуются равные соответственные углы, то прямые параллельны.

7. Если при пересечении двух прямых третьей сумма внутренних односторонних углов равна 180°, то прямые параллельны.

Теорема Фалеса. Если на одной стороне угла отложить равные отрезки и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие вторую сторону угла, то на второй стороне угла отложатся также равные отрезки.

Теорема о пропорциональных отрезках. Параллельные прямые, пересекающие стороны угла, высекают на них пропорциональные отрезки.

Треугольник

Признаки равенства треугольников

1. Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то треугольники равны.

2. Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то треугольники равны.

3. Если три стороны одного треугольника соответственно равны трём сторонам другого треугольника, то треугольники равны.

Признаки равенства прямоугольных треугольников

1. По двум катетам.
2. По катету и гипотенузе.
3. По гипотенузе и острому углу.
4. По катету и острому углу.

Теорема о сумме углов треугольника и следствия из неё

1. Сумма внутренних углов треугольника равна 180°.
2. Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних не смежных с ним углов.
3. Сумма внутренних углов выпуклого n-угольника равна $180°(n-2)$.
4. Сумма внешних углов n-угольника равна 360°.
5. Углы со взаимно перпендикулярными сторонами равны, если они оба острые или оба тупые.
6. Угол между биссектрисами смежных углов равен 90°.
7. Биссектрисы внутренних односторонних углов при параллельных прямых и секущей перпендикулярны.

Основные свойства и признаки равнобедренного треугольника

1. Углы при основании равнобедренного треугольника равны.
2. Если два угла треугольника равны, то он равнобедренный.
3. В равнобедренном треугольнике медиана, биссектриса и высота, проведённые к основанию, совпадают.
4. Если в треугольнике совпадает любая пара отрезков из тройки: медиана, биссектриса, высота, — то он является равнобедренным.

Неравенство треугольника и следствия из него

1. Сумма двух сторон треугольника больше его третьей стороны.
2. Сумма звеньев ломаной больше отрезка, соединяющего начало первого звена с концом последнего.
3. Против большего угла треугольника лежит бóльшая сторона.
4. Против большей стороны треугольника лежит бóльший угол.
5. Гипотенуза прямоугольного треугольника больше катета.
6. Если из одной точки проведены к прямой перпендикуляр и наклонные, то
   1) перпендикуляр короче наклонных;
   2) большей наклонной соответствует бóльшая проекция и наоборот.

Средняя линия треугольника. Отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника, называется средней линией треугольника.

Теорема о средней линии треугольника. Средняя линия треугольника параллельна стороне треугольника и равна её половине.

Теоремы о медианах треугольника

1. Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 2 : 1, считая от вершины.

2. Если медиана треугольника равна половине стороны, к которой она проведена, то треугольник прямоугольный.

3. Медиана прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы.

Свойство серединных перпендикуляров к сторонам треугольника. Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке, которая является центром окружности, описанной около треугольника.

Теорема о высотах треугольника. Прямые, содержащие высоты треугольника, пересекаются в одной точке.

Теорема о биссектрисах треугольника. Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, которая является центром окружности, вписанной в треугольник.

Свойство биссектрисы треугольника. Биссектриса треугольника делит его сторону на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам.

Признаки подобия треугольников

1. Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то треугольники подобны.

2. Если две стороны одного треугольника соответственно пропорциональны двум сторонам другого, а углы, заключённые между этими сторонами, равны, то треугольники подобны.

3. Если три стороны одного треугольника соответственно пропорциональны трём сторонам другого, то треугольники подобны.

Площади подобных треугольников

1. Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.

2. Если два треугольника имеют равные углы, то их площади относятся как произведения сторон, заключающих эти углы.

В прямоугольном треугольнике

1. Катет прямоугольного треугольника равен произведению гипотенузы на синус противолежащего или на косинус прилежащего к этому катету острого угла.

2. Катет прямоугольного треугольника равен другому катету, умноженному на тангенс противолежащего или на котангенс прилежащего к этому катету острого угла.

3. Катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы.

4. Если катет прямоугольного треугольника равен половине гипотенузы, то угол, противолежащий этому катету, равен 30°.

5. $R = \frac{c}{2}$; $r = \frac{a+b-c}{2} = p - c$, где a, b — катеты, а c — гипотенуза прямоугольного треугольника; r и R — радиусы вписанной и описанной окружностей соответственно.

Теорема Пифагора и теорема, обратная теореме Пифагора

1. Квадрат гипотенузы прямоугольного треугольника равен сумме квадратов катетов.

2. Если квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон, то треугольник прямоугольный.

Средние пропорциональные в прямоугольном треугольнике

Высота прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, есть среднее пропорциональное проекций катетов на гипотенузу, а каждый катет есть среднее пропорциональное гипотенузы и своей проекции на гипотенузу.

Метрические соотношения в треугольнике

1. **Теорема косинусов.** Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними.

2. **Следствие из теоремы косинусов.** Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.

3. **Формула для медианы треугольника.** Если m — медиана треугольника, проведённая к стороне c, то $m = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$, где a и b — остальные стороны треугольника.

4. **Теорема синусов.** Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов.

5. **Обобщённая теорема синусов.** Отношение стороны треугольника к синусу противолежащего угла равно диаметру окружности, описанной около треугольника.

Формулы площади треугольника

1. Площадь треугольника равна половине произведения основания на высоту.

2. Площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними.

3. Площадь треугольника равна произведению его полупериметра на радиус вписанной окружности.

4. Площадь треугольника равна произведению трёх его сторон, делённому на учетверённый радиус описанной окружности.

5. Формула Герона: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где p — полупериметр; a, b, c — стороны треугольника.

Элементы равностороннего треугольника

Пусть h, S, r, R — высота, площадь, радиусы вписанной и описанной окружностей равностороннего треугольника со стороной a. Тогда

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}; \quad r = \frac{a\sqrt{3}}{6}; \quad R = \frac{a\sqrt{3}}{3}; \quad R = 2r; \quad S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Четырёхугольник

Параллелограмм. Параллелограммом называется четырёхугольник, противоположные стороны которого попарно параллельны.

Свойства и признаки параллелограмма

1. Диагональ разбивает параллелограмм на два равных треугольника.

2. Противоположные стороны параллелограмма попарно равны.

3. Противоположные углы параллелограмма попарно равны.

4. Диагонали параллелограмма пересекаются и делятся точкой пересечения пополам.

5. Если противоположные стороны четырёхугольника попарно равны, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

6. Если две противоположные стороны четырёхугольника равны и параллельны, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

7. Если диагонали четырёхугольника делятся точкой пересечения пополам, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

Свойство середин сторон четырёхугольника. Середины сторон любого четырёхугольника являются вершинами параллелограмма, площадь которого равна половине площади четырёхугольника.

Прямоугольник. Прямоугольником называется параллелограмм с прямым углом.

Свойства и признаки прямоугольника

1. Диагонали прямоугольника равны.

2. Если диагонали параллелограмма равны, то этот параллелограмм — прямоугольник.

Квадрат. Квадратом называется прямоугольник, все стороны которого равны.

Ромб. Ромбом называется четырёхугольник, все стороны которого равны.

Свойства и признаки ромба

1. Диагонали ромба перпендикулярны.

2. Диагонали ромба делят его углы пополам.

3. Если диагонали параллелограмма перпендикулярны, то этот параллелограмм — ромб.

4. Если диагонали параллелограмма делят его углы пополам, то этот параллелограмм — ромб.

Трапеция. Трапецией называется четырёхугольник, у которого только две противоположные стороны (основания) параллельны. Средней линией трапеции называется отрезок, соединяющий середины непараллельных сторон (боковых сторон).

1. **Теорема о средней линии трапеции.** Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

2. Отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, равен полуразности оснований.

Замечательное свойство трапеции. Точка пересечения диагоналей трапеции, точка пересечения продолжений боковых сторон и середины оснований лежат на одной прямой.

Равнобедренная трапеция. Трапеция называется равнобедренной, если её боковые стороны равны.

Свойства и признаки равнобедренной трапеции

1. Углы при основании равнобедренной трапеции равны.

2. Диагонали равнобедренной трапеции равны.

3. Если углы при основании трапеции равны, то она равнобедренная.

4. Если диагонали трапеции равны, то она равнобедренная.

5. Проекция боковой стороны равнобедренной трапеции на основание равна полуразности оснований, а проекция диагонали — полусумме оснований.

Формулы площади четырёхугольника

1. Площадь параллелограмма равна произведению основания на высоту.

2. Площадь параллелограмма равна произведению его соседних сторон на синус угла между ними.

3. Площадь прямоугольника равна произведению двух его соседних сторон.

4. Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей.

5. Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту.

6. Площадь четырёхугольника равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними.

7. Формула Герона для четырёхугольника, около которого можно описать окружность: $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, где a, b, c, d — стороны этого четырёхугольника, p — полупериметр, а S — площадь.

Подобные фигуры

1. Отношение соответствующих линейных элементов подобных фигур равно коэффициенту подобия.

2. Отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия.

Правильный многоугольник

Пусть a_n — сторона правильного n-угольника, а r_n и R_n — радиусы вписанной и описанной окружностей. Тогда

$$a_n = 2R_n \cdot \sin\frac{180^\circ}{n}; \quad a_n = 2\,\mathrm{tg}\,\frac{180^\circ}{n} \cdot r_n; \quad r_n = R_n \cdot \cos\frac{180^\circ}{n}.$$

Окружность

Окружностью называется геометрическое место точек плоскости, удалённых от данной точки, называемой центром окружности, на одно и то же положительное расстояние.

Основные свойства окружности

1. Диаметр, перпендикулярный хорде, делит хорду и стягиваемые ею дуги пополам.

2. Диаметр, проходящий через середину хорды, не являющейся диаметром, перпендикулярен этой хорде.

3. Серединный перпендикуляр к хорде проходит через центр окружности.

4. Равные хорды удалены от центра окружности на равные расстояния.

5. Хорды окружности, удалённые от центра на равные расстояния, равны.

6. Окружность симметрична относительно любого своего диаметра.

7. Дуги окружности, заключённые между параллельными хордами, равны.

8. Из двух хорд больше та, которая менее удалена от центра.

9. Диаметр есть наибольшая хорда окружности.

Замечательные свойства окружности

1. Геометрическое место точек M, из которых отрезок AB виден под прямым углом ($\angle AMB = 90°$), есть окружность с диаметром AB без точек A и B.

2. Геометрическое место точек M, из которых отрезок AB виден под острым углом ($\angle AMB < 90°$), есть внешность круга с диаметром AB без точек прямой AB.

3. Геометрическое место точек M, из которых отрезок AB виден под тупым углом ($\angle AMB > 90°$), есть внутренность круга с диаметром AB без точек отрезка AB.

4. Геометрическое место точек, из которых данный отрезок виден под данным углом, есть две дуги равных окружностей (без концов этих дуг).

Касательная к окружности

Прямая, имеющая с окружностью единственную общую точку, называется касательной к окружности.

1. Касательная перпендикулярна радиусу, проведённому в точку касания.

2. Если прямая a, проходящая через точку на окружности, перпендикулярна радиусу, проведённому в эту точку, то прямая a — касательная к окружности.

3. Если прямые, проходящие через точку M, касаются окружности в точках A и B, то $MA = MB$ и $\angle AMO = \angle BMO$, где точка O — центр окружности.

4. Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла.

Касающиеся окружности

Говорят, что две окружности касаются, если они имеют единственную общую точку (точку касания).

1. Точка касания двух окружностей лежит на их линии центров.

2. Окружности радиусов r и R с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом тогда и только тогда, когда $R + r = O_1O_2$.

3. Окружности радиусов r и R $(r < R)$ с центрами O_1 и O_2 касаются внутренним образом тогда и только тогда, когда $R - r = O_1O_2$.

4. Окружности с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке K. Некоторая прямая касается этих окружностей в различных точках A и B и пересекается с общей касательной, проходящей через точку K, в точке C. Тогда $\angle AKB = 90°$ и $\angle O_1CO_2 = 90°$.

5. Отрезок общей внешней касательной к двум касающимся окружностям радиусов r и R равен отрезку общей внутренней касательной, заключённому между общими внешними. Оба эти отрезка равны $2\sqrt{Rr}$.

Углы, связанные с окружностью

1. Величина дуги окружности равна величине центрального угла, на неё опирающегося.

2. Вписанный угол равен половине угловой величины дуги, на которую он опирается.

3. Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.

4. Угол между пересекающимися хордами равен полусумме противоположных дуг, высекаемых хордами.

5. Угол между двумя секущими, пересекающимися вне круга, равен полуразности дуг, высекаемых секущими на окружности.

6. Угол между касательной и хордой, проведённой из точки касания, равен половине угловой величины дуги, высекаемой на окружности этой хордой.

Свойства хорд окружности

1. Линия центров двух пересекающихся окружностей перпендикулярна их общей хорде.

2. Произведения длин отрезков хорд AB и CD окружности, пересекающихся в точке E, равны, то есть $|AE| \cdot |EB| = |CE| \cdot |ED|$.

Вписанные и описанные окружности

1. Центры вписанной и описанной окружностей правильного треугольника совпадают.

2. Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, — середина гипотенузы.

3. Если в четырёхугольник можно вписать окружность, то суммы его противоположных сторон равны.

4. Если четырёхугольник можно вписать в окружность, то сумма его противоположных углов равна $180°$.

5. Если сумма противоположных углов четырёхугольника равна $180°$, то около него можно описать окружность.

6. Если в трапецию можно вписать окружность, то боковая сторона трапеции видна из центра окружности под прямым углом.

7. Если в трапецию можно вписать окружность, то радиус окружности есть среднее пропорциональное отрезков, на которые точка касания делит боковую сторону.

8. Если в многоугольник можно вписать окружность, то его площадь равна произведению полупериметра многоугольника на радиус этой окружности.

Теорема о касательной и секущей и следствие из неё

1. Если из одной точки проведены к окружности касательная и секущая, то произведение всей секущей на её внешнюю часть равно квадрату касательной.

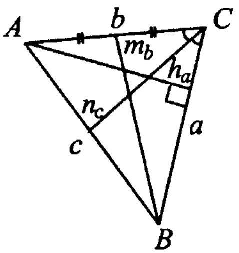
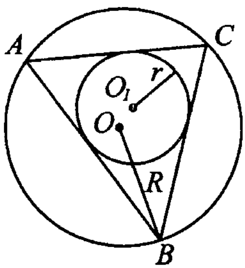
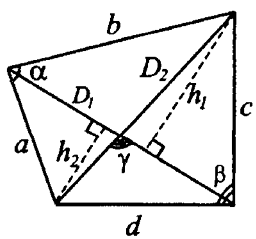
2. Произведение всей секущей на её внешнюю часть для данной точки и данной окружности постоянно.

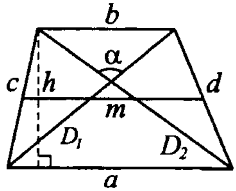
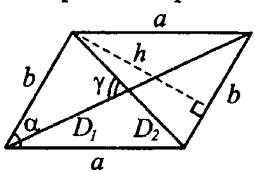
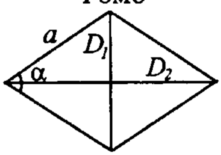
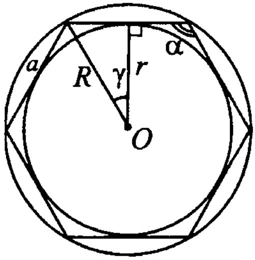
Длина окружности радиуса R равна $2\pi R$.

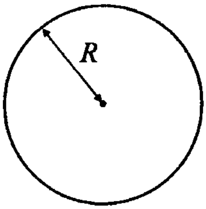
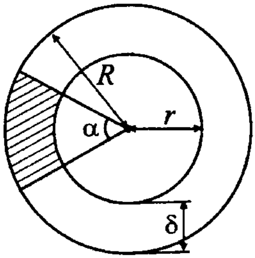
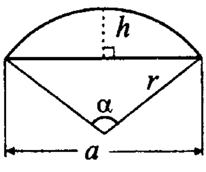
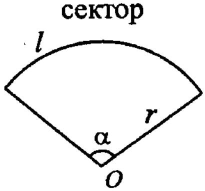
Площадь круга радиуса R равна πR^2.

Основные формулы

Далее S — площадь фигуры, P — периметр, p — полупериметр.

Чертежи	Обозначения	Формулы
Треугольник   	a, b, c — стороны; A, B, C — противолежащие им углы; h_a, h_b, h_c — высоты, проведённые к соответствующим сторонам; n_a, n_b, n_c — биссектрисы, проведённые к соответствующим сторонам; b_a и b_c — отрезки, на которые делится биссектрисой сторона b; m_a, m_b, m_c — медианы, проведённые к соответствующим сторонам; $\mu = \frac{(m_a+m_b+m_c)}{2}$ — полусумма медиан; R — радиус описанной окружности; r — радиус вписанной окружности.	$h_b = \frac{2S}{b}$ $m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}$ $n_b = \frac{2}{a+c}\sqrt{acp(p-b)}$ $n_b = \sqrt{ac - b_a b_c}$ $S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}ab\sin C$ $S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2\sin A}$ $S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$ $S = r^2 \operatorname{ctg}\frac{A}{2} \operatorname{ctg}\frac{B}{2} \operatorname{ctg}\frac{C}{2}$ $S = pr = \frac{abc}{4R}$ $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ $S = \frac{4}{3}\sqrt{\mu}\cdot$ $\cdot\sqrt{(\mu-m_a)(\mu-m_b)(\mu-m_c)}$
Четырёхугольник  	a, b, c, d — стороны; D_1, D_2 — диагонали; γ — угол между диагоналями; h_1, h_2 — длины перпендикуляров, опущенных на диагональ D_1; α, β — два противолежащих угла четырёхугольника.	$S = \frac{h_1+h_2}{2}D_1$ $S = \frac{1}{2}D_1 D_2 \sin\gamma$ $S = \frac{1}{2}(ab\sin\alpha + cd\sin\beta)$

Чертежи	Обозначения	Формулы
Трапеция 	a, b — основания; c, d — боковые стороны; D_1, D_2 — диагонали; α — угол между диагоналями; m — средняя линия; h — высота.	$m = \frac{1}{2}(a+b)$ $P = 2m + c + d$ $S = \frac{1}{2}(a+b)h = mh$ $S = \frac{1}{2}D_1 D_2 \sin\alpha$
Параллелограмм 	a, b — стороны; h — расстояние между сторонами b; α — угол параллелограмма; D_1, D_2 — диагонали; γ — угол между диагоналями.	$S = bh$ $S = ab\sin\alpha$ $S = \frac{1}{2}D_1 D_2 \sin\gamma$
Ромб 	a — сторона; α — угол ромба; D_1, D_2 — диагонали.	$S = a^2 \sin\alpha$ $S = \frac{1}{2}D_1 D_2$
Правильный многоугольник 	n — число сторон; a — сторона; R — радиус описанной окружности; r — радиус вписанной окружности; $\alpha = 180° - 2\gamma$ — угол многоугольника $\left(\gamma = \frac{180°}{n}\right)$.	$a = 2\sqrt{R^2 - r^2}$ $P = na$ $P = 2nR\sin\gamma = 2nr\,\mathrm{tg}\,\gamma$ $S = \frac{1}{4}na^2\,\mathrm{ctg}\,\gamma$ $S = nr^2\,\mathrm{tg}\,\gamma$ $S = \frac{1}{2}nR^2\sin 2\gamma$ $S = \frac{1}{2}nar$

Чертежи	Обозначения	Формулы
Круг 	R — радиус; l — длина окружности.	$S=\pi R^2$ $l=2\pi R$
Круговое кольцо 	r — внутренний радиус; R — наружный радиус; d — внутренний диаметр; D — наружный диаметр; $\varrho=\dfrac{r+R}{2}$ — средний радиус; $\delta=R-r$ — ширина кольца; α — центральный угол части кольца (в градусах).	$S=\pi(R^2-r^2)$ $S=\frac{\pi}{4}(D^2-d^2)$ $S=2\pi\rho\delta$ Площадь части кольца $S=\frac{\pi\alpha}{360}(R^2-r^2)$ $S=\frac{\pi\alpha}{90}(D^2-d^2)$ $S=\frac{\pi\alpha}{180}\rho\delta$
Круговой сегмент 	r — радиус; α — центральный угол (в градусах); $l=\frac{\pi\alpha}{180}r$ — длина дуги; a — длина хорды; h — высота.	$P=l+a$ $S=\frac{1}{2}r^2\left(\frac{\pi\alpha}{180}-\sin\alpha\right)$ $S=\dfrac{r(l-a)+ah}{2}$
Круговой сектор 	r — радиус; α — центральный угол (в градусах); $l=\frac{\pi\alpha}{180}r$ — длина дуги.	$P=l+2r$ $S=\frac{lr}{2}$ $S=\frac{\pi r^2\alpha}{360}$

§ 13. Стереометрия

Аксиомы стереометрии

Основные аксиомы

1. Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость, и притом только одна.

2. Если две точки прямой лежат в плоскости, то все точки прямой лежат в этой плоскости.

3. Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей.

Факты, непосредственно связанные с аксиомами

1. Через прямую и точку, не лежащую на этой прямой, проходит единственная плоскость.

2. Через две параллельные прямые проходит единственная плоскость.

3. Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит единственная прямая, параллельная данной.

Параллельность в пространстве

1. **Признак параллельности прямой и плоскости.** Если прямая a параллельна некоторой прямой плоскости α, то прямая a параллельна плоскости α.

2. Если через прямую a, параллельную плоскости α, провести плоскость, пересекающую плоскость α по прямой b, то прямые a и b параллельны.

3. Если прямые a и b параллельны, а плоскость, проходящая через прямую a, пересекается с плоскостью, проходящей через прямую b, то прямая пересечения плоскостей параллельна прямым a и b.

4. **Транзитивность параллельности прямых в пространстве.** Если прямая a параллельна прямой b, а прямая b параллельна прямой c, то прямая a параллельна прямой c.

5. **Признак параллельности плоскостей.** Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то плоскости параллельны.

6. Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то прямые пересечения параллельны.

7. **Транзитивность параллельности плоскостей.** Если плоскость α параллельна плоскости β, а плоскость β параллельна плоскости γ, то плоскость α параллельна плоскости γ.

8. Отрезки параллельных прямых, заключённые между параллельными плоскостями, равны.

9. Через точку, не лежащую в плоскости, проходит единственная плоскость, параллельная данной.

Скрещивающиеся прямые

1. **Признак скрещивающихся прямых.** Если прямая a лежит в плоскости α, а прямая b пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на прямой a, то a и b — скрещивающиеся прямые.

2. Через две скрещивающиеся прямые проходит единственная пара параллельных плоскостей.

3. Геометрическое место середин отрезков с концами на двух скрещивающихся прямых есть плоскость, параллельная этим прямым и проходящая через середину одного из таких отрезков.

4. Угол между скрещивающимися прямыми (угол между пересекающимися в произвольной точке M прямыми, соответственно параллельными данным) не зависит от выбора точки M.

5. Для любых двух скрещивающихся прямых существует единственный общий перпендикуляр (отрезок с концами на этих прямых, перпендикулярный обеим прямым).

Параллельное проектирование

1. Прямая, не параллельная проектирующей, переходит в прямую.

2. Пара параллельных прямых, не параллельных проектирующей, переходит в пару параллельных прямых или в одну прямую.

3. При проектировании сохраняется отношение отрезков, лежащих на одной прямой или на параллельных прямых.

4. Наклонная пересекает плоскость в точке, лежащей на любой её параллельной проекции на эту плоскость.

5. Площадь ортогональной проекции плоского многоугольника на плоскость равна произведению площади проектируемого многоугольника на косинус угла между плоскостью этого многоугольника и плоскостью проекций.

Координаты и векторы в пространстве

1. Координаты вектора равны разностям соответствующих координат конца и начала данного вектора.

2. Для того чтобы векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $\vec{a} = k \cdot \vec{b}$, где k — некоторое число.

3. Для того чтобы три вектора были компланарны, необходимо и достаточно, чтобы один из них можно было представить в виде линейной комбинации двух других ($\vec{a} = x \cdot \vec{b} + y \cdot \vec{c}$, где x, y — некоторые числа).

4. Любой вектор можно единственным образом разложить по трём некомпланарным векторам.

5. Если M — середина AB, то $\overrightarrow{OM} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$.

6. Если M — середина AB, а N — середина CD, то $\overrightarrow{MN} = \dfrac{\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}}{2}$.

7. Если M — точка пересечения медиан треугольника ABC, то $\overrightarrow{OM} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}$.

8. Если M — точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$, то $\overrightarrow{OM} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}}{4}$.

9. Координаты середины отрезка равны средним арифметическим координат его концов.

10. **Свойства скалярного произведения векторов:**

а) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;

б) $\alpha\vec{a} \cdot \vec{b} = \alpha(\vec{a} \cdot \vec{b})$;

в) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$;

г) $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$;

д) $(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2 \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) + \vec{b}^2$;

е) $(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \leqslant \vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2$, причём равенство достигается тогда и только тогда, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны;

ж) ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю.

11. **Расстояние между точками** $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$ равно

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

12. **Угол между ненулевыми векторами.** Если φ — угол между ненулевыми векторами $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$, то

$$\cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

13. **Уравнение плоскости, проходящей через точку** $M_0(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно ненулевому вектору $\vec{n}(a; b; c)$ (вектор нормали), имеет вид

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

14. **Параметрические уравнения прямой,** проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ параллельно ненулевому вектору $\vec{m}(a; b; c)$ (направляющий вектор), имеют вид

$$\begin{cases} x - x_0 = at, \\ y - y_0 = bt, \\ z - z_0 = ct. \end{cases}$$

15. **Уравнения прямой, проходящей через две точки** $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$, имеют вид

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

16. **Прямая как пересечение двух плоскостей** задаётся системой

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases}$$

где $A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 \neq 0$ и $A_2^2 + B_2^2 + C_2^2 \neq 0$, а коэффициенты при соответствующих неизвестных непропорциональны.

17. **Угол между плоскостями.** Если φ — угол между плоскостями, заданными уравнениями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, то

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

18. **Уравнение плоскости «в отрезках».** Если плоскость пересекает оси координат в точках $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$ и $C(0; 0; c)$ $(a, b, c \neq 0)$, то её уравнение можно представить в виде

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

19. **Расстояние от точки до плоскости.** Если ρ — расстояние от точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$, то

$$\rho = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Перпендикулярность прямой и плоскости

1. **Признак перпендикулярности прямой и плоскости.** Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости.

2. Если две прямые перпендикулярны одной плоскости, то они параллельны.

3. Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна плоскости, то вторая прямая также перпендикулярна этой плоскости.

4. Две плоскости, перпендикулярные одной прямой, параллельны.

5. Если прямая и плоскость перпендикулярны одной прямой, то они параллельны.

6. Через данную точку проходит единственная плоскость, перпендикулярная данной прямой.

7. Через данную точку проходит единственная прямая, перпендикулярная данной плоскости.

8. **Теорема о трёх перпендикулярах.** Прямая, лежащая в плоскости, перпендикулярна наклонной к плоскости тогда и только тогда, когда она перпендикулярна ортогональной проекции наклонной на эту плоскость.

9. Если из одной точки проведены к плоскости перпендикуляр и наклонные, то

а) перпендикуляр короче наклонных;

б) равные наклонные имеют равные ортогональные проекции;

в) большей наклонной соответствует бóльшая ортогональная проекция;

г) из двух наклонных больше та, ортогональная проекция которой больше.

10. **Теорема об угле прямой с плоскостью.** Угол между наклонной и её ортогональной проекцией на плоскость меньше угла между этой наклонной и любой другой прямой плоскости.

11. Геометрическое место точек, равноудалённых от концов отрезка, есть плоскость, перпендикулярная этому отрезку и проходящая через его середину.

12. Геометрическое место точек, удалённых на данное расстояние от данной плоскости, есть две параллельные плоскости.

13. Геометрическое место точек, равноудалённых от вершин треугольника, есть прямая, проходящая через центр описанной окружности треугольника перпендикулярно его плоскости.

Двугранный угол

1. Линейный угол двугранного угла (сечение двугранного угла плоскостью, перпендикулярной его ребру) не зависит от выбора точки на ребре двугранного угла.

2. Геометрическое место внутренних точек двугранного угла, равноудалённых от его граней, есть биссекторная плоскость двугранного угла.

3. **Необходимое и достаточное условие перпендикулярности плоскостей.** Две плоскости перпендикулярны (образуют прямой двугранный угол) тогда и только тогда, когда одна из них проходит через перпендикуляр к другой.

4. Если две пересекающиеся плоскости перпендикулярны третьей, то они пересекаются по прямой, также перпендикулярной этой плоскости.

Многогранные углы

1. Плоский угол трёхгранного угла меньше суммы двух других его плоских углов.

2. Сумма плоских углов выпуклого многогранного угла меньше 360°.

Сфера. Касательная плоскость. Касающиеся сферы

1. Сечение сферы плоскостью, удалённой от центра сферы на расстояние, меньшее радиуса, есть окружность. Основание перпендикуляра, опущенного из центра сферы на секущую плоскость, есть центр этой окружности.

2. Касательная плоскость к сфере (плоскость, имеющая со сферой единственную общую точку) перпендикулярна радиусу сферы, проведённому в точку касания.

3. Касательная прямая к сфере (прямая, имеющая со сферой единственную общую точку) перпендикулярна радиусу сферы, проведённому в точку касания.

4. Центр сферы, вписанной в двугранный угол, лежит в биссекторной плоскости этого угла.

5. Отрезки касательных прямых, проведённых к сфере из одной точки, равны между собой.

6. Линия центров касающихся сфер (имеющих единственную общую точку) проходит через их точку касания.

7. Если две различные сферы имеют более одной общей точки, то они пересекаются по окружности. Плоскость этой окружности перпендикулярна линии центров данных сфер.

Пирамида

Правильная пирамида

1. Если $ABCD$ — правильная треугольная пирамида с вершиной D, высотой DM и стороной основания a, а A_1, B_1 и C_1 — середины сторон BC, AC и AB соответственно, то

а) $\angle DAM = \angle DBM = \angle DCM$ — угол бокового ребра с плоскостью основания;

б) $\angle DA_1M = \angle DB_1M = \angle DC_1M$ — линейный угол двугранного угла боковой грани с плоскостью основания;

в) $\angle AFB$ (где F — основание перпендикуляра, опущенного из вершины A основания на боковое ребро DC) — линейный угол между боковыми гранями пирамиды;

г) $AA_1 = BB_1 = CC_1 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ — высота треугольника основания;

д) $AM = BM = CM = \frac{2}{3}AA_1 = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ — ортогональная проекция бокового ребра на плоскость основания;

е) $A_1M = B_1M = C_1M = \frac{AA_1}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ — ортогональная проекция апофемы на плоскость основания;

ж) C_1F — общий перпендикуляр противоположных рёбер AB и CD.

2. Противоположные рёбра правильной треугольной пирамиды попарно перпендикулярны.

3. Высота правильного тетраэдра с ребром a равна $a\sqrt{\frac{2}{3}}$.

4. Если $PABCD$ — правильная четырёхугольная пирамида с вершиной P, высотой PM и стороной основания a, а A_1, B_1, C_1 и D_1 — середины сторон AB, BC, CD и AD соответственно, то

а) $\angle PAM = \angle PBM = \angle PCM = \angle PDM$ — угол бокового ребра с плоскостью основания;

б) $\angle PA_1M = \angle PB_1M = \angle PC_1M = \angle PD_1M$ — линейный угол двугранного угла боковой грани с плоскостью основания;

в) $\angle BFD$ (где F — основание перпендикуляра, опущенного из вершины B основания на боковое ребро AP) — линейный угол между соседними боковыми гранями пирамиды;

г) $\angle A_1PC_1 = \angle B_1PD_1$ — линейный угол двугранного угла между противоположными боковыми гранями;

д) $AM = BM = CM = DM = \dfrac{DB}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ — ортогональная проекция бокового ребра на плоскость основания;

е) $A_1M = B_1M = C_1M = D_1M = \frac{a}{2}$ — ортогональная проекция апофемы на плоскость основания;

ж) FM — общий перпендикуляр диагонали BD основания и скрещивающегося с ней бокового ребра AP.

5. Боковое ребро правильной четырёхугольной пирамиды перпендикулярно скрещивающейся с ним диагонали основания.

Правильный тетраэдр. Пусть a — ребро правильного тетраэдра, а R и r — радиусы описанной и вписанной сфер, V — объём тетраэдра. Тогда

$$R = \frac{a\sqrt{6}}{4}; \quad r = \frac{a\sqrt{6}}{12}; \quad R = 3r; \quad V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$

Пирамида

1. Если боковые грани треугольной пирамиды образуют равные двугранные углы с плоскостью основания, то высота пирамиды проходит либо через центр вписанной окружности, либо через центр одной из вневписанных окружностей основания.

2. Если все боковые рёбра пирамиды образуют с основанием равные углы или если все боковые рёбра равны, то высота пирамиды проходит через центр окружности, описанной около основания.

3. **Теорема о медианах тетраэдра.** Медианы тетраэдра (отрезки, соединяющие вершины тетраэдра с точками пересечения медиан противолежащих граней) пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении $3:1$, считая от вершины.

4. Если пересечь пирамиду плоскостью, параллельной основанию, то в сечении образуется многоугольник, подобный основанию.

5. В пирамиде и в конусе площади сечений, параллельных основанию, относятся как квадраты их расстояний до вершины.

Параллелепипед

1. Параллелепипед называется прямым, если его боковые рёбра перпендикулярны основанию.

2. Прямой параллелепипед, в основании которого лежит прямоугольник, называется прямоугольным.

3. **Свойства диагоналей прямоугольного параллелепипеда**

а) диагонали прямоугольного параллелепипеда равны;

б) квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трёх его измерений (длин трёх рёбер с общей вершиной).

4. **Свойства граней и диагоналей параллелепипеда.** Противоположные грани параллелепипеда равны и параллельны. Диагонали параллелепипеда пересекаются и делятся точкой пересечения пополам.

5. Диагональ AC_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проходит через точку пересечения медиан треугольника A_1BD и делится ею в отношении $1:2$, считая от точки A.

Площади поверхности многогранников

1. Площадь боковой поверхности призмы равна произведению периметра перпендикулярного сечения призмы на боковое ребро.

2. Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна площади её основания, делённой на косинус угла боковой грани с плоскостью основания.

Объёмы многогранников

1. Объём прямоугольного параллелепипеда равен произведению трёх его измерений.

2. Объём наклонной призмы равен произведению площади перпендикулярного сечения на боковое ребро.

3. Объём призмы равен произведению площади основания на высоту.

4. Объём треугольной призмы равен половине произведения площади боковой грани на расстояние между этой гранью и противолежащим ей боковым ребром.

5. Объём пирамиды равен трети произведения площади основания на высоту.

6. Пирамиды с равными высотами и равновеликими основаниями равновелики.

7. Плоскость, проходящая через вершину пирамиды и прямую, лежащую в основании, делит объём пирамиды в том же отношении, в котором прямая делит площадь основания.

8. Если точки A_1, B_1 и C_1 лежат на боковых рёбрах DA, DB и DC соответственно треугольной пирамиды $ABCD$ или на их продолжениях, то объём пирамиды $A_1B_1C_1D_1$ относится к объёму пирамиды $ABCD$ как произведение отношений $\frac{DA_1}{DA} \cdot \frac{DB_1}{DB} \cdot \frac{DC_1}{DC}$.

9. Отношение объёмов подобных многогранников равно кубу коэффициента подобия.

10. Объём V тетраэдра равен шестой части произведения длин двух противоположных рёбер a и b на расстояние c между ними и на синус угла φ между ними, то есть $V = \frac{1}{6}abc\sin\varphi$.

11. Объём V тетраэдра равен двум третям произведения площадей двух граней P и Q на синус угла φ между ними, делённому на их общее ребро a, то есть $V = \frac{2}{3}\frac{PQ\sin\varphi}{a}$.

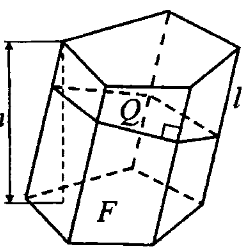
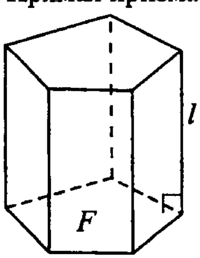
12. А. Объём тетраэдра равен трети произведения его полной поверхности на радиус вписанной сферы.

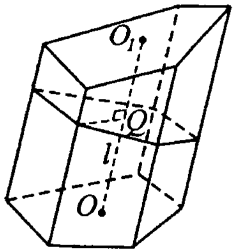
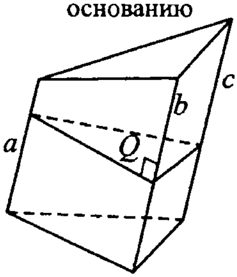
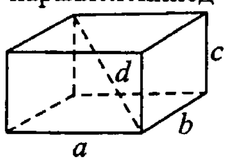
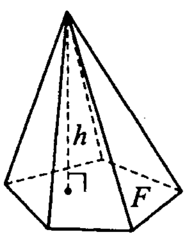
Б. Объём многогранника, в который можно вписать сферу, равен трети произведения полной поверхности многогранника на радиус вписанной сферы.

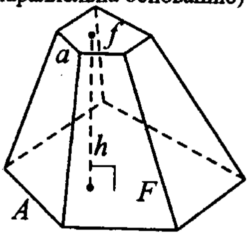
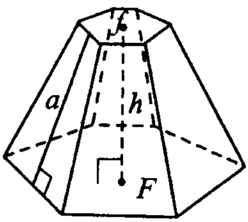
Основные формулы

Далее V — объём тела, $S_б$ и S — его боковая и полная поверхности.

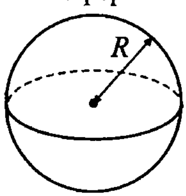
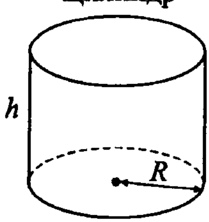
Многогранники

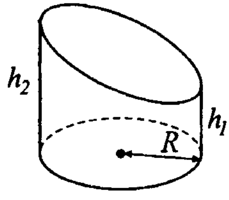
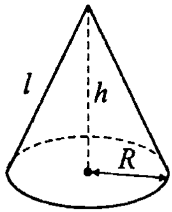
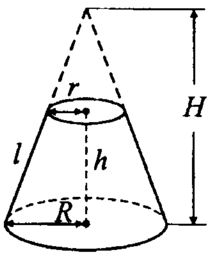
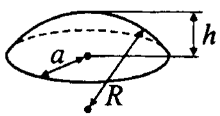
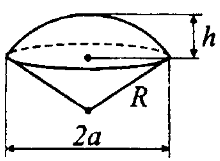
Чертежи	Обозначения	Формулы
Призма 	F — площадь основания; h — высота; l — боковое ребро; Q и P — площадь и периметр сечения, перпендикулярного боковому ребру.	$V = Fh = Ql$ $S_б = Pl$ $S = Pl + 2F$
Прямая призма 	F и P — площадь и периметр основания; l — боковое ребро.	$V = Fl$ $S_б = Pl$ $S = Pl + 2F$

Чертежи	Обозначения	Формулы
Призма, усечённая непараллельно основанию 	l — длина отрезка OO_1, соединяющего центры тяжести оснований; Q — площадь сечения, перпендикулярного к отрезку OO_1.	$V = Ql$
Треугольная призма, усечённая непараллельно основанию 	a, b и c — параллельные рёбра; Q — площадь сечения, перпендикулярного к рёбрам.	$V = \frac{1}{3}(a+b+c)Q$
Прямоугольный параллелепипед 	a, b и c — рёбра; d — диагональ: $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$.	$V = abc$ $S = 2(ab+bc+ac)$
Пирамида 	F — площадь основания; h — высота; P — периметр основания; a — апофема (высота боковой грани правильной пирамиды).	$V = \frac{1}{3}Fh$ Правильная пирамида $S_б = \frac{1}{2}Pa$

Чертежи	Обозначения	Формулы
Усечённая пирамида (плоскость сечения параллельна основанию) 	F, f — площади оснований; h — высота (расстояние между основаниями); A, a — две соответственные стороны оснований.	$V = \frac{1}{3}h(F + f + \sqrt{Ff})$ $V = \frac{1}{3}hF\left(1 + \frac{a}{A} + \left(\frac{a}{A}\right)^2\right)$
Правильная усечённая пирамида 	F, f — площади основаннй; P, p — периметры оснований; h — высота; a — апофема (высота боковой грани).	$V = \frac{1}{3}h(F + f + \sqrt{Ff})$ $S_б = \frac{P + p}{2} \cdot a$

Тела вращения

Чертежи	Обозначения	Формулы
Сфера 	R — радиус.	$V = \frac{4}{3}\pi R^3$ $S = 4\pi R^2$
Цилиндр 	R — радиус основания; h — высота.	$V = \pi R^2 h$ $S_б = 2\pi Rh$ $S = 2\pi R(h + R)$

Цилиндр, усечённый непараллельно основанию 	R — радиус основания; h_1 и h_2 — наименьшая и наибольшая образующие.	$V = \frac{1}{2}\pi R^2(h_1 + h_2)$ $S_б = \pi R(h_1 + h_2)$ $S = \pi R\left(h_1 + h_2 + R + \sqrt{R^2 + \left(\frac{h_2 - h_1}{2}\right)^2}\right)$
Конус 	R — радиус основания; h — высота; $l = \sqrt{R^2 + h^2}$ — образующая.	$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$ $S_б = \pi R\sqrt{R^2 + h^2}$ $S_б = \pi Rl$ $S = \pi R(R + l)$
Усечённый конус 	R и r — радиусы оснований; h — высота; $l = \sqrt{h^2 + (R - r)^2}$ — образующая; H — высота неусечённого конуса: $H = h + \frac{hr}{R - r}$.	$V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + r^2 + Rr)$ $S_б = \pi l(R + r)$ $S = \pi\left(R^2 + r^2 + l(R + r)\right)$
Шаровой сегмент 	h — высота сегмента; R — радиус шара; $a = \sqrt{h(2R - h)}$ — радиус основания сегмента.	$V = \frac{1}{6}\pi h(3a^2 + h^2)$ $V = \frac{1}{3}\pi h^2(3R - h)$ $S_б = 2\pi Rh$ $S_б = \pi(a^2 + h^2)$ $S = \pi(2a^2 + h^2)$ $S = \pi(a^2 + 2Rh)$
Шаровой сектор 	h — высота сегмента; R — радиус шара; a — радиус основания сегмента.	$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h$ $S = \pi R(a + 2h)$

Глава I. Учебно-тренировочные тесты

Инструкция по выполнению работы

На выполнение заданий экзаменационной работы по математике даётся 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 21 задание.

Часть 1 содержит 10 заданий (задания B1 – B10) базового уровня сложности, проверяющих наличие практических математических знаний и умений.

Часть 2 содержит 11 заданий (задания B11 – B15 и C1 – C6) базового, повышенного и высокого уровней сложности по материалу курса математики средней школы, проверяющих уровень профильной математической подготовки.

Ответом к каждому из заданий B1 – B15 является целое число или конечная десятичная дробь. При выполнении заданий C1 – C6 требуется записать полное решение и ответ.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой, капиллярной или перьевой ручки.

При выполнении заданий Вы можете пользоваться черновиком. Обращаем Ваше внимание, что записи в черновике не будут учитываться при оценивании работы.

Советуем выполнять задания в том порядке, как они даны. Для экономии времени пропускайте задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходите к следующему. Если после выполнения всей работы у Вас останется время, Вы сможете вернуться к пропущенным заданиям.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Вариант № 1

Часть 1

Ответом на задания B1 – B10 должно быть целое число или конечная десятичная дробь.

B1. Поезд Ростов-на-Дону–Москва отправляется в 14:40, а прибывает в 9:40 на следующий день (время московское). Сколько часов поезд находился в пути?

B2. Гелевая ручка стоит 12 рублей. Какое наибольшее число таких ручек можно купить на 800 рублей после понижения цены на 20%?

B3. На рисунке 19 точками показано суточное количество осадков, выпадавших в Кирове с 5 по 17 марта 1975 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — количество осадков, выпавших в соответствующий день, в миллиметрах. Для наглядности точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, какого числа из указанного периода впервые выпало 35 миллиметров осадков.

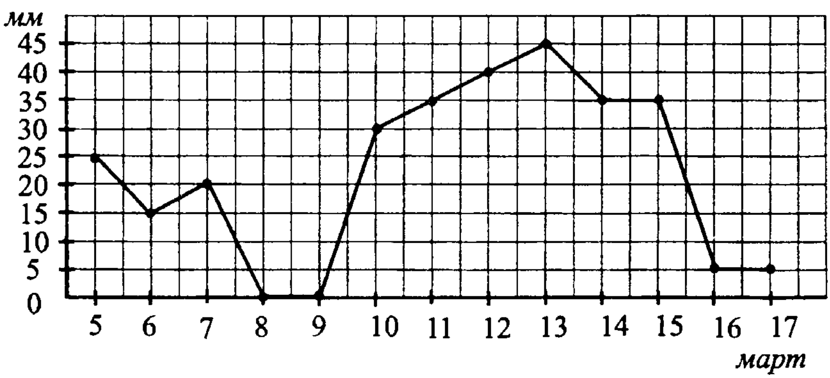


Рис. 19.

B4. Журнал «Велогосударство» определяет рейтинги марок велосипедов на основе показателей безопасности S, комфорта C, функциональности F, качества Q и дизайна D. Каждый отдельный показатель оценивается по 5-балльной шкале. Рейтинг R вычисляется по формуле $R = \dfrac{5S + 3C + 3F + 2Q + 2D}{75}$. В таблице даны оценки каждого показателя для трёх моделей велосипедов. Определите наивысший рейтинг представленных в таблице велосипедов.

Модель велосипеда	Безопасность	Комфорт	Функциональность	Качество	Дизайн
А	3	2	3	3	1
Б	5	2	5	2	2
В	5	5	1	2	1

B5. Найдите площадь трапеции, вершины которой имеют координаты (3; 1), (7; 1), (7; 7), (9; 7) (см. рис. 20).

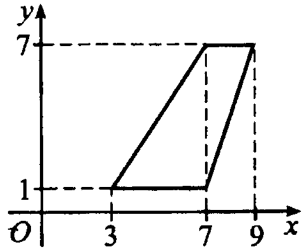


Рис. 20.

B6. На книжной полке Максима 25 книг: 12 детективов, 4 учебника по математике и 9 книг в жанре «фэнтези». Найдите вероятность того, что наудачу взятая с этой полки книга окажется учебником по математике.

B7. Найдите корень уравнения $-\frac{3}{7}x = -\frac{45}{7}$.

B8. В треугольнике ABC угол C равен 90°, синус угла BAC равен $\frac{3}{5}$ (см. рис. 21). Найдите косинус угла BAD.

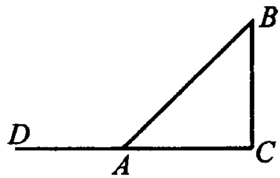


Рис. 21.

B9. На рисунке 22 изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.

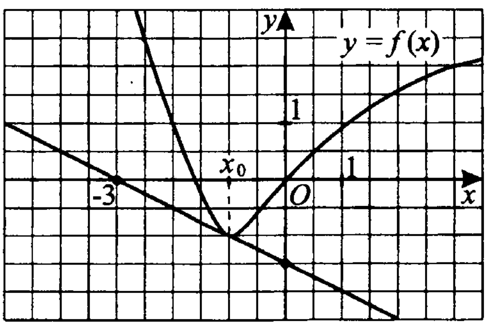


Рис. 22.

B10. Найдите квадрат расстояния между вершинами D и C_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со сторонами $AB = 6$, $AD = 7$, $AA_1 = 9$.

5. Зак. № 270

Часть 2

Ответом на задания B11–B15 должно быть целое число или конечная десятичная дробь.

B11. Найдите значение выражения $\frac{1{,}44 \cdot 1{,}05}{2{,}1 \cdot 0{,}12}$.

B12. Расстояние от наблюдателя, находящегося на небольшой высоте h над Землёй, до наблюдаемой им линии горизонта вычисляется по формуле $l = \sqrt{2Rh}$, где $R = 6400$ (км) — радиус Земли. Найдите, с какой высоты линия горизонта видна на расстоянии 4 километров. Ответ выразите в метрах.

B13. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки C, D, A_1, B_1, C_1, D_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (см. рис. 23), у которого $AB = 4$, $AD = 22$, $AA_1 = 6$.

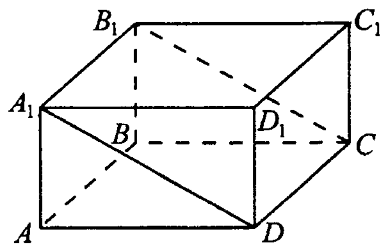


Рис. 23.

B14. Первые два часа автомобиль двигался со скоростью 65 км/ч, следующий час — со скоростью 80 км/ч, а затем три часа — со скоростью 70 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути.

B15. Найдите точку минимума функции $(x-2)^2(2x+3)+5$.

При выполнении заданий C1–C6 требуется записать полное решение и ответ.

C1. а) Решите уравнение $\cos(\pi + x) + \sin\frac{\pi + x}{2} = 1$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left(3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$.

C2. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ точка O — центр основания. Диагонали боковых граней AA_1C_1C и AA_1B_1B пересекаются в точках K и P соответственно. Найдите площадь сечения, проходящего через точки O, K, P и составляющего с плоскостью основания угол 30°, если сторона основания равна 12.

C3. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 27^{\frac{2}{x}} \geqslant 3^{\frac{2x+3}{x}} - 18, \\ \log_{x^2} 16 \leqslant 3 - \log_{2x} 64. \end{cases}$$

С4. В прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C вписана окружность. Отрезок PK — ортогональная проекция окружности на гипотенузу.

а) Докажите, что $\angle PCK = 45°$.

б) Найдите площадь $\triangle PCK$, если $AC = 5$, $BC = 12$.

С5. При каких значениях параметра a уравнение

$$2\log_{ax-5}(2x^2 - 5x + 4) = \log_{\sqrt{ax-5}}(x^2 + 2x - 6)$$

имеет единственное решение.

С6. Возможно ли в каждом из следующих случаев найти n целых чисел, сумма которых равна n и произведение тоже равно n:

а) $n = 161$;

б) $n = 19$;

в) $n = 64^k$, $k \geqslant 1$?

Вариант № 2

Часть 1

Ответом на задания В1 – В10 должно быть целое число или конечная десятичная дробь.

В1. Для приготовления маринада для огурцов на 1 литр воды требуется 14 г лимонной кислоты. Лимонная кислота продаётся в пакетиках по 20 г. Какое наименьшее число пачек нужно купить хозяйке для приготовления 23 литров маринада?

В2. 8 выпускников школы собираются продолжить обучение в вузах других городов. Они составляют 5% от числа выпускников. Сколько в школе выпускников?

В3. На диаграмме (см. рис. 24) показаны среднемесячные температуры воздуха (в градусах Цельсия) в городе N по результатам наблюдений в течение года. Укажите количество месяцев с положительной среднемесячной температурой.

В4. Независимое агентство каждый месяц определяет рейтинги R новостных сайтов на основе показателей информативности In, оперативности Op и объективности Tr публикаций. Каждый отдельный показатель оценивается целыми числами от -4 до 4. Итоговый рейтинг вычисляется по формуле $R = \left(\frac{2In + 2Op + 4Tr}{12} + 2\right) \cdot 25$. В таблице даны оценки каждого показателя для нескольких новостных сайтов. Найдите наибольший

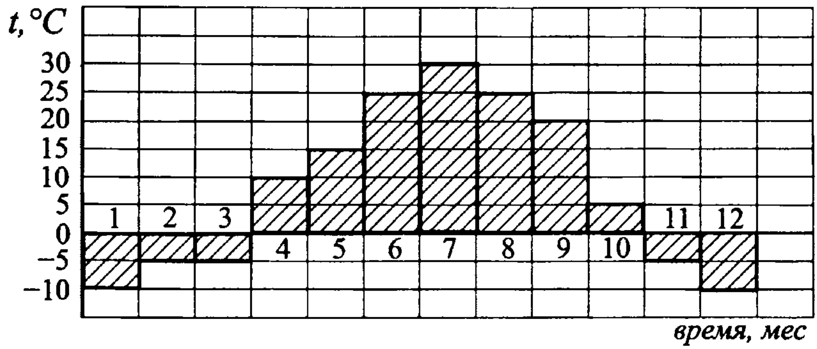


Рис. 24.

рейтинг среди сайтов, представленных в таблице. Запишите его в ответ, округлив до целого числа.

Сайт	Информативность	Оперативность	Объективность
myvrem.ru	−4	4	−4
poveru.com	0	−1	3
ogo123.ru	1	1	1
gorod17.ru	−2	4	0

B5. Найдите площадь трапеции, вершины которой имеют координаты $(1; 0)$, $(1; 8)$, $(8; 3)$, $(8; 7)$ (см. рис. 25).

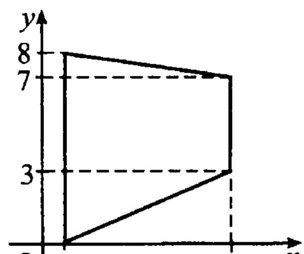


Рис. 25.

B6. В книге 400 страниц, из них на 36 есть картинки. Школьник открывает книгу на наудачу выбранной странице. Какова вероятность того, что на открытой странице не будет картинки?

B7. Решите уравнение $\frac{x-3}{9x+4} = \frac{x-3}{4x+9}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите больший из них.

B8. В четырёхугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 17$, $BC = 14$ и $CD = 22$ вписана окружность (см. рис. 26). Найдите четвёртую сторону четырёхугольника.

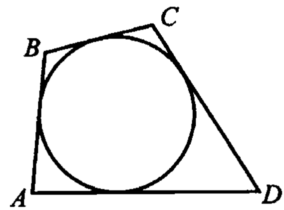


Рис. 26.

B9. На рисунке 27 изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведённая в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.

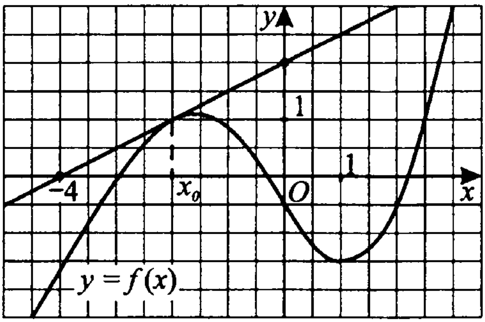


Рис. 27.

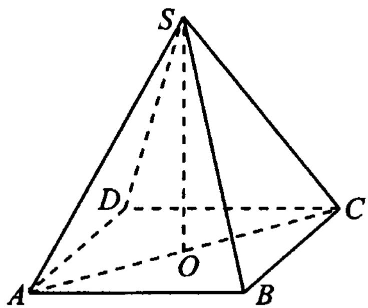


Рис. 28.

B10. Диагональ AC основания правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ равна 24. Длина бокового ребра равна 13 (см. рис. 28). Найдите высоту SO.

Часть 2

Ответом на задания B11 – B15 должно быть целое число или конечная десятичная дробь.

B11. Найдите значение выражения $\dfrac{(3a^2)^3 \cdot (4b)^2}{(12a^3b)^2}$.

B12. Независимое агентство намерено ввести рейтинг новостных интернет-изданий на основе оценок информативности In, оперативности Op, объективности публикаций Tr, а также качества сайта Q. Каждый отдельный показатель оценивается целыми числами от -4 до 4. Аналитики, составляющие формулу рейтинга, считают, что объективность ценится впятеро, информативность втрое, а оперативность вдвое дороже, чем качество сайта. Таким образом, формула приняла вид $R = \dfrac{3In + 2Op + 5Tr + Q}{A}$. Если по всем четырём показателям какое-то издание получило одну и ту же оценку, то рейтинг должен совпадать с этой оценкой. Найдите число A, при котором это условие будет выполняться.

B13. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки C, A_1, B_1, C_1, D_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB = 8$, $AD = 12$, $AA_1 = 4$ (см. рис. 29).

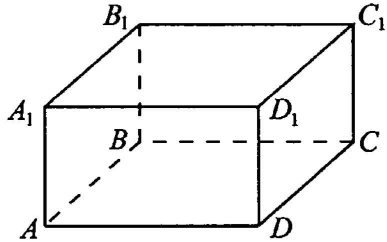


Рис. 29.

B14. В сосуд, содержащий 6 литров 15%-ного водного раствора некоторого вещества, добавили 4 л воды. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

B15. Найдите точку максимума функции $y = (x-6)^2(2x+3)+4$.

При выполнении заданий C1–C6 требуется записать полное решение и ответ.

C1. а) Решите уравнение $\cos\dfrac{3\pi+x}{2} - \cos(\pi+x) = 1$.

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left(4\pi; \dfrac{11\pi}{2}\right]$.

C2. В прямой призме $ABCA_1B_1C_1$ BK — биссектриса основания ABC. Через биссектрису и вершину A_1 проведена плоскость, составляющая с плоскостью основания угол 60°. Найдите площадь сечения, если $AB = 3$, $BC = 6$, $\angle ABC = 30^\circ$.

C3. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 125^{\frac{2}{x}} \geqslant 5^{\frac{2x+3}{x}} - 24, \\ \log_{x^2} 81 + \log_{3x} 27 \leqslant 2. \end{cases}$$

C4. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ точки K и F — середины сторон BC и AD соответственно, а точки M и N — середины диагоналей AC и BD соответственно, $KF = MN$.

а) Докажите, что угол, образованный продолжением сторон AB и DC, прямой.

б) Найдите площадь треугольника ABD, если $AB = 6$, $ND = 5$, $\angle FND = 60^\circ$.

C5. При каких отрицательных значениях параметра a уравнение

$$(a - x^2 + 6x - 4)(a + 2 - |x-3|) = 0$$

имеет ровно четыре положительных корня.

С6. Последовательность задана правилом: $f_1 = 1$, $f_n = 5f_{n-1} + 20$ при $n \in N$, $n > 1$.

а) Решите уравнение $f_n = 234567$.

б) Найдите все простые делители чисел $f_n + 5$ при $n \geqslant 2$.

в) Сколько членов этой последовательности меньше 5^{2014}?

Вариант № 3

Часть 1

Ответом на задания В1 – В10 должно быть целое число или конечная десятичная дробь.

В1. Прогулочный катер «Надежда» рассчитан на 120 пассажиров и 13 человек команды. Каждая спасательная лодка может вместить 8 человек. Какое наименьшее число лодок должно быть на катере, чтобы в случае необходимости в них можно было разместить всех пассажиров и всех членов команды?

В2. Оптовая цена футболки 240 рублей. Розничная цена на 20% выше оптовой. Какое наибольшее число таких футболок можно купить по розничной цене на 9000 рублей?

В3. На диаграмме (см. рис. 30) показана среднемесячная температура воздуха (в градусах Цельсия) на протяжении одного года в некотором городе. По горизонтали отмечается номер месяца в году, по вертикали — температура воздуха. Укажите количество месяцев, в которых среднемесячная температура воздуха была выше 5°С.

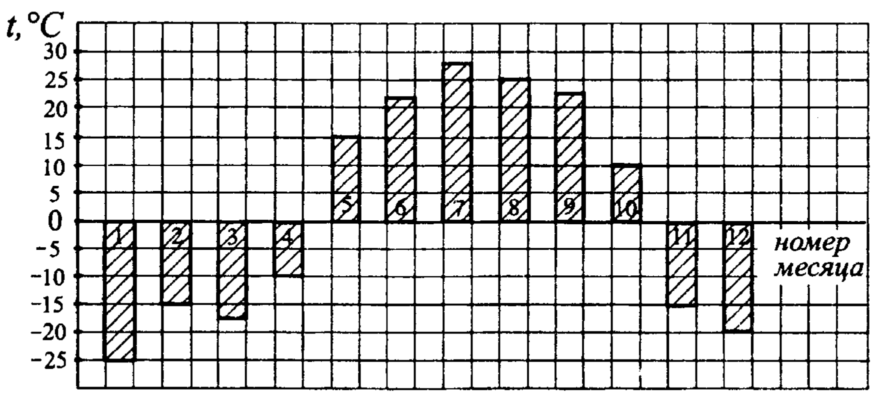


Рис. 30.

B4. В магазине бытовой техники объявлена акция: если покупатель приобретает товар на сумму свыше 25 000 рублей, он получает сертификат на 3000 рублей, который можно обменять в том же магазине на любой товар ценой не выше 3000 рублей. Если покупатель участвует в акции, он теряет право возвратить товар в магазин. Покупатель P хочет приобрести ноутбук ценой 23 500 рублей, вентилятор ценой 2800 рублей и плеер ценой 1930 рублей. В каком случае P заплатит меньше всего?

1) P купит все три товара сразу.
2) P купит сначала ноутбук и плеер, получит вентилятор за сертификат.
3) P купит сначала ноубук и вентилятор, получит плеер за сертификат.

В ответ запишите, сколько рублей заплатит P за покупку в этом случае.

B5. Найдите площадь трапеции, изображённой на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис. 31). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

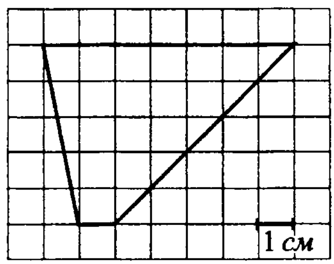


Рис. 31.

B6. Вероятность того, что новый мобильный телефон прослужит больше года, равна 0,94. Вероятность того, что он прослужит больше двух лет, равна 0,78. Найдите вероятность того, что он прослужит меньше двух лет, но больше года.

B7. Найдите корень уравнения $\log_{15}(2x + 11) = \log_{15} 4$.

B8. Хорда BC делит окружность радиуса 14 на две части, градусные величины которых относятся как 6 : 30 (см. рис. 32). Найдите хорду BC.

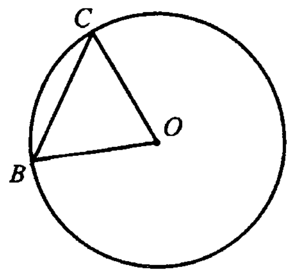


Рис. 32.

B9. Материальная точка движется прямолинейно по закону

$x(t) = -\frac{1}{5}t^5 + t^4 - t^3 + 5t$, где x — расстояние от точки отсчёта в метрах, t — время в секундах, прошедшее с начала движения. Найдите скорость точки (в м/с) в момент времени $t = 2$ с.

B10. Найдите квадрат расстояния между вершинами C_2 и A_3 многогранника, изображённого на рисунке 33. Все двугранные углы многогранника прямые.

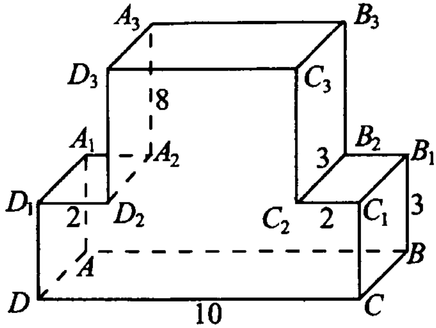


Рис. 33.

Часть 2

Ответом на задания B11 – B15 должно быть целое число или конечная десятичная дробь.

B11. Найдите значение выражения $\log_5 12{,}5 + \log_5 10$.

B12. Для одного из предприятий зависимость объёма спроса на продукцию k (единиц в месяц) от цены q (тыс. руб.) задаётся формулой $k = 150 - 10q$. Определите максимальный уровень цены q (тыс. руб.), при котором значение выручки предприятия за месяц $p = q \cdot k$ составило бы не менее 260 тыс. рублей.

B13. Площадь большого круга шара равна 22,5. Найдите площадь поверхности шара (см. рис. 34).

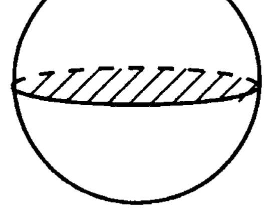


Рис. 34.

B14. Маша и Даша выполняют одинаковый тест. Маша за час отвечает на 15 вопросов теста, а Даша — на 12. Они одновременно начали отвечать на вопросы теста, и Даша закончила свой тест на 20 минут позже Маши. Сколько вопросов содержал тест?

B15. Найдите точку минимума функции
$y = 2x^3 - 150x + 11$.

При выполнении заданий С1–С6 требуется записать полное решение и ответ.

С1. а) Решите уравнение $2\cos 2x = \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) - 2$.

б) Найдите все корни, принадлежащие отрезку $[0; \pi]$.

С2. В основании прямой призмы лежит равнобедренный прямоугольный треугольник. Найдите площадь сечения, проходящего через катет нижнего основания и середину гипотенузы верхнего основания, если расстояние между основаниями равно 4 и равно расстоянию от вершины нижнего основания до плоскости сечения.

С3. Решите систему неравенств $\begin{cases} 2^x \leqslant 3, \\ \log_x\left(\frac{3}{2}x - 1\right) \geqslant -1. \end{cases}$

С4. В параллелограмме $ABCD$ биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке A_1, биссектриса угла C пересекает сторону AD в точке C_1. K — точка пересечения BC_1 и AA_1, M — точка пересечения A_1D и CC_1. Площадь четырёхугольника, ограниченного прямыми AA_1, CC_1, BC_1 и DA_1, равна 6. $AB : BC = 3 : 5$.
а) Докажите, что KA_1MC_1 — параллелограмм;
б) Найдите площадь параллелограмма $ABCD$.

С5. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\frac{2}{x+1} = a|x-3|$ имеет более двух корней на промежутке $[0; \infty)$.

С6. Первый член бесконечной числовой последовательности равен 1, а каждый последующий в три раза меньше предыдущего.
а) Можно ли из данной последовательности выделить бесконечную геометрическую прогрессию, сумма членов которой равна $\frac{1}{8}$?

б) Можно ли из данной последовательности выделить бесконечную геометрическую прогрессию, сумма членов которой равна $\frac{1}{7}$?

в) Можно ли из данной последовательности удалить несколько членов (не обязательно конечное число) так, чтобы сумма всех членов оставшейся последовательности была равна $1\frac{3}{8}$? Ответ обоснуйте.

Вариант № 4

Часть 1

Ответом на задания В1 – В10 должно быть целое число или конечная десятичная дробь.

B1. В летнем лагере на каждого участника полагается 400 граммов риса в день. В лагере 143 человека. Сколько килограммовых пачек риса понадобится на весь лагерь на 8 дней?

B2. Билет в театр для взрослого стоит 420 рублей. Стоимость билета для школьника составляет 50% от стоимости билета для взрослого. Группа состоит из 16 школьников и 4 взрослых. Сколько рублей стоят билеты на всю группу?

B3. На диаграмме (см. рис. 35) показана среднемесячная температура воздуха (в градусах Цельсия) в г. Челябинске. Найдите количество месяцев со среднемесячной температурой выше 15°С.

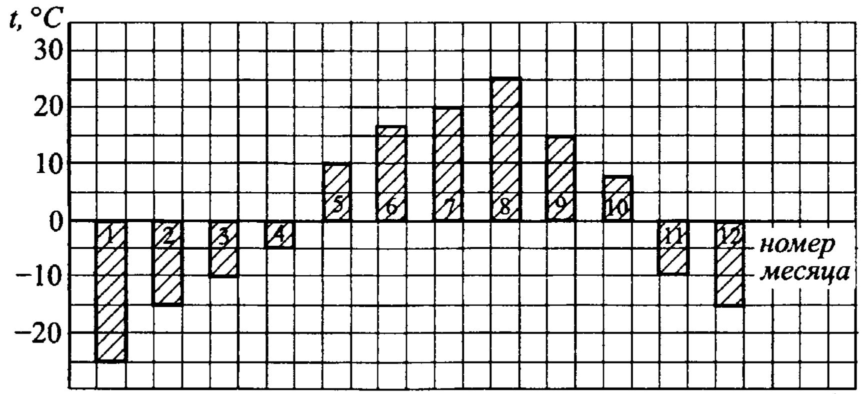


Рис. 35.

B4. От дома до огорода Семён Николаевич может доехать на автобусе, на электричке или на маршрутном такси. В таблице указано время, которое нужно затратить на каждый участок пути. Какое наименьшее время потребуется на дорогу? Ответ дайте в часах.

	1	2	3
Автобусом	От дома до автобусной остановки — 32 мин	Автобус в пути — 3 ч 7 минут	От автобусной остановки до огорода пешком — 36 мин
Электричкой	От дома до станции железной дороги — 43 мин	Электричкой в пути — 2 ч 37 мин	От станции до огорода пешком — 46 мин
Маршрутным такси	От дома до остановки маршрутного такси — 32 мин	Маршрутное такси в пути — 2 ч 17 мин	От остановки маршрутного такси до огорода пешком — 1 ч 23 мин

B5. Найдите площадь ромба, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис. 36). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

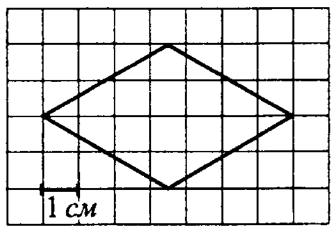


Рис. 36.

B6. Из районного центра в деревню ежедневно ходит автобус. Вероятность того, что в среду в автобусе окажется меньше 40 пассажиров, равна 0,89. Вероятность того, что окажется меньше 28 пассажиров, равна 0,37. Найдите вероятность того, что число пассажиров будет от 28 до 39.

B7. Найдите корень уравнения $\log_{0,5}(5x-1) = \log_{0,5} 14$.

B8. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABC равен 125°, угол CAD равен 55° (см. рис. 37). Найдите угол ABD. Ответ дайте в градусах.

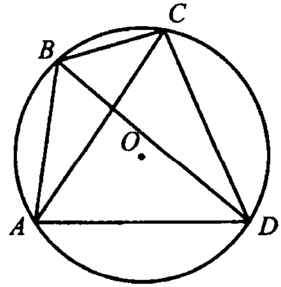


Рис. 37.

B9. Материальная точка движется прямолинейно по закону

$x(t) = \frac{1}{3}t^3 - 2{,}5t^2 - 2t + 2$, где x — расстояние от точки отсчёта в метрах, t — время в секундах, прошедшее с начала движения. В какой момент времени (в секундах) скорость точки была равна 4 м/с?

B10. Найдите квадрат расстояния между вершинами A и C_2 многогранника, изображённого на рисунке 38. Все двугранные углы многогранника прямые.

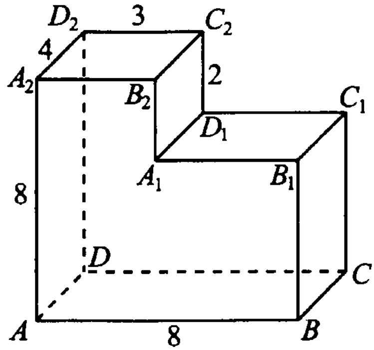


Рис. 38.

Часть 2

Ответом на задания B11 – B15 должно быть целое число или конечная десятичная дробь.

B11. Найдите значение выражения $\frac{42}{5^{\log_5 7}}$.

B12. Для одного из предприятий зависимость объёма спроса на продукцию p (единиц в месяц) от цены k (тыс. руб.) задаётся формулой $p = 275 - 22k$. Определите максимальный уровень цены k (тыс. руб.), при котором значение выручки предприятия за месяц $q = p \cdot k$ составило бы не менее 550 тыс. рублей.

B13. Во сколько раз увеличится площадь поверхности октаэдра, если все рёбра увеличить в 1,7 раза?

B14. В 2006 году в посёлке Далёкий Лес проживало 3000 человек. В 2007 году количество жителей снизилось на 12%, а в 2008 году — на 20% по сравнению с 2007 годом. Сколько человек стало проживать в посёлке в 2008 году?

B15. Найдите точку максимума функции $y = -\sqrt{x^2 - 8x + 17}$.

При выполнении заданий С1–С6 требуется записать полное решение и ответ.

С1. а) Решите уравнение $2\cos 2x + \cos x = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - 2$.

б) Найдите все корни, принадлежащие отрезку $[\pi; 2\pi]$.

С2. В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с острым углом $A = 30^\circ$. Найдите площадь сечения, проходящего через больший катет нижнего основания и середину гипотенузы верхнего основания, если расстояние между основаниями равно 5 и равно расстоянию от вершины нижнего основания до плоскости сечения.

С3. Решите систему $\begin{cases} 3 \cdot 4^x - 12 \cdot 2^x - 15 \leqslant 0, \\ \log_{7-3x}(x+6) \leqslant 0. \end{cases}$

С4. На стороне BC параллелограмма $ABCD$ взята точка M, а отрезки AM и BD пересекаются в точке K. $BK : KD = 3 : 8$.

а) Докажите, что $\frac{S_{ABK}}{S_{ABCD}} = \frac{3}{22}$.

б) В каком отношении делит площадь параллелограмма $ABCD$ прямая AM?

С5. При каких значениях параметра a уравнение
$|x^2 - 2x - 3| - 2a = |x - a| - 1$ имеет ровно 3 корня?

С6. Первый член бесконечной числовой последовательности равен 1, а каждый последующий в четыре раза меньше предыдущего.

а) Можно ли из данной последовательности выделить бесконечную геометрическую прогрессию, сумма членов которой равна $\frac{1}{15}$?

б) Можно ли из данной последовательности выделить бесконечную геометрическую прогрессию, сумма членов которой равна $\frac{1}{7}$?

в) Можно ли из данной последовательности удалить несколько членов (не обязательно конечное число) так, чтобы сумма оставшихся членов последовательности была равна $\frac{20}{63}$? Ответ обоснуйте.

Вариант № 5

Часть 1

Ответом на задания B1 – B10 должно быть целое число или конечная десятичная дробь.

B1. Летом килограмм помидоров стоит 40 рублей. Валентина Львовна купила 3 кг 300 г помидоров. Сколько рублей сдачи она должна получить с 1000 рублей?

B2. Шахматный набор стоил 1200 рублей. После снижения цены он стал стоить 1020 рублей. На сколько процентов была снижена цена на футболку?

B3. В магазине города N представлены стулья различных мебельных фабрик. На диаграмме (см. рис. 39) показано соответствующее распределение проданных стульев за 2011 год. Среди представленных фабрик первое место по продаваемости стульев заняла фабрика «Плетень», десятое — «Декабрь». Какое место заняла фабрика «Афродита»?

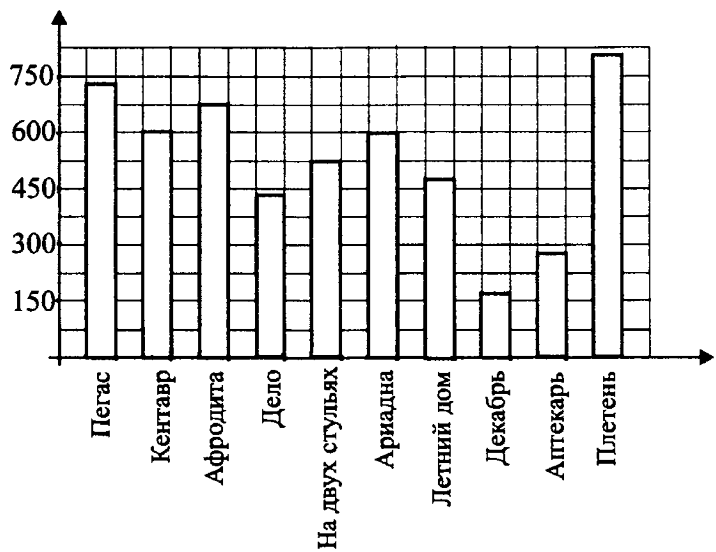


Рис. 39.

B4. Независимая экспертная лаборатория определяет рейтинг R бытовых приборов на основе коэффициента ценности, равного 0,005 средней цены P, показателей функциональности F, качества Q и дизайна D. Каждый из показателей оценивается целым числом от 0 до 6. Итоговый рейтинг вычисляется по формуле $R = 2(2F + 3Q + 2D) - 0{,}005P$. В таблице даны средняя цена и оценки каждого показателя для нескольких моделей кухонных воздухоочистителей. Определите наивысший рейтинг представленных в таблице кухонных воздухоочистителей.

Модель воздухоочистителя	Средняя цена	Функциональность	Качество	Дизайн
А	5200	3	4	4
Б	5400	3	3	6
В	8800	6	6	3
Г	3600	3	3	4

B5. Найдите площадь треугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис. 40). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

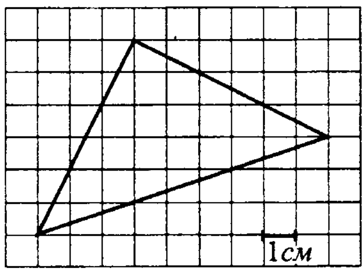


Рис. 40.

B6. На чемпионате мира по фигурному катанию участвуют 75 спортсменов, среди них 12 — из России, 8 — из Китая. Порядок выступлений определяется жребием. Найдите вероятность того, что 13-м будет выступать спортсмен из России.

B7. Найдите корень уравнения $3^{5x-17} = 27$.

B8. Найдите синус угла AOB (см. рис. 41). В ответе укажите значение синуса, умноженное на $\sqrt{13}$.

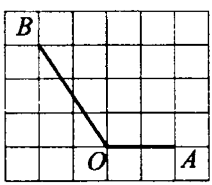


Рис. 41.

B9. На рисунке 42 изображён график дифференцируемой функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечены восемь точек $x_1, x_2, \ldots, x_8$. Среди этих точек найдите все точки, в которых производная функции $f(x)$ положительна. В ответ запишите количество найденных точек.

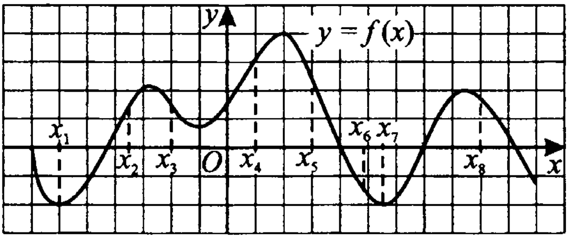


Рис. 42.

B10. Найдите квадрат расстояния между вершинами C_1 и A_2 многогранника, изображённого на рисунке 43. Все двугранные углы многогранника прямые.

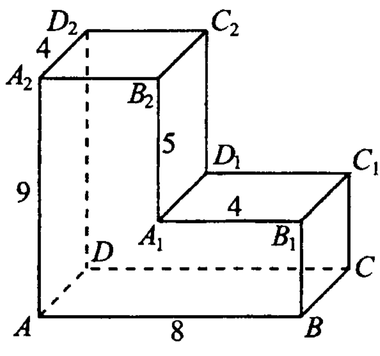


Рис. 43.

Часть 2

Ответом на задания B11–B15 должно быть целое число или конечная десятичная дробь.

B11. Найдите значение выражения $\dfrac{3-7\sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \dfrac{3\sqrt{x}}{x}$ при $x > 0$.

B12. Рейтинг R интернет-магазина вычисляется по формуле $R = r_{\text{пок}} - \dfrac{r_{\text{пок}} - r_{\text{экс}}}{(K+1)^{\frac{0{,}02K}{r_{\text{пок}}+0{,}1}}}$, где $r_{\text{пок}}$ — средняя оценка магазина покупателями (от 0 до 3), $r_{\text{экс}}$ — оценка магазина экспертами (от 0 до 3) и K — число покупателей, оценивших магазин.

Найдите рейтинг интернет-магазина «Выше солнца», если число покупателей, оставивших отзыв о магазине, равно 63, их средняя оценка равна 2,42, а оценка экспертов равна 1,62.

B13. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (см. рис. 44) известны длины рёбер: $CD = 15$, $AD = 8$, $BB_1 = 13$. Найдите площадь сечения, проходящего через вершины B, D и B_1.

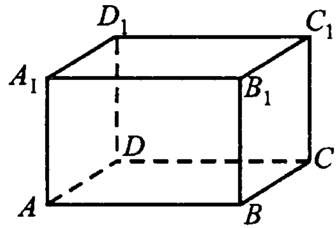


Рис. 44.

B14. Расстояние между городами A и B составляет 641 км. Из города A в город B выехал автомобиль со скоростью 75 км/ч, через 4 часа навстречу ему из города B выехал со скоростью 80 км/ч второй автомобиль. На каком расстоянии от города A (в км) автомобили поравняются?

B15. Найдите наибольшее значение функции $y = (10 - x)e^{x-9}$ на отрезке $[8; 10]$.

При выполнении заданий C1—C6 требуется записать полное решение и ответ.

C1. а) Решите уравнение $3\cos x + 2\cos^2\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{-5\pi}{4}; \frac{8\pi}{3}\right)$.

C2. В правильную четырёхугольную пирамиду $SABCD$ вписана сфера. Найдите её радиус, если $AB = 2$, $SD = \sqrt{5}$.

C3. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_5^2(x+2) \leqslant 2 - \log_{25}(x^2+4x+4), \\ \dfrac{x^2+4x-5}{x-1} + \dfrac{3}{x-2} \leqslant \dfrac{3x+6}{4-x^2}. \end{cases}$$

C4. В одну и ту же окружность вписаны треугольники ABC и ADE так, что отрезки BC и DE пересекаются в точке M, точка D лежит на дуге BC, не содержащей точки A. Четырёхугольник, являющийся пересечением треугольников ABC и ADE, вписан в окружность.

а) Докажите, что треугольник BDM равнобедренный.

б) Найдите угол BAE, если $\angle BMD = 37°$.

C5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система $\begin{cases} |x| = a - |y|, \\ y + 5a = ax + 4 \end{cases}$ имеет ровно одно решение.

C6. Даны десять различных натуральных чисел, записанных в порядке возрастания.

а) Могут ли эти числа образовывать арифметическую прогрессию, если сумма первого и четвёртого из них равна 143, а сумма всех чисел — 805?

б) Могут ли эти числа образовывать арифметическую прогрессию, если сумма первого и четвёртого из них равна 147, а сумма всех чисел — 875?

в) Могут ли эти десять чисел образовывать геометрическую прогрессию, если их сумма равна $101 \cdot 670$?

Вариант № 6

Часть 1

Ответом на задания B1—B10 должно быть целое число или конечная десятичная дробь.

B1. Таксист за месяц проехал 8000 км. Стоимость 1 литра бензина — 30 рублей. Средний расход бензина на 100 км составляет 8 литров. Сколько рублей потратил таксист на бензин за этот месяц?

B2. Одна книга из серии «От Кантемира до Кушнера» стоит 180 рублей. Какое наибольшее количество книг этой серии можно купить на 1050 рублей, если скидка составляет 25%?

B3. На рисунке 45 точками показано суточное количество осадков, выпавших в городе Томске 22 октября в 1925, 1930, 1935, 1940, 1945, 1955, 1960, 1965 годах. По горизонтали указываются годы, по вертикали — количество осадков, выпавших в соответствующий год, в миллиметрах. Для наглядности точки соединены линией. Определите по рисунку, какое наибольшее количество осадков выпало 22 октября в Томске в рассмотренные годы. Ответ дайте в миллиметрах.

B4. Для транспортировки 73 тонн сахара на 800 км можно воспользоваться услугами одной из трёх фирм-перевозчиков. Стоимость перевозки и грузоподъёмность автомобилей для каждого перевозчика указана в таблице. Сколько рублей будет стоить самая дешёвая перевозка?

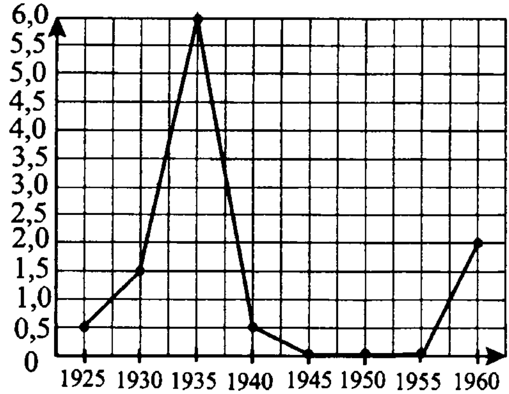


Рис. 45.

Поставщик	Стоимость перевозки одним автомобилем (руб. на 100 км)	Грузоподъёмность автомобилей
Отрочество	4100	4,5
Юность	9300	12
Зрелость	8300	10

B5. Найдите площадь прямоугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис. 46). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

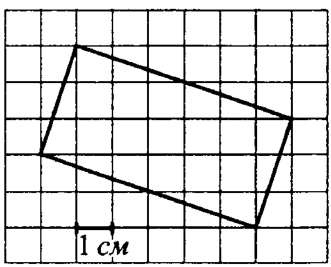


Рис. 46.

B6. Завод производит мобильные телефоны. В среднем на 160 качественных телефонов приходится 40 телефонов со скрытыми дефектами. Найдите вероятность того, что купленный мобильный телефон этого завода окажется качественным.

B7. Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{4}\right)^{11-9x} = \frac{1}{16}$.

B8. Радиус окружности, описанной около правильного треугольника, равен 8. Найдите высоту этого треугольника (см. рис. 47).

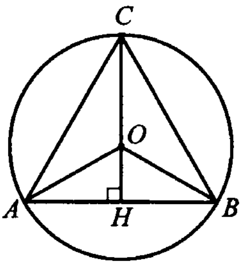


Рис. 47.

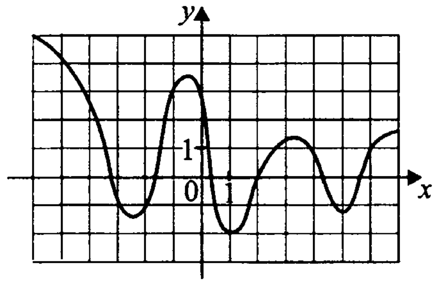


Рис. 48.

B9. На рисунке 48 изображён график функции $y = F(x)$ — одной из первообразных некоторой функции $f(x)$, определённой на интервале $(-6; 7)$. Пользуясь рисунком, определите количество решений уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[-3; 4]$.

B10. Найдите квадрат расстояния между вершинами A и B_2 многогранника, изображённого на рисунке 49.

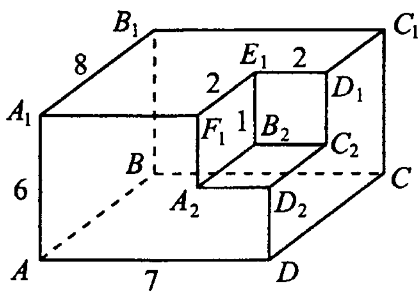


Рис. 49.

Часть 2

Ответом на задания B11–B15 должно быть целое число или конечная десятичная дробь.

B11. Найдите значение выражения $\left(\sqrt{3\frac{5}{17}} - \sqrt{7\frac{7}{17}}\right) : \sqrt{\frac{7}{34}}$.

B12. Небольшой камень бросают под некоторым углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Найдите, при каком наименьшем значении угла (в градусах) камень перелетит через реку шириной 7,2 метра, если расстояние, которое он преодолевает, вычисляется по формуле $L = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha$ (м), где $v_0 = 12$ м/с — начальная скорость камня, а $g = 10$ м/с^2 — ускорение свободного падения.

B13. Объём цилиндра равен 9. У конуса радиус основания в 3 раза больше, а высота в 2 раза меньше. Найдите объём конуса.

B14. Анна, Мария, Людмила и Александра учредили компанию с уставным капиталом 240 000 рублей. Анна внесла 15% уставного капитала, Мария — 43 200 рублей, Людмила — 0,25 уставного капитала, а оставшуюся часть внесла Александра. Учредители договорились, что полученную прибыль они будут делить пропорционально внесённому вкладу. Найдите сумму (в рублях), причитающуюся Александре, если годовая прибыль компании составила 820 000 рублей.

B15. Найдите точку минимума функции $y = 5 + \log_4(x^2 - 8x + 21)$.

При выполнении заданий C1–C6 требуется записать полное решение и ответ.

C1. а) Решите уравнение $2\sin^2\left(\frac{7\pi}{2} + x\right) = 5\sin x + 4$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{2\pi}{3}; \frac{19\pi}{6}\right)$.

C2. В конус вписана сфера радиуса 1. Найдите площадь сечения конуса плоскостью, параллельной плоскости основания и касающейся сферы, если радиус основания конуса равен $\sqrt{3}$.

C3. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{x^2 - 3x - 10}{x - 5} \leqslant \dfrac{1}{x - 4} + \dfrac{6x + 24}{x^2 - 16}, \\ 2\log_9(x^2 + 10x + 25) \geqslant \log_3^2(x + 5) - 3. \end{cases}$$

C4. В одну и ту же окружность вписаны треугольники ABC и ADE так, что отрезки BC и DE пересекаются в точке M, AD и BC — в точке K, AC и DE — в точке N. Около четырёхугольника $AKMN$ описана окружность.

а) Докажите, что треугольники KDM и ADN подобны.

б) Найдите угол DEC, если $\angle BME = 165°$.

С5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система $\begin{cases} 2|y| = 2a - |x|, \\ y + 6a = ax + 4 \end{cases}$ имеет ровно одно решение.

С6. Даны 15 различных натуральных чисел, записанных в порядке возрастания.

а) Могут ли эти числа образовывать арифметическую прогрессию, если сумма первого, третьего и седьмого из них равна 125, а сумма всех чисел — 885?

б) Могут ли эти числа образовывать арифметическую прогрессию, если сумма первого, третьего и седьмого из них равна 90, а сумма всех чисел — 810?

в) Могут ли первые восемь из этих чисел образовывать геометрическую прогрессию с целым знаменателем, если сумма этих восьми чисел равна $103 \cdot 994$?

Вариант № 7

Часть 1

Ответом на задания В1–В10 должно быть целое число или конечная десятичная дробь.

В1. На день рождения полагается дарить букет из нечётного числа цветов. Тюльпаны стоят 120 рублей за штуку. У Юры есть 800 рублей. Из какого наибольшего числа тюльпанов он может купить букет Оле на день рождения?

В2. Одна поездка в маршрутном такси стоит 20 рублей. Какое наибольшее число поездок можно будет совершить на 1600 рублей после повышения цены проезда на 30%?

В3. На рисунке 50 представлено изменение температуры в течение одного из дней сентября 2011 года в городе Самара. По горизонтали отмечено время в часах, по вертикали — температура воздуха в градусах Цельсия.

Определите по рисунку температуру воздуха (в градусах Цельсия) в 12 часов дня.

В4. В первом банке одну украинскую гривну можно купить за 4,23 рубля. Во втором банке 40 гривен — за 164 рубля. В третьем банке 30 гривен — за 122 рубля 40 копеек. Какую наименьшую сумму (в рублях) придётся заплатить за 120 гривен?

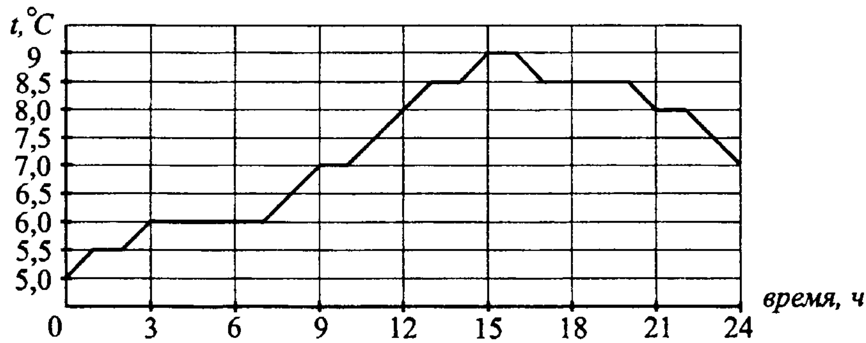


Рис. 50.

B5. KL — средняя линия треугольника ABC, параллельная стороне BC (см. рис. 51). Площадь треугольника ABC равна 108. Найдите площадь треугольника KAL.

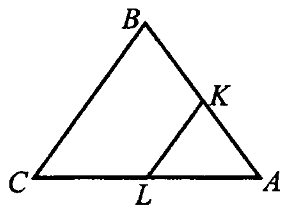


Рис. 51.

B6. Рядом находятся два автомата для продажи кофе. Каждый из них может быть неисправен с вероятностью 0,2 независимо от другого автомата. Найдите вероятность того, что хотя бы один из этих автоматов исправен.

B7. Найдите корень уравнения $\sqrt{\frac{2x-8}{4}} = 3$.

B8. В треугольнике ABC $AC = BC = 68$, $\sin A = \frac{8}{17}$ (см. рис. 52). Найдите AB.

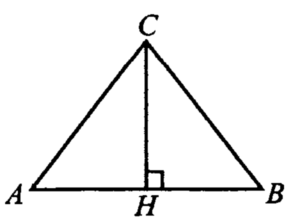


Рис. 52.

B9. На рисунке 53 изображён график функции $y = f(x)$, определённой и дифференцируемой на интервале $(-6; 7)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = 4$ или совпадает с ней.

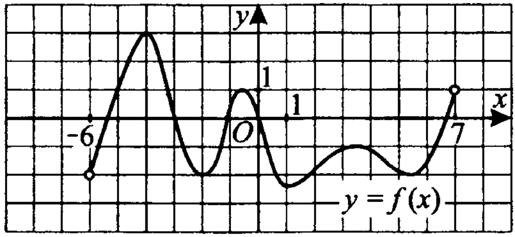


Рис. 53.

B10. В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с основаниями $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ сторона основания AB равна 4, а высота AA_1 равна $8\sqrt{2}$. Найдите расстояние между точкой C и серединой бокового ребра AA_1.

Часть 2

Ответом на задания B11–B15 должно быть целое число или конечная десятичная дробь.

B11. Найдите значение выражения $8\sqrt{6}\sin\left(\frac{9\pi}{4}\right) \cdot \sin\frac{\pi}{3}$.

B12. В розетку электросети подключены приборы, общее сопротивление которых составляет 90 Ом. Параллельно с ними в розетку предполагается подключить электрочайник. Каково наименьшее возможное сопротивление (в омах) электрочайника, если известно, что при параллельном соединении двух проводников с сопротивлениями R_1 и R_2 их общее сопротивление задаётся формулой $R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$, а для нормального функционирования электросети общее сопротивление в ней должно быть не менее 36 Ом?

B13. Дана правильная шестиугольная призма $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, площадь основания которой равна 17, а боковое ребро 8. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки C, D, E, F, C_1, D_1, E_1, F_1.

B14. Поезд, двигаясь равномерно со скоростью 90 км/ч, проезжает мимо семафора за 18 с. Найдите длину поезда (в м).

B15. Найдите точку максимума функции $y = \ln(x+5)^4 - 10x$.

При выполнении заданий C1 – C6 требуется записать полное решение и ответ.

C1. а) Решите уравнение $\sin 2x + \sin\left(\frac{5\pi}{2} - x\right) = 0$.

б) Найдите корни уравнения на промежутке $(-2\pi; -0{,}5\pi]$.

C2. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ боковое ребро равно 3, а сторона основания — 5. Найдите косинус угла между плоскостями ABC_1 и A_1B_1C.

C3. Решите систему неравенств:
$$\begin{cases} \log_{(5x+7)}(4x+1)\log_{(4x+1)}(18x+3)\log_{(18x+3)}(9-x^2) \geqslant 0, \\ \dfrac{3x^5+15x^4-6x-28}{x+5} + \dfrac{150x^4-6x^6-380}{2x^2-50} \leqslant 2. \end{cases}$$

C4. Диагонали AC и BD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке E. Площадь треугольника AED равна 75, а точка E делит одну из диагоналей в отношении 5 : 1. BC — основание трапеции.

а) Докажите, что площади треугольников ABE и CED равны.

б) Найдите площадь трапеции.

C5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений
$$\begin{cases} y+1 = ax^2, \\ x - \sqrt{17-y^2-16y} = 3 \end{cases}$$
имеет хотя бы одно решение.

C6. На встрече собрались все участники двух походов (некоторые были в обоих походах, некоторые — только в одном). В первом походе было две трети мальчиков и треть девочек, во втором — поровну тех и других.

а) Каково наибольшее возможное число участников встречи, если всего во встрече участвовало 6 мальчиков?

б) Каково наибольшее возможное число мальчиков среди участников встречи, если всего во встрече участвовало 20 человек?

в) Какова наибольшая и какова наименьшая возможная доля мальчиков среди участников встречи?

Вариант № 8

Часть 1

Ответом на задания В1–В10 должно быть целое число или конечная десятичная дробь.

В1. Одна роза стоит 80 рублей. В пятницу в цветочном магазине действует специальное предложение: заплатив за две розы, покупатель получает третью розу в подарок. Какое наибольшее количество роз можно купить на 500 рублей в пятницу в этом магазине?

В2. Клиент взял в банке кредит 18 000 рублей на год под 22%. Он должен погашать кредит, внося в банк ежемесячно одинаковую сумму денег, с тем чтобы через год выплатить всю сумму, взятую в кредит, вместе с процентами. Сколько рублей он должен вносить в банк ежемесячно?

В3. На диаграмме (см. рис. 54) показано изменение температуры воздуха на протяжении четырёх суток. По горизонтали указывается дата, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия. Определите по диаграмме самую высокую температуру 16 марта. Ответ дайте в градусах Цельсия.

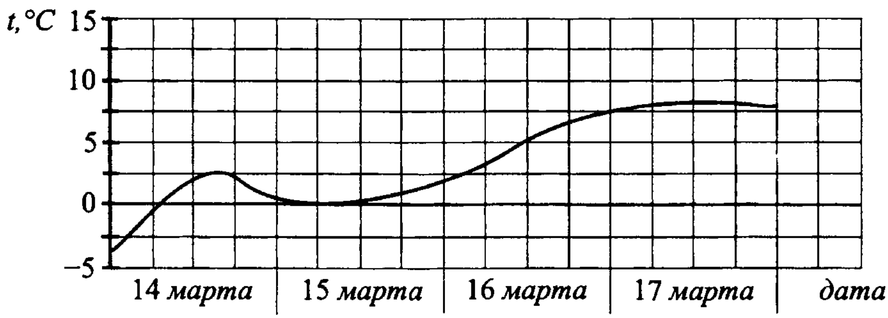


Рис. 54.

В4. Василий Петрович загружает на свой компьютер из Интернета файл размером 78 Мб за 63 секунды, Василий Егорович — 79 Мб за 64 секунды, а Василий Васильевич — 77 Мб за 62 секунды. Сколько секунд будет загружаться файл объёмом 462 Мб на компьютер с наибольшей скоростью загрузки из сети Интернет?

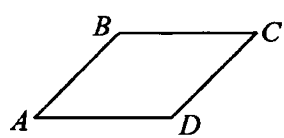


Рис. 55.

В5. Периметр параллелограмма равен 50. Меньшая сторона равна 7 (см. рис. 55). Найдите бóльшую сторону параллелограмма.

B6. Иван Петрович совершает прогулку из точки A по дорожкам парка. На каждой развилке он наугад выбирает следующую дорожку, не возвращаясь обратно. Схема дорожек показана на рисунке 56. Найдите вероятность того, что Иван Петрович попадёт в точку E.

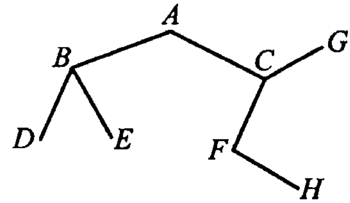


Рис. 56.

B7. Найдите корень уравнения $\sqrt{\dfrac{4}{5x-2}} = 1$.

B8. Хорды MN и KL пересекаются в точке D (см. рис. 57). Найдите ND, если $KD = 4$, $DL = 27$, $MD = 36$.

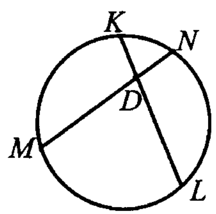


Рис. 57.

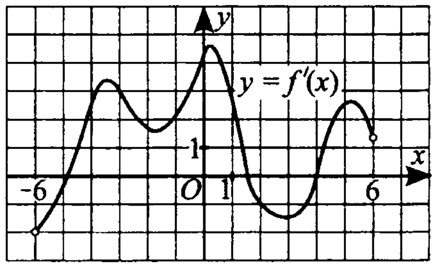


Рис. 58.

B9. На рисунке 58 изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-6; 6)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = 2x - 8$ или совпадает с ней.

B10. Найдите расстояние между вершинами D и B_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, для которого $AB = AA_1 = 17{,}5$, $AD = 17{,}5\sqrt{2}$.

Часть 2

Ответом на задания B11–B15 должно быть целое число или конечная десятичная дробь.

B11. Найдите значение выражения $\dfrac{6\sin 37^\circ \cdot \sin 53^\circ}{\sin 74^\circ}$.

B12. Зависимость объёма спроса q (единиц в месяц) на продукцию предприятия от цены p (тыс. руб.) задаётся формулой $q = 72 - 6p$. Выручка предприятия за месяц r (в тыс. руб.) вычисляется по формуле $r(p) = q \cdot p$. Определите наибольшую цену p, при которой месячная выручка $r(p)$ составит не менее 120 тыс. руб. Ответ приведите в тыс. руб.

B13. Радиус основания конуса равен 4, высота — 93. Найдите объём V части этого конуса, изображённой на рисунке 59. В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.

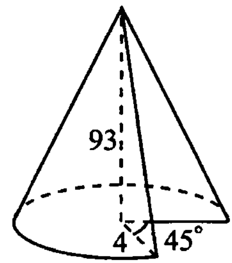


Рис. 59.

B14. Один токарь может выполнить заказ за 10 часов, второй — за 15 часов, а третий — за 12 часов. За сколько часов три токаря выполнят заказ, работая вместе?

B15. Найдите наибольшее значение функции $y = 5^{-3x^2+18x-24}$.

При выполнении заданий C1 – C6 требуется записать полное решение и ответ.

C1. а) Решите уравнение $\cos 2x + \sin\left(x - \frac{5\pi}{2}\right) + 1 = 0$.

б) Найдите корни уравнения на промежутке $(-2{,}5\pi; -0{,}5\pi]$.

C2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между плоскостью грани AA_1B_1B и плоскостью BC_1D, если $AB = BB_1 = 3$, $BC = 5$.

C3. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{(3x+11)}(5x+1) \cdot \log_{(5x+1)}(15x+3) \cdot \log_{(15x+3)}(16-x^2) \geqslant 0, \\ \dfrac{20x^5 + 2x^4 - 70x + 33}{10x+1} - \dfrac{600x^6 - 6x^4 - 96}{300x^2 - 3} \leqslant 1. \end{cases}$$

C4. Площадь трапеции $ABCD$ равна 120, а основание AD трапеции втрое больше другого основания. Отрезок, соединяющий точку P основания AD с вершиной B, пересекается с диагональю AC трапеции в точке M, точка P делит основание AD в отношении $1:2$.

а) Докажите, что либо $ABCP$, либо $BCDP$ — параллелограмм.

б) Найдите площадь четырёхугольника $CMPD$.

C5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} y - 5 = ax^2, \\ x + \sqrt{5 - y^2 + 4y} = -4 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

C6. На творческой встрече собрались все участники двух конференций (некоторые участвовали в обеих конференциях, некоторые — только в одной). В первой конференции приняли участие четыре пятых учителей и пятая часть психологов, во второй — поровну тех и других.

а) Каково наименьшее возможное число участников встречи, если всего во встрече участвовало 5 учителей?

б) Каково наибольшее возможное число учителей среди участников встречи, если всего во встрече участвовало 30 человек?

в) Какова наибольшая и какова наименьшая возможная доля учителей среди участников встречи?

Вариант № 9

Часть 1

Ответом на задания B1 – B10 должно быть целое число или конечная десятичная дробь.

B1. В школьную библиотеку привезли новые учебники по литературе для 5 – 11 классов по 220 штук для каждого класса. Все книги одинаковы по размеру. В книжном шкафу 8 полок, на каждой полке помещается 28 учебников. Сколько шкафов можно полностью заполнить новыми учебниками?

B2. В городе R живёт 200 000 жителей. Среди них 10% детей и подростков. Среди взрослых 50% не работает (пенсионеры, студенты и т. п.). Сколько взрослых жителей в городе R работает?

B3. На диаграмме (см. рис. 60) показано изменение среднегодового курса доллара за годы с 2003 по 2010 год. На оси абсцисс отмечается время в годах, на оси ординат — стоимость доллара в рублях. Укажите самый большой среднегодовой курс доллара за период с 2007 по 2010 годы. Ответ дайте в рублях.

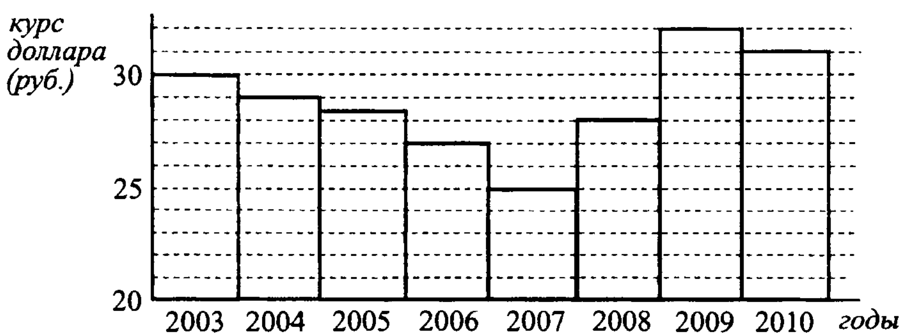


Рис. 60.

В4. Для изготовления книжных полок требуется заказать 85 одинаковых стёкол в одной из трёх фирм. Площадь каждого стекла — 0,6 м^2. В таблице приведены цены на стекло, а также на резку стекла и шлифовку края. Сколько рублей будет стоить самый дешёвый заказ?

Фирма	Цена стекла (руб. за м^2)	Резка и шлифовка (руб. за одно стекло)
«Резка»	440	100
«Семь раз отмерь»	480	75
«Авось»	530	50

В5. Найдите площадь параллелограмма, вершины которого имеют координаты $(0; 1)$, $(1; 6)$, $(7; 5)$, $(6; 0)$ (см. рис. 61).

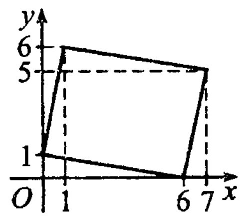


Рис. 61.

В6. Петя и Вася играют в кости. Каждый бросает кубик по одному разу. Выигрывает тот, у кого выпало больше очков (в случае равенства — ничья). Петя бросил кубик, и у него выпало 3 очка. Найдите вероятность того, что Вася выиграет.

В7. Найдите корень уравнения $5x^2+7x-6=0$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите больший из них.

В8. Диагонали ромба относятся как 3 : 4. Периметр ромба равен 300. Найдите высоту ромба.

В9. На рисунке 62 изображён график дифференцируемой функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечены семь точек: x_1, x_2, $\ldots$, x_7. Среди этих точек найдите все точки, в которых производная функции $f(x)$ отрицательна. В ответ запишите количество найденных точек.

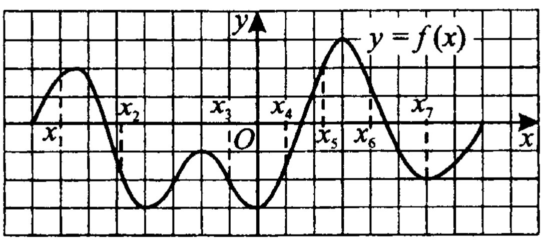


Рис. 62.

В10. Найдите высоту правильной треугольной пирамиды, если сторона основания равна 18, а апофема равна 14.

Часть 2

Ответом на задания В11–В15 должно быть целое число или конечная десятичная дробь.

В11. Найдите значение выражения $\dfrac{\sqrt[4]{b^3}\cdot(\sqrt{7}b)^2}{b^{2,75}}$ при $b>0$.

В12. Зависимость температуры (в градусах Кельвина) от времени для нагревательного элемента некоторого прибора была получена экспериментально, и на исследуемом интервале температура имеет вид $T(t)=T_0+at+bt^2$, где t — время в минутах, $T_0=120$ К, $b=-\frac{1}{4}$ К/мин^2, $a=39{,}5$ К/мин. Известно, что при температуре нагревателя свыше 1080 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключить. Найдите, через какое наибольшее время после начала работы нужно отключить прибор. Ответ выразите в минутах.

В13. Рёбра тетраэдра равны 13 (см. рис. 63). Найдите площадь сечения, проходящего ровно посередине четырёх его рёбер.

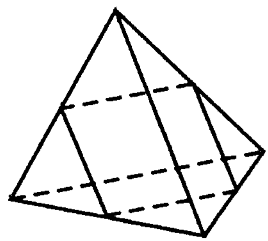


Рис. 63.

В14. Моторная лодка в 4:00 вышла из пункта A в пункт B, расположенный в 126 км от A. Пробыв в пункте B 2 часа, лодка отправилась назад и вернулась в пункт A в 22:00. Определите (в км/ч) собственную скорость лодки, если известно, что скорость течения реки 2 км/ч.

В15. Найдите точку максимума функции $y=17-2x^{\frac{3}{2}}+9x$.

При выполнении заданий С1–С6 требуется записать полное решение и ответ.

С1. а) Решите уравнение $9^{\cos x}+3^{\cos x}-2=0$.

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{17\pi}{2};\ -5{,}5\pi\right)$.

С2. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ проведено сечение плоскостью, которая пересекает AA_1 в точке A_2, BB_1 — в точке B_2, FF_1 — в точке F_2, при этом $A_2B_2=4$, $CD=2$, $B_2F_2\parallel BF$. Найдите тангенс угла между плоскостями $A_2B_2F_2$ и ABC, если $A_2A>B_2B$.

C3. Решите систему неравенств $\begin{cases} 4x^3 - 12x^2 - x + 3 < 0, \\ \log_{x^2} 19 - \log_{x+1} 19 \leqslant 0. \end{cases}$

C4. Диагонали AC и BD делят параллелограмм $ABCD$ на 4 треугольника, в каждый из которых вписана окружность. Радиусы этих окружностей, проведённые к точкам касания с диагоналями, образуют квадрат площадью 100.

а) Докажите, что $ABCD$ — ромб.

б) Найдите площадь $ABCD$, если $AC : BD = 12 : 5$.

C5. Найдите все значения a, при которых график функции

$f(x) = \begin{cases} \sin x, \text{ если } \sin x \geqslant 0, \\ 0, \text{ если } \sin x < 0 \end{cases}$ при $x \in \left(0; \frac{3\pi}{2}\right)$ имеет ровно три точки пересечения с параболой $y = (x - a)^2$.

C6. а) Какие двузначные числа равны произведению всех своих цифр?

б) Какие натуральные числа равны произведению своих цифр?

в) Какие двузначные числа равны квадрату произведения всех своих цифр?

Вариант № 10

Часть 1

Ответом на задания B1–B10 должно быть целое число или конечная десятичная дробь.

B1. Тетрадь стоит 2 руб. 98 коп. Какое наибольшее количество тетрадей можно купить на 600 руб.?

B2. Налог на доходы составляет 13% от заработной платы. Заработная плата Тимофея Владленовича равна 24 800 рублей. Какую сумму он получит после вычета налога на доходы? Ответ дайте в рублях.

B3. На диаграмме (см. рис. 64) показана среднесуточная температура воздуха на протяжении февраля в одном из городов. По горизонтали отмечены дни месяца, по вертикали — температура воздуха. Укажите наименьшую среднесуточную температуру воздуха в период с 10 по 16 февраля.

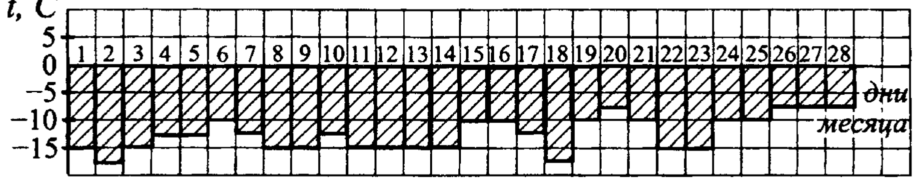


Рис. 64.

B4. В таблице даны тарифы на услуги трёх фирм такси. Предполагается поездка длительностью 50 минут. Нужно выбрать фирму, в которой заказ будет стоить дешевле всего. Сколько рублей будет стоить этот заказ?

Фирма такси	Подача машины	Продолжительность и стоимость минимальной поездки	Стоимость 1 минуты сверх продолжительности минимальной поездки (в руб.)
«С ветерком»	100 рублей	Нет	9
«В путь»	Бесплатно	15 мин — 150 руб.	11
«В дорогу»	50 рублей	15 мин — 150 руб.	10

B5. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника, вершины которого имеют координаты $(-4; -2)$, $(-4; 4)$, $(4; 4)$ (см. рис. 65).

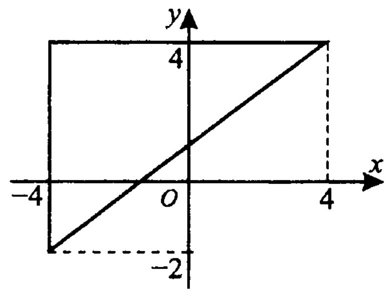


Рис. 65.

B6. Механические часы с двенадцатичасовым циферблатом в какой-то момент сломались и перестали ходить. Найдите вероятность того, что часовая стрелка застыла, достигнув отметки 7, но не дойдя до отметки 10.

B7. Решите уравнение $\left(x - \frac{3}{2}\right)^3 = -125$.

B8. Основания равнобедренной трапеции равны 11 и 27. Боковые стороны равны 17. Найдите тангенс острого угла трапеции.

B9. На рисунке 66 изображён график некоторой функции $y = f(x)$. Пользуясь рисунком, вычислите $F(10) - F(3)$, где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$.

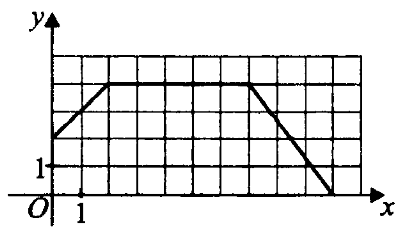


Рис. 66.

B10. Найдите расстояние между вершинами A_1 и E многогранника, изображённого на рисунке 67. Все двугранные углы многогранника прямые.

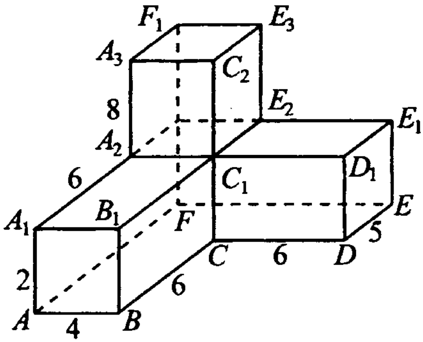


Рис. 67.

Часть 2

Ответом на задания B11–B15 должно быть целое число или конечная десятичная дробь.

B11. Найдите $\operatorname{ctg}^2 \alpha$, если $\sin \alpha = \dfrac{-1}{2\sqrt{5}}$.

B12. При температуре $0°C$ рельс имеет длину $l_0 = 12{,}5$ м. При прокладке между рельсами оставили зазор 9 мм. При возрастании температуры будет происходить тепловое расширение рельса, и его длина будет меняться по закону $l(t°) = l_0(1 + \alpha t°)$, где $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5} (°C)^{-1}$ — коэффициент теплового расширения, $t°$ — температура (в градусах Цельсия). При какой минимальной температуре между рельсами исчезнет зазор? Ответ выразите в градусах Цельсия.

B13. Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке 68 (все двугранные углы прямые).

B14. Катер прошёл против течения реки 120 км и вернулся в пункт отправления, затратив на обратный путь на 4 часа меньше. Найдите скорость катера в неподвижной воде (в км/ч), если скорость течения реки 4 км/ч.

B15. Найдите точку минимума функции $y = (2 - x)^2 e^{5-x}$.

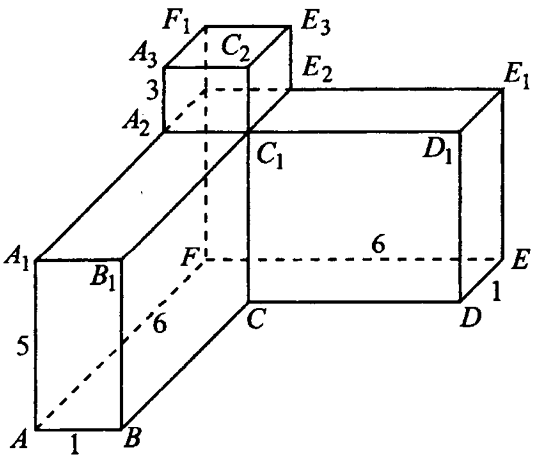


Рис. 68.

При выполнении заданий С1–С6 требуется записать полное решение и ответ.

С1. а) Решите уравнение $5^{-2\sin x} - 2 \cdot 5^{-\sin x} - 15 = 0$.

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left(-\frac{9\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

С2. Известно, что $ABCA_1B_1C_1$ — прямая призма, $\angle ACB = 90°$, $\angle BAC = \angle ABC$. Плоскость α пересекает AA_1 в точке A_2, BB_1 — в точке B_2, CC_1 — в точке C_2, $A_2B_2 \parallel AB$, $A_2C_2 = 5$, $BC = 1$. Найдите косинус угла между плоскостью α и плоскостью $A_1B_1C_1$, если $C_2C > B_2B$.

С3. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 4x^3 - 20x^2 - 9x + 45 \leqslant 0, \\ \log_{x+4} 0{,}7 + \log_{x^2-1} \dfrac{10}{7} < 0. \end{cases}$$

С4. В треугольнике ABC проведена биссектриса BB_1. В образовавшиеся треугольники ABB_1 и CBB_1 вписаны окружности, которые касаются отрезка BB_1 в одной и той же точке. Расстояние между центрами этих окружностей в 3 раза меньше стороны AC.

а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

б) Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC, если площадь ABC равна 96.

С5. Найдите, при каких неотрицательных значениях параметра b уравнение $\cos x - (x - 2b)^2 = 0$ имеет ровно один корень на отрезке $[0; \pi]$.

С6. Имеется квадрат $n \times n$ и множество кругов радиусом 10. Каким наименьшим количеством кругов можно покрыть квадрат в каждом из следующих случаев:

а) $n = 21$;
б) $n = 20$;
в) $n = 18$?

Замечание. Квадрат покрыт кругами тогда и только тогда, когда каждая его точка принадлежит некоторому кругу.

Вариант № 11

Часть 1

Ответом на задания В1 – В10 должно быть целое число или конечная десятичная дробь.

В1. Диагональ экрана составляет 63,5 см. Сколько дюймов составляет диагональ экрана? (Считать, что один дюйм равняется 2,54 см).

В2. Налог на доходы составляет 13% от заработной платы. После удержания налога на доходы Ярослава Никитична получила 22 620 рублей. Сколько рублей составляет заработная плата Ярославы Никитичны?

В3. На графике (см. рис. 69) показан процесс разогрева двигателя легкового автомобиля при температуре окружающего воздуха 3°С. На оси абсцисс откладывается время в минутах, прошедшее от запуска двигателя, на оси ординат — температура двигателя в градусах Цельсия. Когда температура достигает определённого значения, включается вентилятор, охлаждающий двигатель, и температура начинает понижаться. Определите по графику, сколько минут прошло с момента запуска двигателя до включения вентилятора?

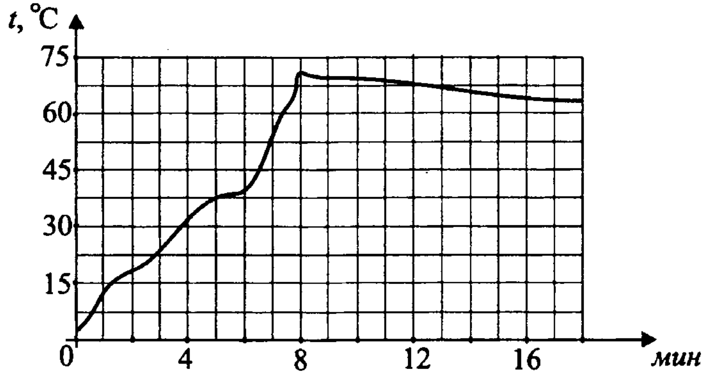


Рис. 69.

В4. Семья из трёх человек планирует поехать из Санкт-Петербурга в Красный Сулин. Можно ехать поездом, а можно — на своей машине. Билет на поезд на одного человека стоит 1360 рублей. Автомобиль расходует 9 л бензина на 100 км, цена бензина — 26,5 рублей за литр, а расстояние по шоссе 1700 км. Сколько рублей придётся заплатить за наиболее дешёвую поездку на троих?

B5. Найдите площадь треугольника, вершины которого имеют координаты (2; 2), (2; 6), (10; 3) (см. рис. 70).

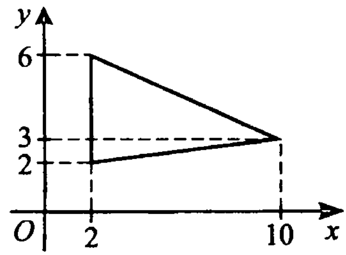


Рис. 70.

B6. Перед началом первого тура чемпионата по шахматам участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 76 шахматистов, среди которых 19 участников из России, в том числе Максим Петров. Найдите вероятность того, что в первом туре Максим Петров будет играть с каким-либо шахматистом из России.

B7. Найдите корень уравнения $\frac{16x^2-9}{12x}=x$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите больший из них.

B8. Сумма двух углов треугольника и внешнего угла к третьему равна 70°. Найдите третий угол треугольника. Ответ дайте в градусах.

B9. На рисунке 71 изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-5; 8)$. Найдите промежутки убывания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.

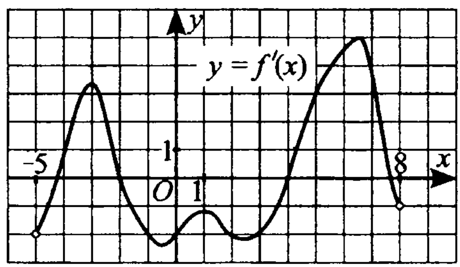


Рис. 71.

B10. Найдите котангенс угла ABD_2 многогранника, изображённого на рисунке 72.

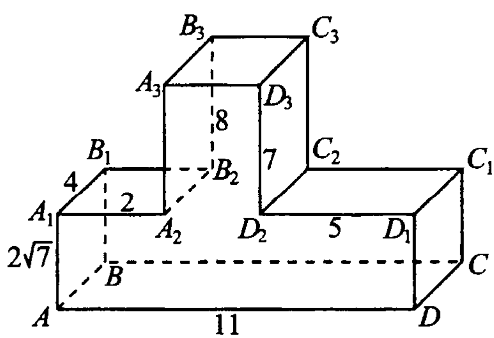


Рис. 72.

Часть 2

Ответом на задания B11–B15 должно быть целое число или конечная десятичная дробь.

B11. Найдите значение выражения $21\sin(\pi+\alpha)-12\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$, если $\sin\alpha=-\frac{1}{6}$.

B12. Вертикально вверх брошен мяч. Высота, на которой он может находиться, описывается по формуле $h(t) = -5t^2+21t$, где h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента броска. Найдите, сколько секунд мяч будет находиться на высоте не менее 4 метров.

B13. Через середину высоты параллельно основанию конуса проведено сечение, которое является основанием меньшего конуса с той же вершиной. Объём меньшего конуса 13,5. Определите объём исходного конуса.

B14. В помощь садовому насосу, перекачивающему 6 литров воды за 4 минуты, подключили второй насос, перекачивающий тот же объём воды за 2 минуты. Сколько минут эти два насоса должны работать совместно, чтобы перекачать 27 литров воды?

B15. Найдите точку минимума функции $y=(4x-3)\sin x+4\cos x-4$, принадлежащую промежутку $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

При выполнении заданий C1–C6 требуется записать полное решение и ответ.

C1. а) Решите уравнение $0{,}2^{\cos 2x-2\sin^2 x}=5$.

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\pi;\frac{\pi}{2}\right]$.

C2. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямой BD_1 и плоскостью ADD_1.

C3. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 7^{x-1}-7^{x-2}+7^{x-3}>258, \\ \log_5\frac{2}{x}+\log_5(x^2-5x+5)\leqslant\log_5\left(x^2-5x+\frac{2}{x}+4\right). \end{cases}$$

C4. Две окружности с центрами O и O_1, радиусы которых 3 и 5, касаются внешним образом в точке C. Прямая AB касается окружности меньшего радиуса в точке A, а другой — в точке B. Через точку C проведена касательная, которая пересекает прямую AB в точке D.

а) Докажите, что вокруг четырёхугольника $AOCD$ можно описать окружность.

б) Найдите радиус этой окружности.

C5. При каких значения параметра a система

$$\begin{cases} y = x^{2k+1} + 3, \\ y = a - |x| \end{cases}$$

имеет более двух решений для всех натуральных k?

C6. Два игрока поочерёдно пишут цифры слева направо, пока не получится двадцатизначное число (первый игрок не может писать цифру «0» первым ходом). Кто может выиграть при любой игре соперника в каждом из следующих случаев?

а) Первый игрок выигрывает тогда и только тогда, когда это число не делится на 9 (иначе выигрывает второй).

б) Первый игрок выигрывает тогда и только тогда, когда это число не делится на 11 (иначе выигрывает второй).

в) Первый игрок выигрывает тогда и только тогда, когда сумма цифр не делится на 11 (иначе выигрывает второй).

Вариант № 12

Часть 1

Ответом на задания B1 – B10 должно быть целое число или конечная десятичная дробь.

B1. Для приготовления ананасового варенья на 1 кг ананасов нужно 0,8 кг сахара. Сколько килограммовых упаковок сахара нужно купить, чтобы сварить варенье из 46 кг ананасов?

B2. Одна поездка по железной дороге (для взрослого человека) из пункта А в пункт Я стоит 800 рублей. Стоимость билета для школьника составляет 60% от стоимости билета для взрослого. Группа состоит из 16 школьников и 2 взрослых. Сколько рублей стоят билеты на всю группу?

B3. На графике (см. рис. 73) показано изменение температуры воздуха в период с 5 по 7 марта в некотором городе. По горизонтали указывается дата и время суток, по вертикали — значение температуры в градусах

Цельсия. Найдите разность между наибольшим и наименьшим значениями температуры за указанный период. Ответ дайте в градусах Цельсия.

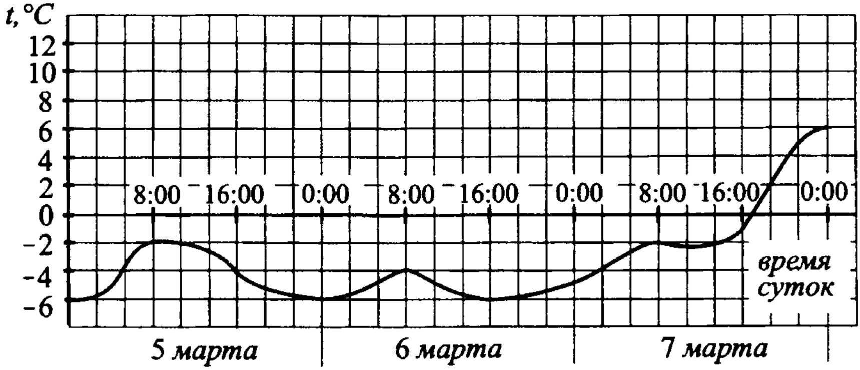


Рис. 73.

B4. Интернет-провайдер (компания, оказывающая услуги по подключению к сети Интернет) предлагает три тарифных плана.

Тарифный план	Абонентская плата	Плата за трафик
«Современный»	Нет	1,5 руб. за 1 Мб
«Хорошего понемногу»	630 руб. за 400 Мб трафика в месяц	1 руб. за 1 Мб сверх 400 Мб
«Бессонница»	900 руб. за 800 Мб трафика в месяц	0,5 руб. за 1 Мб сверх 800 Мб

Пользователь предполагает, что трафик составляет 580 Мб в месяц и, исходя из этого, выбирает наиболее дешёвый тарифный план. Сколько рублей заплатит пользователь за месяц, если его трафик действительно будет равен 580 Мб?

B5. Найдите площадь четырёхугольника, вершины которого имеют координаты $(0; 9)$, $(3; 3)$, $(6; 1)$, $(10; 5)$ (см. рис. 74).

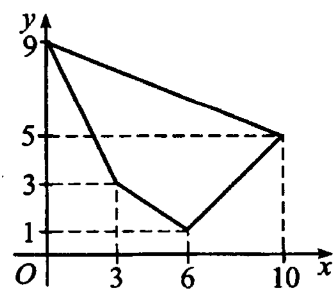


Рис. 74.

B6. На тренировку пришли 33 школьника, среди них два брата — Петя и Вася. Школьников случайным образом делят на три футбольные команды по 11 человек в каждой. Найдите вероятность того, что Петя и Вася окажутся в одной команде.

B7. Найдите корень уравнения $\frac{15x}{6x^2 - 9} = -5$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.

B8. В треугольнике ABC $AC = BC = 9$, $\cos A = \frac{4}{5}$. Найдите высоту CH.

B9. На рисунке 75 изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-5; 11)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-4; 10]$.

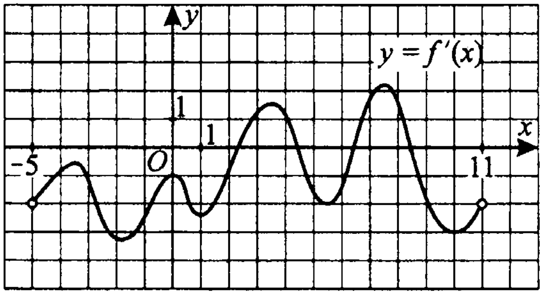


Рис. 75.

B10. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AA_1 = 17$, $AB = 19$, $AD = 17\sqrt{3}$. Найдите угол B_1CB. Ответ дайте в градусах.

Часть 2

Ответом на задания B11 – B15 должно быть целое число или конечная десятичная дробь.

B11. Найдите значение выражения $7\sqrt{2}\cos^2\frac{5\pi}{8} - 7\sqrt{2}\sin^2\frac{5\pi}{8}$.

B12. На верфи инженеры проектируют новый аппарат для погружения на большие глубины. Конструкция имеет форму бочки (цилиндра), и значит, сила Архимеда, действующая на аппарат, будет определяться формулой $F_A = \rho \cdot g \cdot \pi \cdot R^2 \cdot l$, где R — радиус основания цилиндра, $l = 6$ м, $\rho = 1000$ кг/м^3 — плотность воды, а $g = 10$ Н/кг — ускорение свободного падения. Найдите, каким должен быть максимальный радиус (в метрах) основания бочки (цилиндра), чтобы обеспечивать эксплуатацию аппарата в условиях, когда выталкивающая сила при погружении не должна превосходить 6 782 400 Н (считать $\pi \approx 3{,}14$).

B13. Найдите объём V фигуры, изображённой на рисунке 76. В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.

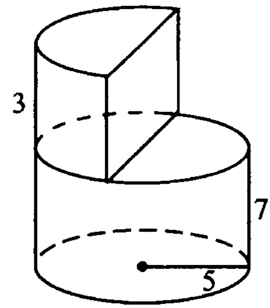


Рис. 76.

B14. Каменщики Антон и Петя выкладывают один кирпичный забор за 8 часов, Петя и Дима выполняют эту же работу за 12 часов, а Антон и Дима — за 9,6 часа. Найдите, за сколько часов каменщики выполнят эту работу, если будут работать втроём.

B15. Найдите точку максимума функции $y = 2\sin x - (2x - 7)\cos x + 7$, принадлежащую промежутку $\left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$.

При выполнении заданий С1–С6 требуется записать полное решение и ответ.

С1. а) Решите уравнение $4^{\cos 2x - \cos x} = 0{,}25^{\sin^2 x}$.

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-\frac{\pi}{2}; 2\pi]$.

С2. Плоскость, пересекающая ось цилиндра, пересекает основания цилиндра по хордам, длины которых равны 6 и 8. Найдите тангенс угла между этой плоскостью и плоскостью основания цилиндра, если диаметр основания равен 10, а образующая равна 14.

С3. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 3^{2x-1} - 3^x + \frac{2}{3} \leqslant 0, \\ \frac{2x^2 + 3x - 5}{x+1} - \frac{2}{x-2} \leqslant 2x. \end{cases}$$

С4. Две окружности с центрами O и O_1, радиусы которых 3 и 5, касаются внешним образом в точке C. Прямая AB касается окружности меньшего радиуса в точке A, а другой — в точке B. Через точку C проведена касательная, которая пересекает прямую AB в точке D.

а) Докажите, что диагонали четырёхугольника BO_1CD перпендикулярны.

б) Найдите радиус окружности, описанной около четырёхугольника BO_1CD.

С5. При каких значения параметра a система
$$\begin{cases} y = x^{2k} + 4, \\ y = a + |x| \end{cases}$$
имеет более двух решений для всех натуральных k?

С6. Два игрока поочерёдно пишут целые числа от 0 до 9, пока на доске не будет выписано 30 чисел, после чего считают их сумму S, в результате один игрок объявляется победителем, а второй — проигравшим. Кто может выиграть при любой игре соперника в каждом из следующих случаев?

а) Первый игрок выигрывает, если S не делится на 3.

б) Первый игрок выигрывает, если S не делится на 45.

в) Первый игрок выигрывает, если S не является полным квадратом.

Вариант № 13

Часть 1

Ответом на задания В1 – В10 должно быть целое число или конечная десятичная дробь.

В1. В обменном пункте 1 рупия стоит 52 копейки. Отдыхающие обменяли рубли на рупии и купили 4 кг помидоров по цене 42 рупии за 1 кг. Во сколько рублей обошлась им эта покупка? Ответ округлите до целого числа.

В2. Видеокарта стоит 2400 рублей. После снижения цены она стала стоить 1632 рубля. На сколько процентов была снижена цена на видеокарту?

В3. На графике (см. рис. 77) показано изменение температуры воздуха в некотором городе с 5 сентября по 7 сентября. По горизонтали указано время суток, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия. Найдите разность между наибольшим и наименьшим значениями температуры за весь этот период. Ответ дайте в градусах Цельсия.

В4. В таблице указаны средние цены в рублях на некоторые товары в продуктовых магазинах «Мечта», «Правда», «Здоровый дух».

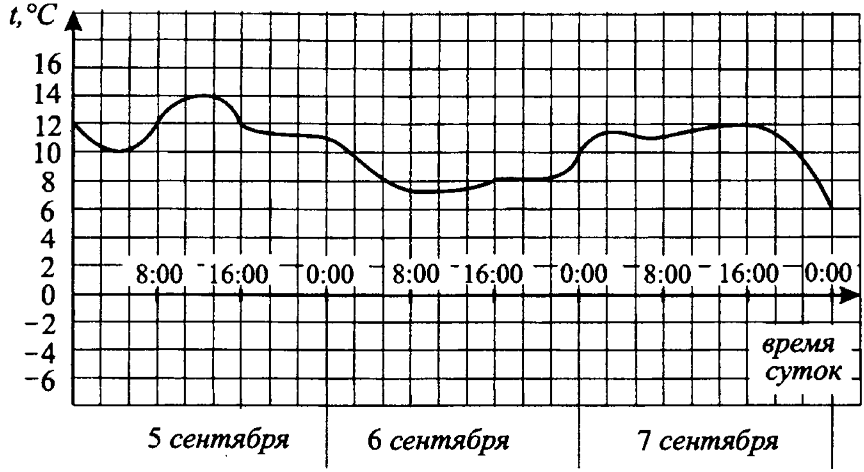


Рис. 77.

Наименование товара	«Мечта»	«Правда»	«Здоровый дух»
Пирожок с мясом	21	23	27
Пирожок с печенью	17	16	18
Хачапури с сыром	33	29	36
Хачапури с мясом	45	43	40
Сок, 1 л	42	44	46
Конфеты, 1 кг	128	130	124

Определите, в каком из этих магазинов окажется самым дешёвым следующий набор продуктов: 5 хачапури с сыром, 4 л сока и 7 кг конфет. В ответе укажите стоимость данного набора в этом магазине (в рублях).

B5. На клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см изображена заштрихованная фигура (см. рис. 78). Найдите её площадь S в квадратных сантиметрах. В ответе запишите $\frac{S}{\pi}$.

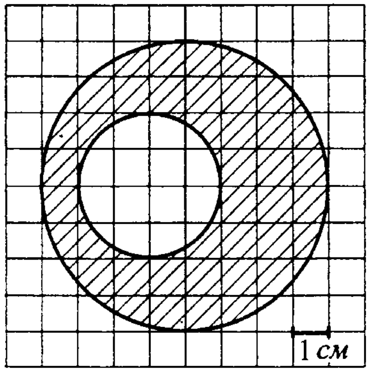


Рис. 78.

B6. В случайном эксперименте симметричную монету бросают четырежды. Найдите вероятность того, что орёл выпадет ровно 1 раз.

B7. Найдите корень уравнения $\log_6(12 - 5x) = 2$.

B8. Острые углы прямоугольного треугольника равны 38° и 52°. Найдите угол между высотой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла (см. рис. 79). Ответ дайте в градусах.

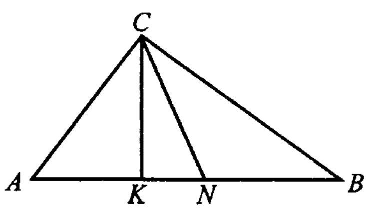


Рис. 79.

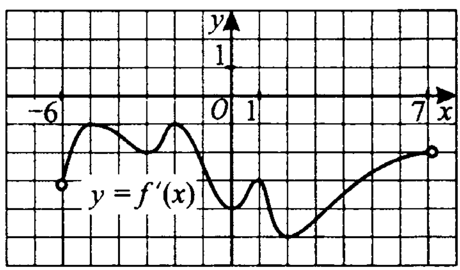


Рис. 80.

B9. На рисунке 80 изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-6; 7)$. В какой точке отрезка $[-4; 5]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?

B10. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все рёбра равны 9,3. Найдите расстояние между точками C_1 и F_1.

Часть 2

Ответом на задания B11–B15 должно быть целое число или конечная десятичная дробь.

B11. Найдите значение выражения $\log_{0,7} 10 - \log_{0,7} 7$.

B12. Уровень воды в колодце после дождя может повыситься. Ученик измеряет время t падения камешков в колодец (до дождя оно составляет 0,8 с) и рассчитывает расстояние до воды по формуле $h = 5t^2$, где h — расстояние в метрах, t — время падения в секундах. Найдите, на сколько должен подняться уровень воды после дождя, чтобы измеряемое время изменилось на 0,5 с. Ответ выразите в метрах.

B13. Найдите площадь поверхности многогранника, изображённого на рисунке 81 (все двугранные углы прямые).

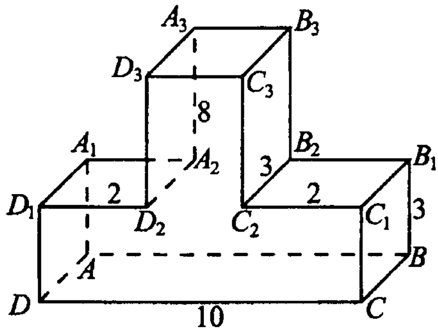


Рис. 81.

B14. Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города A в город B, расстояние между которыми 120 км. На следующий день он отправился обратно со скоростью на 2 км/ч больше прежней. По дороге он сделал остановку на 2 часа. В результате он затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из A в B. Найдите скорость велосипедиста (в км/ч) на пути из A в B.

B15. Найдите точку максимума функции $y = (x^2 - 10x + 17)e^{x+2}$.

При выполнении заданий C1–C6 требуется записать полное решение и ответ.

C1. а) Решите уравнение $4\cos^4 x - 1 = \cos 2x$.

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку

$\left[-\frac{5\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right]$.

C2. Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник с катетом $BC = 8$ и прямым углом C, а её боковое ребро равно $2\sqrt{29}$. В призме проведены два сечения: одно — через ребро AC и вершину B_1, второе — через ребро AA_1 и середину ребра BC. Длина отрезка, по которому пересекаются оба сечения, равна 9. Найдите площадь первого сечения.

C3. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 4^x \leqslant 5 \cdot 2^x + 36, \\ \log_{\frac{1}{2}}(x-3) - \log_{\frac{1}{2}}(x+3) - \log_{\frac{x+3}{x-3}} 2 > 0. \end{cases}$$

C4. Две окружности с центрами O и O_1 касаются друг друга внешним образом. Четыре точки касания их внешних общих касательных A, B, C, D последовательно соединены.

а) Докажите, что в четырёхугольник $ABCD$ можно вписать окружность.

б) Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$, если радиусы данных окружностей 11 и 9.

C5. Найдите все значения p, при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x) = 3px + |x^2 - 10x + 21|$ больше 1.

C6. В очереди 4 мальчика и 4 девочки. Сколькими способами можно организовать очередь в каждом из следующих случаев?

а) Первым стоит мальчик.

б) Никакие два мальчика не стоят подряд, и никакие две девочки не стоят подряд.

в) Никакие две девочки не стоят подряд.

Вариант № 14

Часть 1

Ответом на задания B1 – B10 должно быть целое число или конечная десятичная дробь.

B1. На автозаправке клиент отдал кассиру 1000 рублей и залил в бак 32 литра бензина по цене 30 руб. 50 коп. за литр. Сколько сдачи должен получить клиент? Ответ дайте в рублях.

B2. Стоимость одной поездки в автобусе была повышена на 28% и составила 16 рублей. Сколько рублей стоила одна поездка до повышения цены?

B3. На графике (см. рис. 82) показан процесс нагревания некоторого прибора. На оси абсцисс откладывается время в минутах, прошедшее с момента включения прибора, на оси ординат — температура прибора в градусах Цельсия.

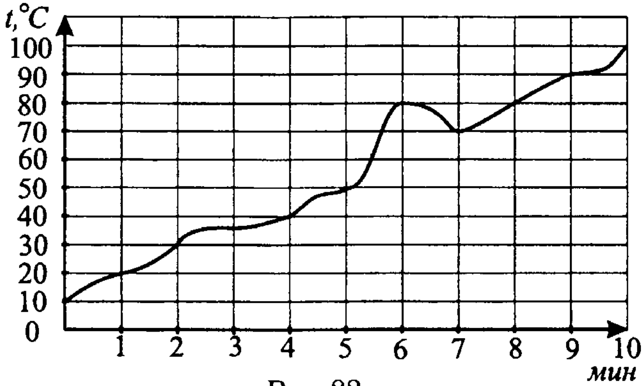


Рис. 82.

Определите по рисунку, за сколько минут прибор нагреется от 50°C до 90°C.

B4. Клиент хочет арендовать автомобиль на сутки для поездки протяжённостью 1600 км. В таблице приведены характеристики трёх автомобилей и стоимость их аренды. Помимо аренды клиент обязан оплатить топливо для автомобиля на всю поездку. Какую сумму в рублях заплатит клиент за аренду и топливо, если выберет самый дешёвый вариант?

Автомобиль	Топливо	Расход топлива (л на 100 км)	Арендная плата (руб. за сутки)
А	Дизельное	5	3400
Б	Бензин	9	1100
В	Газ	12	2100

Цена дизельного топлива — 17,8 рублей за литр, бензина — 26,5 рублей за литр, газа — 14 рублей за литр.

B5. Найдите площадь четырёхугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис. 83). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

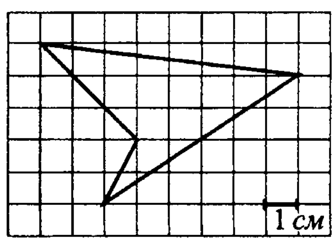


Рис. 83.

B6. Васе нужно забить в стенку гвоздь. Если гвоздь стальной, то он согнётся с вероятностью 0,1, а если гвоздь железный, то он согнётся с вероятностью 0,3. На столе лежат 6 стальных и 4 железных гвоздя. Петя берёт первый попавшийся гвоздь со стола и пытается забить его в стенку. Найдите вероятность того, что этот гвоздь согнётся.

B7. Найдите корень уравнения $\log_7(3x-8)=2$.

B8. Основания трапеции равны 5 и 7. Найдите отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции (см. рис. 84).

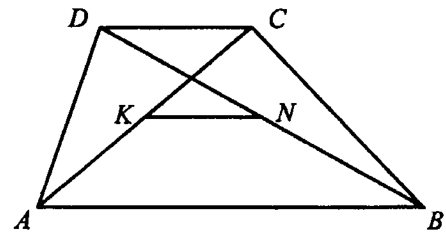


Рис. 84.

B9. Прямая $y=-x+5$ параллельна касательной к графику функции $y=x^3+3x^2+2x+6$. Найдите абсциссу точки касания.

B10. Найдите косинус угла AD_2E многогранника, изображённого на рисунке 85. Все двугранные углы на рисунке прямые.

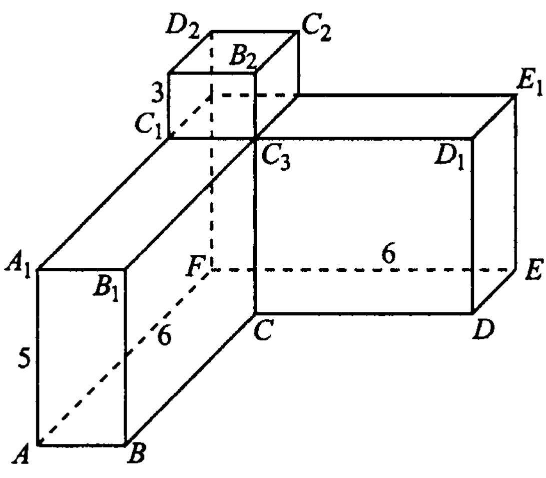


Рис. 85.

Часть 2

Ответом на задания B11 – B15 должно быть целое число или конечная десятичная дробь.

B11. Найдите значение выражения $\log_{0,2} 7 \cdot \log_7 0{,}04$.

B12. Камнеметательная машина выстреливает камни под некоторым острым углом к горизонту. Траектория полёта камня описывается формулой $y = ax^2 + bx$, где $a = -\frac{1}{135}$, $b = \frac{2}{3}$ — постоянные параметры, x (м) — смещение камня по горизонтали, y (м) — высота камня над землёй. Найдите, на каком максимальном расстоянии (в метрах) от крепостной стены высотой 9 м нужно установить машину, чтобы камни пролетали над стеной на высоте не менее 0,6 м.

B13. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 15 и 42. Диагональ параллелепипеда равна 45. Найдите площадь поверхности параллелепипеда.

B14. Электропоезд, двигаясь равномерно со скоростью 63 км/ч, проезжает мимо платформы, длина которой 600 м, за 1 мин и 2 с. Найдите длину электропоезда (в м).

B15. Найдите наименьшее значение функции $y = (x+4)^2(x+6)$ на отрезке $[-4; 2]$.

При выполнении заданий С1–С6 требуется записать полное решение и ответ.

C1. а) Решите уравнение $8\sin^4 x = \cos 2x + 2$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{5\pi}{6}; \frac{\pi}{4}\right]$.

C2. Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ является правильный треугольник со стороной, равной 13. В призме проведены два сечения: одно из них проходит через ребро BC и вершину A_1, а другое через ребро CC_1 и середину K ребра AB. Найдите площадь первого сечения, если длина отрезка, по которому оба сечения призмы пересекаются, равна 13.

C3. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 9^x \leqslant 4 \cdot 3^x + 12, \\ \log_2(x-1) - \log_2(x+1) + \log_{\frac{x+1}{x-1}} 2 < 0. \end{cases}$$

C4. Две окружности имеют общий центр O. На окружности с бóльшим радиусом выбрана точка F.

а) Докажите, что сумма квадратов расстояний от F до концов диаметра меньшей окружности не зависит ни от выбора точки F, ни от выбора диаметра.

б) Найдите площадь треугольника, вершинами которого являются точка F и концы диаметра меньшей окружности, если радиусы окружностей равны 5 и 12, тангенс угла F этого треугольника равен $\frac{1}{7}$.

C5. Найдите все значения a, при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x) = 4ax + |x^2 - 7x + 10|$ меньше 2.

C6. В старших классах учатся 200 учеников, которые изучают иностранные языки (каждый ученик изучает хотя бы один иностранный язык). Найдите количество учеников, которые изучают все преподаваемые языки в каждом из следующих случаев:
а) английский изучают 120 человек, немецкий — 97;
б) английский изучают 120 человек, немецкий — 97, французский — 85, и английский, и немецкий — 46, и английский, и французский — 42, и французский и немецкий — 40;
в) английский изучают 90 человек, немецкий — 80, французский — 60. И для каждой пары языков найдётся не более 10 человек, изучающих оба языка.

Вариант № 15

Часть 1

Ответом на задания B1 – B10 должно быть целое число или конечная десятичная дробь.

B1. В доме, в котором живёт Джек, 7 этажей и несколько подъездов. На каждом этаже по 4 квартиры. Джек живёт в квартире №58. В каком подъезде живёт Джек?

B2. Блокнот стоит 46 рублей. Сколько рублей заплатит покупатель за 80 блокнотов, если при покупке больше 50 блокнотов магазин делает скидку 5% от стоимости всей покупки?

B3. На диаграмме (см. рис. 86) показано распределение площадей (в тыс. га) сельскохозяйственных угодий в Центральном федеральном округе. По горизонтали указаны названия сельскохозяйственных угодий, по вертикали — занимаемая площадь.

Определите по диаграмме, сколько тыс. га сельскохозяйственных угодий в Центральном ФО занято в сумме под залежь и насаждения.

Рис. 86.

B4. Для остекления витрин магазина «Мороз и солнце» требуется заказать 60 одинаковых стёкол в одной из трёх фирм. Площадь каждого стекла — 0,7 м^2. В таблице приведены цены на стекло и на резку стекла. Сколько рублей будет стоить самый дешёвый заказ?

Фирма	Цена стекла (руб. за м^2)	Резка стекла (руб. за одно стекло)	Дополнительные условия
«A»	560	35	
«B»	570	24	При заказе на сумму свыше 30 000 руб. резка — бесплатно
«Игрек»	600	13	При заказе на сумму свыше 25 000 руб. резка — бесплатно

B5. Найдите площадь четырёхугольника, вершины которого имеют координаты $(-4; 0)$, $(-2; 8)$, $(2; 3)$, $(5; 5)$ (см. рис. 87).

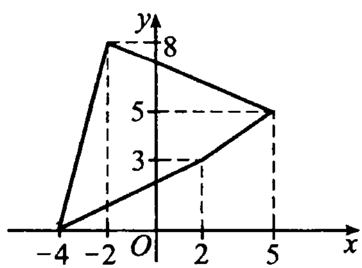


Рис. 87.

B6. Перед началом футбольного матча судья бросает монетку, чтобы определить, какая команда начнёт игру с мячом. Команда «Химик» играет три матча с разными командами. Найдите вероятность того, что в этих играх «Химик» выиграет жребий ровно два раза.

B7. Решите уравнение $\frac{5x-3}{x+4} = \frac{3x-5}{x+4}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите больший из них.

B8. Диагонали четырёхугольника равны 6 и 9 (см. рис. 88). Найдите периметр четырёхугольника, вершинами которого являются середины сторон данного четырёхугольника.

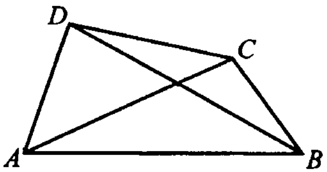


Рис. 88.

B9. На рисунке 89 изображён график некоторой функции $y = f(x)$. Функция $F(x) = x^3 - 18x^2 + 120x + \frac{24}{7}$ — одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.

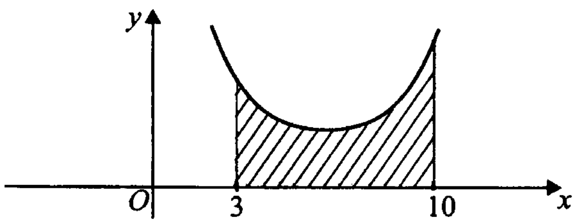


Рис. 89.

B10. Найдите косинус угла BA_2A_3 многогранника, изображённого на рисунке 90. Все двугранные углы многогранника прямые.

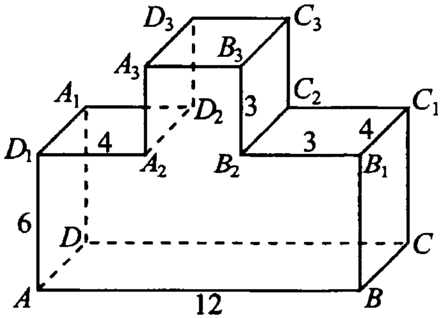


Рис. 90.

Часть 2

Ответом на задания B11 – B15 должно быть целое число или конечная десятичная дробь.

B11. Найдите значение выражения $\log_{256} \log_3 81$.

B12. Два шара массой 1,6 кг каждый катятся навстречу с одинаковыми скоростями $v = 10$ м/с под углом 2α друг к другу. Энергия (в джоулях), выделяющаяся при их абсолютно неупругом соударении, определяется выражением $Q = mv^2 \sin^2 \alpha$ и должна быть не менее 80 Дж.

Найдите, под каким наименьшим углом 2α (в градусах) должны двигаться шары.

B13. Конус описан около правильной четырёхугольной пирамиды со стороной основания 24 и высотой 2,5. Найдите его объём, делённый на π.

B14. Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми 150 км, одновременно выехали автомобилист и мотоциклист. Известно, что в час автомобилист проезжает на 15 км больше, чем мотоциклист. Найдите скорость мотоциклиста (в км/ч), если известно, что он прибыл в пункт B на 2 ч 15 мин позже автомобилиста.

B15. Найдите наибольшее значение функции $y = \dfrac{16}{x} + x$ на отрезке $[4; 8]$.

При выполнении заданий C1 – C6 требуется записать полное решение и ответ.

C1. а) Решите уравнение $\dfrac{1 - 5\sin x + 2\cos^2 x}{\sqrt{\cos x}} = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\dfrac{5\pi}{6}; 9\right)$.

C2. Ребро правильного тетраэдра равно $4\sqrt{2}$. Определите радиус шара, касающегося всех рёбер тетраэдра.

C3. Решите систему неравенств $\begin{cases} \log_{x+1}(10x + 6) \geqslant 0, \\ 15^x - 25 \cdot 3^x - 4 \cdot 5^x + 100 > 0. \end{cases}$

C4. В трапецию $ABCD$ с основаниями AD и BC ($AD > BC$) и прямым углом BAD вписана окружность с центром в точке O. Через точки A, B, D проведена другая окружность радиуса 10 с центром в точке O_1. Расстояние между точками O и O_1 равно 2.

а) Докажите, что точка O принадлежит средней линии треугольника ABD.

б) Найдите основание AD.

С5. При каких значениях параметра a система
$\begin{cases} x^2-(3a-1)x+2a^2-a\leqslant 0, \\ ax=1 \end{cases}$ имеет решение?

С6. На доске записаны числа $a=1$, $b=2$, $c=5$. Их стирают и на их месте записывают новые числа по определённому правилу. Могут ли все числа через несколько таких ходов стать равными в каждом из следующих независимых случаев?

а) $a_{\text{новое}}=3b$, $b_{\text{новое}}=2a$, $c_{\text{новое}}=c+2015$.

б) $a_{\text{новое}}=2b+3a$, $b_{\text{новое}}=5c$, $c_{\text{новое}}=2a+3b$.

в) $a_{\text{новое}}=\frac{b}{c}$, $b_{\text{новое}}=\frac{c}{a}$, $c_{\text{новое}}=\frac{a}{b}$.

Вариант № 16

Часть 1

Ответом на задания В1 – В10 должно быть целое число или конечная десятичная дробь.

В1. В квартире, где проживает Владимир, установлен прибор учёта расхода холодной воды (счётчик). 1 сентября счётчик показывал расход 143 м^3 воды, а 1 октября — 152 м^3. Какую сумму должен заплатить Владимир за холодную воду за сентябрь, если цена 1 м^3 холодной воды составляет 20 руб. 30 коп.? Ответ дайте в рублях.

В2. При оплате услуг через платёжный терминал взимается комиссия в размере 7%. Терминал принимает суммы, кратные 10 рублям. Студентка Л. хочет положить на счёт своего мобильного телефона не менее 220 рублей. Какую минимальную сумму (в рублях) она должна положить в приёмное устройство данного терминала?

В3. На рисунке 91 точками показаны усреднённые данные температуры воздуха за 2001 – 2010 гг. по месяцам в г. Москве. По горизонтали указаны месяцы года, по вертикали — температура воздуха в градусах Цельсия. Для наглядности точки соединены линиями.

Определите по рисунку разность между наибольшей и наименьшей усреднёнными месячными температурами воздуха в г. Москве. Ответ дайте в градусах Цельсия.

В4. Для строительства гаража можно использовать один из двух типов фундамента: бетонный или фундамент из пеноблоков. Для фундамента из пеноблоков необходимо 4,5 кубометра пеноблоков и 2 мешка цемента.

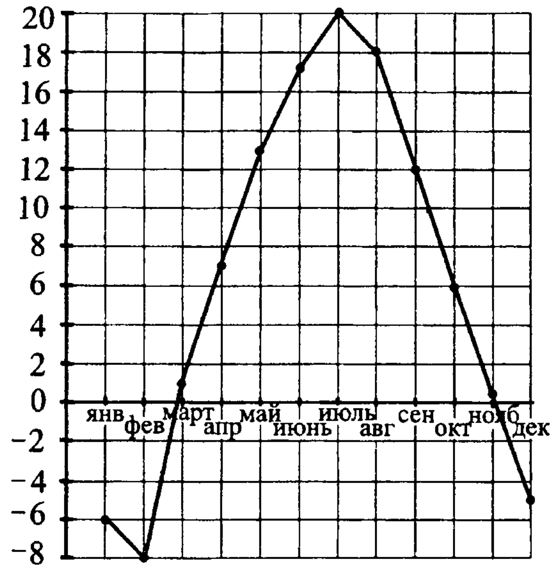


Рис. 91.

Для бетонного фундамента необходимо 3 тонны щебня и 30 мешков цемента. Кубометр пеноблока стоит 2200 рублей, щебень стоит 750 рублей за тонну, а мешок цемента стоит 260 рублей. Сколько рублей будет стоить материал, если выбрать наиболее дешёвый вариант?

B5. На клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см изображена фигура (см. рис. 92). Найдите её площадь в квадратных сантиметрах.

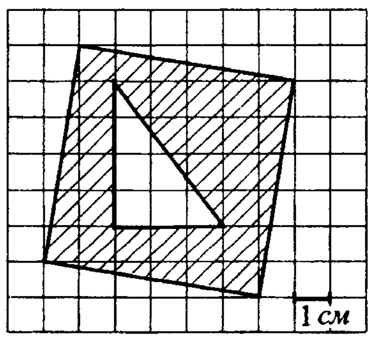


Рис. 92.

B6. В случайном эксперименте бросают три игральные кости. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 12 очков. Ответ округлите до сотых.

B7. Решите уравнение $(3x - 14)^2 = (3x + 2)^2$.

B8. Угол ACB равен 26°. Градусная величина дуги AB окружности, не содержащей точек K и L, равна 80° (см. рис. 93). Найдите угол KAL. Ответ дайте в градусах.

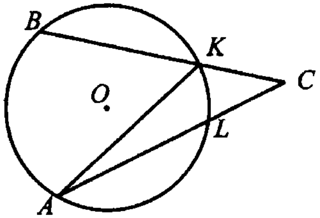


Рис. 93.

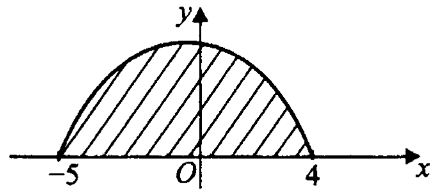


Рис. 94.

B9. На рисунке 94 изображён график функции $y = f(x)$. Функция $F(x) = 360x - 9x^2 - 6x^3 + \dfrac{2013}{2014}$ — одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.

B10. Найдите угол AB_2B многогранника, изображённого на рисунке 95. Ответ дайте в градусах.

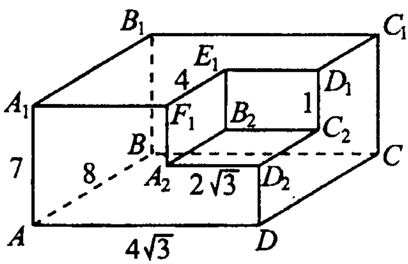


Рис. 95.

Часть 2

Ответом на задания B11–B15 должно быть целое число или конечная десятичная дробь.

B11. Найдите значение выражения $\sqrt{t^2 - 16t + 64} + t$ при $t \leqslant 8$.

B12. В баке, имеющем форму цилиндра, на боковой стенке у дна закреплён кран. После его открытия вода, находящаяся в баке, начинает вытекать, и высота столба воды (м) меняется по закону

$H(t) = H_0 - \sqrt{2gH_0}kt + \frac{g}{2}k^2t^2$, где t — время в секундах, прошедшее с момента открытия крана, $H_0 = 20$ м — начальная высота столба воды,

$k = \dfrac{1}{80}$ — отношение площадей поперечных сечений крана и бака, g — ускорение свободного падения ($g = 10$ м/сек^2). Найдите, через сколько секунд после открытия крана в баке не станет воды.

B13. Площадь полной поверхности конуса равна 90π, а радиус основания равен 5. Найдите высоту конуса.

B14. Первая труба пропускает на 15 литров воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает вторая труба, если резервуар объёмом 300 литров она заполнит на 18 минут быстрее, чем первая труба?

B15. Найдите наименьшее значение функции $y = 10\ln(x+3) - 4x + 2$ на отрезке $[-2; -0{,}5]$.

При выполнении заданий C1 – C6 требуется записать полное решение и ответ.

C1. а) Решите уравнение $\dfrac{4 - 5\cos x - 2\sin^2 x}{\sqrt{\sin x}} = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\dfrac{7\pi}{3}; \dfrac{3\pi}{2}\right)$.

C2. Шар радиуса $3\sqrt{2}$ касается всех рёбер правильного тетраэдра. Определите длину рёбер этого тетраэдра.

C3. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_3^2(x^2+1) - 3\log_3(x^2+1) + 2 < 0, \\ \log_5(x^2+4x+5) - \log_{x^2}(x^2+4x+5) \geqslant 0. \end{cases}$$

C4. В трапецию $ABCD$ с основаниями AD и BC ($AD > BC$) и прямым углом BAD вписана окружность радиуса 6 с центром в точке O. Через точки A, B, D проведена другая окружность радиуса 10 с центром в точке O_1.

а) Докажите, что точка O принадлежит средней линии треугольника ABD.

б) Найдите расстояние между точками O и O_1.

C5. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} x^2 - (4a-1)x + 3a^2 - a < 0, \\ ax = 4 \end{cases}$$ имеет решение?

С6. На доске записано 2014 чисел: $x_1, x_2, ..., x_{2014}$. Найдите все возможные значения x_{2014} в каждом из следующих случаев.

а) $x_1 = 4$, $x_2 = 6$. Каждое x_i при $i \geqslant 3$ равно среднему арифметическому всех предыдущих чисел.

б) $x_1 = 3$, $x_2 = 3$. Произведения любых трёх чисел равны между собой.

в) $x_1 = 17$. Пусть $y_1, y_2, ..., y_{2014}$ — это все числа $x_1, x_2, ... x_{2014}$ в каком-то другом порядке. Для любой такой перенумерации
$x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_{2014}y_{2014} = x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{2014}^2$.

Вариант № 17

Часть 1

Ответом на задания В1 – В10 должно быть целое число или конечная десятичная дробь.

В1. На счету Артеминого мобильного телефона было 83 рубля, а после разговора с Мариной осталось 63,8 рублей. Сколько минут длился разговор, если одна минута стоит 1 рубль 20 копеек?

В2. Только 28% из 42 000 жителей города Безграмотск знакомы с понятием «проценты». Сколько человек в указанном населённом пункте может понять условие этой задачи?

В3. На графике (см. рис. 96) показано изменение температуры воздуха в период с 5 по 7 марта в некотором городе. По горизонтали указывается дата и время суток, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия. Найдите разность между наибольшим и наименьшим значениями температуры 6 марта. Ответ дайте в градусах Цельсия.

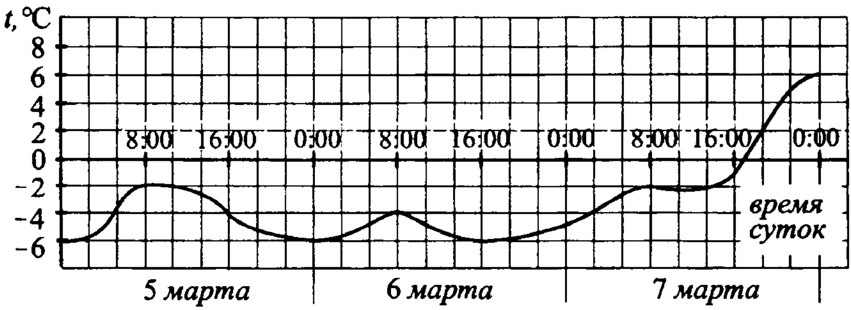


Рис. 96.

B4. Из пункта A в пункт D ведут три дороги. Через пункт B идёт грузовик со средней скоростью 48 км/ч, через пункт C идёт автобус со средней скоростью 55 км/ч. Третья дорога без промежуточных пунктов, и по ней движется легковой автомобиль со средней скоростью 82 км/ч. На рисунке 97 показана схема дорог и расстояние (в км) между пунктами по дорогам. Все три автомобиля выехали из пункта A одновременно. Какой автомобиль доберётся до пункта D раньше других? В ответе укажите, сколько часов он будет находиться в дороге.

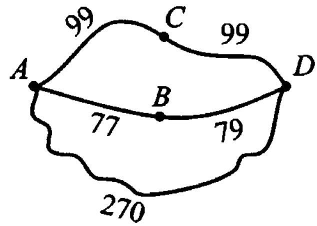


Рис. 97.

B5. Найдите площадь закрашенной фигуры на координатной плоскости (см. рис. 98).

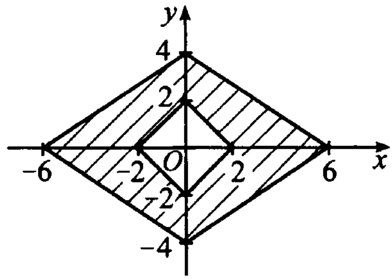


Рис. 98.

B6. В классе 9 мальчиков и 16 девочек. Среди учащихся класса случайным образом выбирают двоих дежурных. Найдите вероятность того, что дежурить будут две девочки.

B7. Найдите корень уравнения $2^{12-2x} = \frac{1}{8}$.

B8. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 9 (см. рис. 99). Из точки, взятой на основании этого треугольника, проведены две прямые, параллельные боковым сторонам. Найдите периметр получившегося параллелограмма $CLDK$.

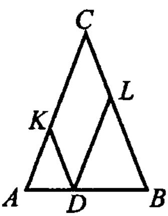


Рис. 99.

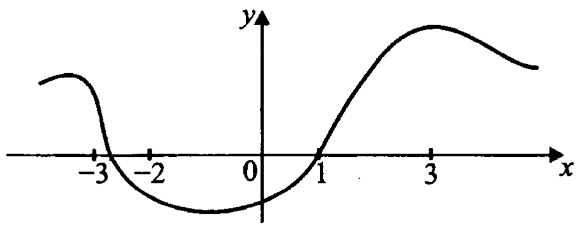


Рис. 100.

B9. На рисунке 100 изображён график функции $y = f(x)$ и отмечены точки -3, -2, 1, 3. В какой из этих точек значение производной наибольшее? В ответе укажите эту точку.

B10. Найдите сторону основания правильной треугольной пирамиды, если боковое ребро равно 16, а высота пирамиды равна 8.

Часть 2

Ответом на задания B11 – B15 должно быть целое число или конечная десятичная дробь.

B11. Найдите значение выражения $3(p(4x)-4p(x-7))$, если $p(x) = 5x+2$.

B12. Тягач тащит платформу с деревьями с силой $F = 70$ кН, направленной под острым углом α к горизонту. Мощность (в киловаттах) тягача при скорости $v = 5$ м/с равна $N = Fv\cos\alpha$. Найдите, при каком максимальном угле α (в градусах) эта мощность будет не менее 175 кВт.

B13. В сосуд, имеющий форму правильной тринадцатиугольной призмы налили 720 см^3 воды, а затем полностью погрузили туда деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся с отметки 18 см до отметки 21 см. Чему равен объём детали? Объём выразите в см^3.

B14. Весной катер идёт против течения реки в 2 раза медленнее, чем по течению. Летом течение становится на 2 км/ч медленнее. Поэтому катер летом идёт против течения в $1\frac{2}{5}$ раза медленнее, чем по течению. Найдите скорость катера (в км/ч).

B15. Найдите точку минимума функции $y = -\dfrac{x^2+361}{x}$.

При выполнении заданий C1 – C6 требуется записать полное решение и ответ.

C1. а) Решите уравнение $2\operatorname{tg} x + 1 = \operatorname{ctg} x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$.

C2. В правильную четырёхугольную пирамиду со стороной основания 20 вписана сфера радиуса $4\sqrt{5}$. Найдите длину бокового ребра пирамиды.

C3. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 0{,}25^x - 17\cdot 0{,}5^x + 30 \leqslant 0, \\ \dfrac{2x^4+7x^3-6x+21}{2x^2+7x} \geqslant x^2 - \dfrac{12}{x+6} + \dfrac{3}{x}. \end{cases}$$

C4. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C гипотенуза равна 17, а катет BC равен 8. Через точку O пересечения биссектрис треугольника проведены прямые $MN \parallel AB$ и $PT \parallel AC$ ($M \in AC, N \in BC, P \in AB, T \in BC$).

а) Докажите, что четырёхугольник $AMOP$ — ромб.

б) Найдите длину отрезка MN.

С5. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\frac{\arcsin(\sin 3t)}{t} = 2a$ имеет не более 7 корней.

С6. Рассмотрите систему неравенств $\begin{cases} (x-2)^2 + y^2 < 9, \\ |2x - 5y| + |6x + y - 16| \leqslant 16 \end{cases}$ и

а) найдите площадь геометрического места точек решений первого неравенства системы;

б) найдите количество целочисленных решений первого неравенства системы неравенств;

в) найдите количество целочисленных решений системы неравенств.

Вариант № 18

Часть 1

Ответом на задания В1–В10 должно быть целое число или конечная десятичная дробь.

В1. Больному прописано лекарство, которое нужно пить по 0,6 грамма в сутки в течение 42 дней. В одной упаковке 12 таблеток по 0,2 грамма. Какого наименьшего количества упаковок хватит на весь курс лечения?

В2. Известно, что 16% из 28 000 жителей города Троянск полностью седые. Сколько человек в указанном населённом пункте полностью седы?

В3. При работе фонарика батарейка разряжается, и напряжение в электрической цепи фонарика падает. На рисунке 101 показана зависимость напряжения в цепи от времени работы фонарика. На горизонтальной оси отмечается время работы фонарика в часах, на вертикальной оси — напряжение в вольтах.

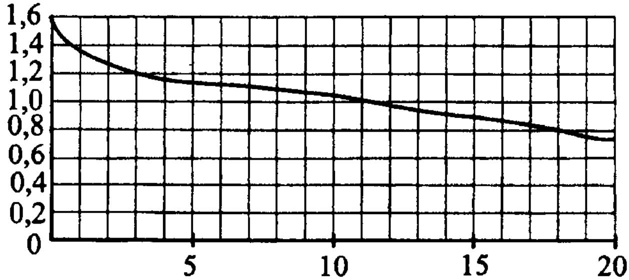


Рис. 101.

Определите по рисунку, за сколько часов напряжение упадёт с 1,2 вольт до 0,8 вольт.

B4. В среднем трафик гражданина Сеткина за месяц в дневное время составляет 1,3 Гб, а в ночное время 3,2 Гб. Раньше Сеткин платил 120 рублей за каждый гигабайт трафика, но год назад он перешёл на другой тарифный план, и теперь за гигабайт трафика днём он платит 180 рублей, а ночью — 79 рублей. В течение 12 месяцев тарифы и трафик не менялись. На сколько рублей больше заплатил бы Сеткин за год, если бы не перешёл на другой тарифный план? (Трафик не округляется.)

B5. Диагонали ромба $ABCD$ пересекаются в точке O и равны 1,5 и 2. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{DO}$ (см. рис. 102).

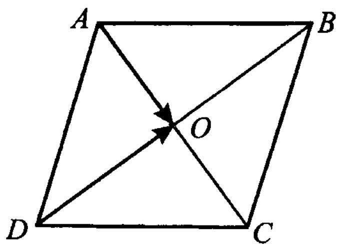


Рис. 102.

B6. Монету подбрасывают трижды. Какова вероятность того, что последние 2 броска окончатся одинаково?

B7. Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{5}\right)^{4x-17} = 125$.

B8. В треугольнике ABC угол A равен 64°, угол B равен 80°. AL, BN и CK — биссектрисы, пересекающиеся в точке O (см. рис. 103). Найдите угол AOK. Ответ дайте в градусах.

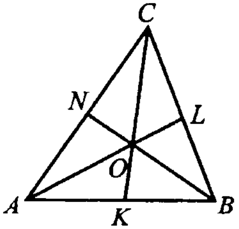


Рис. 103.

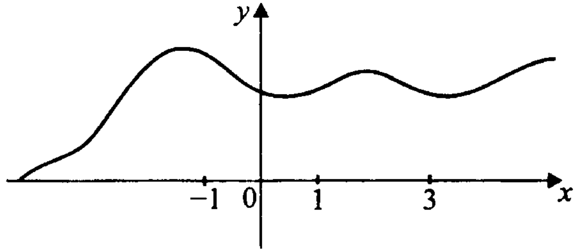


Рис. 104.

B9. На рисунке 104 изображён график функции $y = f(x)$ и отмечены точки -1, 0, 1, 3. В какой из этих точек значение производной наибольшее? В ответе укажите эту точку.

B10. Найдите боковое ребро правильной четырёхугольной пирамиды, если сторона основания равна 6, а высота равна $3\sqrt{14}$.

Часть 2

Ответом на задания B11–B15 должно быть целое число или конечная десятичная дробь.

B11. Найдите значение выражения $\sqrt{(b-12)^2} + \sqrt{(b-7)^2}$ при $7 \leqslant b \leqslant 12$.

B12. При быстром вращении ведёрка с водой вода из ведёрка не будет выливаться. При этом сила давления воды на дно не остаётся постоянной: она максимальна в нижней точке и минимальна в верхней. Вода не будет выливаться, если сила её давления на дно будет неотрицательной во всех точках траектории. В верхней точке сила давления может быть равной нулю и выражается формулой $P = m\left(\frac{v^2}{L} - g\right)$, где m — масса воды в килограммах, v — скорость движения ведёрка в м/с, L — длина верёвки в метрах, g — ускорение свободного падения ($g = 10$ м/с^2). С какой наименьшей скоростью надо вращать ведёрко, чтобы вода не выливалась, если длина верёвки равна 0,729 м?

B13. Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 48 и 14. Площадь её поверхности равна 728. Найдите высоту призмы.

B14. Смешав 25%-ный и 75%-ный раствор кислоты и добавив 10 кг чистой воды, получили 50%-ный раствор той же кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 5 кг 15%-ного раствора, то получили бы 55%-ный раствор кислоты. Сколько килограммов 75%-ного раствора использовали для получения смеси?

B15. Найдите наибольшее значение функции

$y = 24\sin x - 12\sqrt{3}x + 2\sqrt{3}\pi + 2$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

При выполнении заданий C1–C6 требуется записать полное решение и ответ.

C1. а) Решите уравнение $\operatorname{tg} y - 4\sin 2y - 2\sin^2 y = 2\cos^2 y - \operatorname{ctg} y$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.

C2. Сторона основания правильной четырёхугольной пирамиды равна 2, а длина бокового ребра — $\sqrt{5}$. Найдите радиус вписанной в пирамиду сферы.

C3. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{x^5+5x^4-x+10}{x^2+5x} \leqslant x^3+\dfrac{1}{x-3}+\dfrac{2}{x}, \\ 9^x-31\cdot 3^x+84 \leqslant 0. \end{cases}$$

C4. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C гипотенуза равна 17, а катет BC равен 8. Через точку O пересечения биссектрис треугольника проведены прямые $MN \parallel AB$ и $LT \parallel BC$ ($M \in AC$, $N \in BC$, $L \in AC, T \in AB$).

а) Докажите, что четырёхугольник $BNOT$ — ромб.

б) Найдите длину отрезка LT.

C5. Найдите все значения параметра a, чтобы уравнение

$$\frac{\arcsin\left(2\cos(\pi x)\cdot\cos\left(\pi x-\frac{\pi}{2}\right)\right)}{x} = 2a$$ имело не менее 4 корней.

C6. Рассмотрите систему неравенств $\begin{cases} 2y+15-(x-7)^2 \geqslant y^2, \\ y(y-4) \leqslant x-5 \end{cases}$ и

а) найдите площадь геометрического места точек решений первого неравенства системы;

б) найдите количество целочисленных решений первого неравенства системы неравенств;

в) найдите количество целочисленных решений системы.

Вариант № 19

Часть 1

Ответом на задания B1–B10 должно быть целое число или конечная десятичная дробь.

B1. 1 киловатт-час электроэнергии стоит 2 рубля 60 копеек. Счётчик электроэнергии 1 мая показывал 7381 киловатт-час, а 1 июня — 8124 киловатт-часа. Сколько рублей надо заплатить за электроэнергию за май?

B2. В сентябре 1 кг помидоров стоил 80 рублей, в октябре помидоры подорожали на 20%, а в ноябре ещё на 15%. Сколько рублей стоил 1 кг помидоров после подорожания в ноябре?

В3. На диаграмме (см. рис. 105) показано изменение уровня атмосферных осадков h (в мм) в г. Смоленске в 2003 году. По горизонтали отмечается время в месяцах (указаны номера месяцев в году), по вертикали — ежемесячный уровень выпавших осадков (в мм). Укажите номер месяца, в котором уровень осадков в первый раз оказался выше 35 мм.

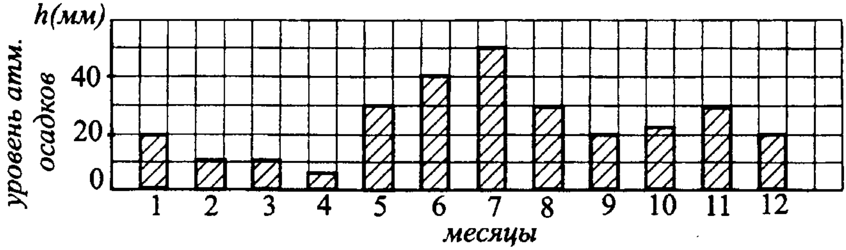


Рис. 105.

В4. Магазин одежды «Карлсон» заключает договоры со швейными фабриками. В договорах указывается, какой процент от суммы, вырученной за продажу одежды, поступит в доход магазина.

Фирма-производитель	Процент от выручки, поступающий в доход магазина	Примечание
Бети	9%	Все изделия
Прометей	12%	Изделия ценой до 5500 рублей
Прометей	7%	Изделия ценой свыше 5500 рублей
Искра	11%	Все изделия

В прейскуранте приведены цены на 4 пиджака. Определите, продажа какого пиджака наиболее выгодна для магазина. В ответ запишите, сколько рублей поступит в доход магазина от продажи этого пиджака.

Фирма-производитель	Изделие	Цена (руб.)
Прометей	Пиджак «Браво»	5600
Прометей	Пиджак «Вау»	5300
Искра	Пиджак «Супер»	4800
Бети	Пиджак «Классик»	5200

B5. Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 6. Найдите площадь параллелограмма $A'B'C'D'$, вершинами которого являются середины сторон данного параллелограмма (см. рис. 106).

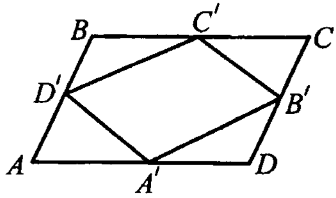


Рис. 106.

B6. Кубик бросают дважды. В сумме за эти 2 броска выпало 8 очков. Найдите вероятность того, что при первом броске выпало более 2 очков.

B7. Найдите наименьший положительный корень уравнения $\sin\frac{2\pi x}{3} = \frac{1}{2}$.

B8. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $BC = 5$, $\operatorname{tg} A = \frac{\sqrt{21}}{2}$. Найдите высоту CH.

B9. На рисунке 107 изображён график производной функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-9; 4)$. В какой точке отрезка $[-6; 3]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?

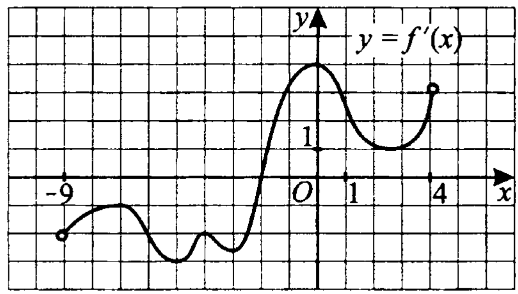


Рис. 107.

B10. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ сторона основания равна 2, а высота — 19. Найдите квадрат расстояния между A и E_1.

Часть 2

Ответом на задания B11 – B15 должно быть целое число или конечная десятичная дробь.

B11. Найдите значение выражения $(1 - \log_2 18)(1 - \log_9 18)$.

B12. Скорость колеблющегося на пружине груза меняется по закону $v(t) = 6\sin\pi t$ (см/с), где t — время в секундах. Какую долю времени из первой секунды скорость движения превышала 3 см/с? Ответ выразите десятичной дробью, округлив до сотых.

B13. Найдите объём призмы, в основаниях которой лежит квадрат со стороной 2,5, а боковые рёбра равны $8\sqrt{3}$ и наклонены к плоскости основания под углом $60°$.

B14. Петя прорешал задачник, содержащий 511 упражнений, ежедневно увеличивая норму выполненных заданий на одно и то же число. Известно, что за первые сутки он справился с 4 заданиями. Определите сколько упражнений он сделал в последний день, если вся эта работа заняла у него ровно 2 недели.

B15. Найдите наибольшее значение функции $y = \frac{20\sqrt{3}}{\pi} + \frac{6}{\pi}(44x - 10\,\mathrm{tg}\,x)$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{6}\right]$.

При выполнении заданий С1 – С6 требуется записать полное решение и ответ.

C1. а) Решите уравнение $3\sqrt{x^2 - 2x} = (x-1)^2 + 1$.
б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $[-2; 2]$.

C2. Площади трёх граней прямоугольного параллелепипеда равны 2, 5 и 10. Найдите объём параллелепипеда.

C3. Решите систему неравенств
$$\begin{cases} 9^x - 18 \cdot 3^x + 45 \leqslant 0, \\ \dfrac{x^4 - 3x^3 - x - 3}{x(x-3)} \geqslant x^2 - \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1}{x}. \end{cases}$$

C4. Точки K, L, M, N являются серединами сторон AB, BC, CD, AD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ соответственно. Известно, что KM и LN пересекаются под углом $60°$ и $KM : LN = 2 : 1$.

а) Докажите, что KL параллельно MN.

б) Найдите длину меньшей диагонали четырёхугольника $ABCD$, если длина большей равна $\sqrt{21}$.

C5. Найдите все значения параметра a, при которых система $\begin{cases} y = \sqrt{x-a} \\ x = \sqrt{y-a} \end{cases}$ имеет единственное решение.

C6. Последовательность a_n, $n \geqslant 1$, задана формулой
$a_n = 15n - 49 - n^2$.

а) Может ли сумма нескольких подряд идущих a_n быть равна -12?

б) Какое наибольшее значение может достигать сумма нескольких подряд идущих a_n?

Вариант № 20

Часть 1

Ответом на задания B1 – B10 должно быть целое число или конечная десятичная дробь.

B1. На автозаправке клиент отдал кассиру 800 рублей и попросил залить бензин до полного бака. Цена бензина — 34 руб. 30 коп. Сдачи клиент получил 11 руб. 10 коп. Сколько литров бензина было залито в бак?

B2. Одна таблетка лекарства весит 30 мг и содержит 15% активного вещества. Ребёнку врач прописывает 2,4 мг активного вещества на каждый килограмм веса в сутки. Сколько таблеток этого лекарства следует дать ребёнку в возрасте четырёх лет и весом 15 кг в течение суток?

B3. На графике (см. рис. 108) изображена зависимость крутящего момента двигателя от числа его оборотов в минуту. На оси абсцисс откладывается число оборотов в минуту, на оси ординат — крутящий момент в Н·м. Скорость автомобиля (в км/ч) приближённо выражается формулой $v = 0{,}03n$, где n — число оборотов двигателя в минуту. С какой наименьшей скоростью должен двигаться автомобиль, чтобы крутящий момент был не меньше 75 Н·м? Ответ дайте в километрах в час.

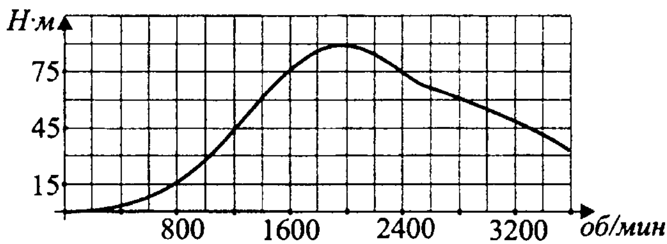


Рис. 108.

B4. В таблице даны условия банковского вклада в трёх различных банках. Предполагается, что клиент кладёт на счёт 20 000 рублей на срок 1 год. В каком банке к концу года вклад окажется наибольшим? В ответе укажите сумму этого вклада в рублях.

Банк	Обслуживание счёта*	Процентная ставка (% годовых)**
Банк А	100 руб. в год	3
Банк Б	15 руб. в месяц	5
Банк В	Бесплатно	2

* В начале года или месяца со счёта снимается указанная сумма в уплату за ведение счёта.

** В конце года вклад увеличивается на указанное количество процентов.

B5. Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 84. Точка P — середина стороны AB (см. рис. 109). Найдите площадь трапеции $DCBP$.

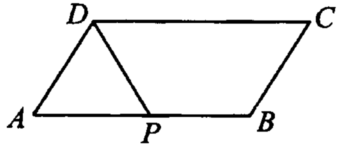


Рис. 109.

B6. В торговом центре два одинаковых автомата продают шоколадки. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончатся шоколадки, равна 0,6. Вероятность того, что шоколадки закончатся в обоих автоматах, равна 0,22. Найдите вероятность того, что к концу дня шоколадки останутся в обоих автоматах.

B7. Найдите наибольший отрицательный корень уравнения $\operatorname{tg} \frac{5\pi x}{4} = -1$.

B8. В треугольнике ABC угол C равен 90°, CH — высота, $BC = 8$, $\sin A = \frac{1}{4}$. Найдите AH.

B9. На рисунке 110 изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-4; 7)$. В какой точке отрезка $[-2; 6]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение?

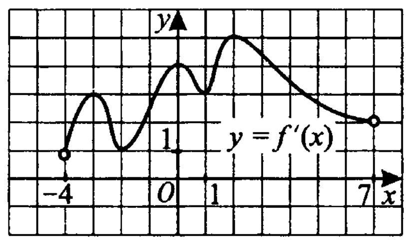


Рис. 110.

B10. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все рёбра основания и боковые рёбра равны 8. Найдите угол AC_1C. Ответ дайте в градусах.

Часть 2

Ответом на задания B11 – B15 должно быть целое число или конечная десятичная дробь.

B11. Найдите $\operatorname{tg} \alpha$, если $\frac{17\cos\alpha + 3\sin\alpha}{6\sin\alpha - 32\cos\alpha} = 2$.

B12. Антенна, установленная на приборе, ловит радиосигнал, который затем преобразуется в электрический сигнал, изменяющийся со временем по закону $U = U_0 \sin(\omega t + \varphi)$, где t — время в секундах, амплитуда $U_0 = 3$ В, частота $\omega = 120°/\text{с}$, фаза $\varphi = -60°$. При напряжении не ниже 1,5 В загорается лампочка. Найдите, какую часть времени (в процентах) на протяжении первой секунды после начала работы лампочка будет гореть.

B13. Основанием пирамиды служит прямоугольник, одна боковая грань перпендикулярна плоскости основания, а три другие наклонены к плоскости основания под углом 30°. Высота пирамиды равна 5. Найдите объём пирамиды.

B14. Часы со стрелками показывают 4 часа утра. Через сколько минут минутная стрелка в восьмой раз поравняется с часовой?

B15. Найдите наименьшее значение функции $y = 4x - 3\operatorname{tg} x + \frac{2\pi}{3} - \sqrt{3}$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$.

При выполнении заданий C1—C6 требуется записать полное решение и ответ.

C1. а) Решите уравнение $4\sqrt{x^2 - 4x} = (x-2)^2 - 1$.
б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $[-1; 1]$.

C2. Объём прямоугольного параллелепипеда равен 6, а площади двух его граней равны 2 и 3. Найдите площадь третьей грани.

C3. Решите систему неравенств
$$\begin{cases} 16^x - 21 \cdot 4^x + 68 \leqslant 0, \\ \dfrac{x^4 - 4x^3 - x - 2}{x(x-4)} \geqslant x^2 - \dfrac{1}{2(x-2)} + \dfrac{1}{2x}. \end{cases}$$

C4. Точки K, L, M, N являются серединами сторон AB, BC, CD, AD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ соответственно. Известно, что KM и LN пересекаются под углом 60° и $LN : KM = 4 : 1$.

а) Докажите, что LM параллельно KN.

б) Найдите длину большей диагонали четырёхугольника $ABCD$, если длина меньшей равна $\sqrt{13}$.

C5. Найдите все значения параметра a, при которых система
$\begin{cases} y = \sqrt{2x - a} \\ x = \sqrt{2y - a} \end{cases}$ имеет 2 решения.

C6. Последовательность a_n, $n \geqslant 1$, задана формулой
$a_n = 25n - 149 - n^2$.

а) Может ли сумма нескольких подряд идущих a_n быть равна 14?

б) Какое наибольшее значение может достигать сумма нескольких подряд идущих a_n?

Ответы к заданиям части B

№	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9	B10	B11	B12	B13	B14	B15
1	19	83	11	0,72	18	0,16	15	–0,8	–0,5	117	6	1,25	264	70	2
2	17	160	7	71	42	0,91	3	25	0,5	5	3	11	128	9	1
3	17	31	6	25 430	20	0,16	–3,5	14	9	109	3	13	90	20	5
4	458	5040	3	4,1	14	0,52	3	70	6	89	6	10	2,89	2112	4
5	868	15	3	28	22,5	0,16	4	3	2	105	–7	2,32	221	465	1
6	19 200	7	6	520 800	20	0,8	1	12	4	54	–2	15	13,5	344 400	4
7	5	61	8	489,6	27	0,96	22	120	6	8	12	60	68	450	–4,6
8	9	1830	7,5	372	18	0,25	1,2	3	6	35	3	10	434	4	125
9	6	90 000	32	30 855	31	0,5	0,6	72	3	13	7	30	42,25	16	9
10	201	21 576	–15	535	5	0,25	–3,5	1,875	22	15	19	60	58	16	2
11	25	26 000	8	4054,5	16	0,24	1,5	145	6	0,5	1,5	3,8	108	6	0,75
12	37	9280	12	810	34	0,3125	–1,5	5,4	2	30	–7	6	212,5	6,4	3,5
13	87	32	8	1229	12	0,25	–4,8	14	5	18,6	–1	2,75	282	10	1
14	24	12,5	4	4788	14,5	0,18	19	1	–1	0,64	2	72	1944	485	0
15	3	3496	990,5	25 200	32,5	0,375	–1	15	175	–0,6	0,25	90	240	25	10
16	182,7	240	28	10 050	31	0,12	2	14	2187	60	8	160	12	25	10
17	16	11 760	2	3,25	40	0,4	7,5	18	1	24	402	60	120	12	–19
18	11	4480	15	638,4	1,25	0,5	3,5	50	1	12	5	2,7	0,5	40	14
19	1931,8	110,4	6	636	3	0,8	0,25	2	–2	373	1	0,67	75	69	44
20	23	8	48	20 811	63	0,02	–0,2	30	6	60	9	25	250	480	0

Ответы к заданиям части С (начало)

№	С1	С2	С3	С4	С5	С6
1	а) $\pi + 2\pi n,\ n \in Z$, $\pm\frac{2\pi}{3} + 4\pi k,\ k \in Z$; б) $\frac{10\pi}{3}$	24	$\left(0; \frac{1}{2}\right)\cup$ $\cup[0{,}5\sqrt[3]{4}; 1)\cup$ $\cup[4; +\infty)$	$9\frac{3}{13}$	$(1; 1{,}2)\cup$ $\cup(1{,}2; 2{,}5]\cup$ $\cup\{3\}$	а) да; б) нет; в) да
2	а) $2\pi k,\ k \in Z$, $(-1)^n\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$; б) $\frac{13\pi}{3}$	3	$\left(0; \frac{1}{3}\right) \cup \left[\frac{\sqrt{3}}{3}; 1\right)$	$15\sqrt{3}$	$(-2; 0)$	а) нет решений; б) 2, 3 и 5; в) 2013
3	а) $\frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$; $\pm\left(\pi - \arccos\frac{1}{4}\right) + 2\pi n, n \in Z$; б) $\frac{\pi}{2}$; $\pi - \arccos\frac{1}{4}$	16	$\left(\frac{2}{3}; 1\right)\cup$ $\cup\left[\frac{1+\sqrt{7}}{3}; \log_2 3\right]$	25	$\left(\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right]$	а) да; б) нет; в) да
4	а) $\frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$; $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$; б) $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{4\pi}{3}$	$25\sqrt{3}$	$(-6; -5]\cup$ $\cup(2; \log_2 5]$	$\frac{3}{13}$	0; $\frac{25}{12}$	а) да; б) нет; в) да
5	а) $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$; б) $-\frac{2\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{4\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$(1; 2)$	74°	$\frac{2}{3}$; 4	а) Да, могут ($a_1 = 67, d = 3$); б) нет; в) нет

Ответы к заданиям части C (продолжение)

№	C1	C2	C3	C4	C5	C6
6	а) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in Z$; б) $-\frac{\pi}{6}$; $\frac{7\pi}{6}$; $\frac{11\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\left[-4\frac{2}{3};-4\right)\cup$ $\cup(-4;-3]\cup(4;5)$	15°	1; 2; $\frac{\sqrt{17}-3}{2}$	а) Да, могут ($a_1=31, d=4$); б) нет; в) нет
7	а) $\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$, $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$; б) $-1{,}5\pi,\ -\frac{5\pi}{6},\ -0{,}5\pi$	$\frac{13}{37}$	$\left(0;\frac{1}{4}\right]$	108; 2700	$\left[-\frac{16}{9};\frac{2}{9}\right]$	а) 15; б) 15; в) наименьшая доля $\frac{2}{5}$, наибольшая — $\frac{3}{4}$
8	а) $\frac{\pi}{2}+\pi k,\ \pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $k,n\in Z$; б) $-\frac{7\pi}{3},\ -\frac{5\pi}{3}$, $-1{,}5\pi,\ -0{,}5\pi$	$\operatorname{arctg}\frac{5\sqrt{2}}{3}$	$\left(-\frac{1}{5};-\frac{2}{15}\right)\cup$ $\cup\left(-\frac{2}{15};-0{,}1\right)\cup$ $\cup(0;0{,}1)\cup[0{,}5;\sqrt{15}]$	75 или 50	$\left[-\frac{3}{8};0\right]$	а) 6; б) 25; в) наименьшая доля $\frac{4}{9}$, наибольшая — $\frac{5}{6}$
9	а) $\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$; б) $-\frac{17\pi}{2};-\frac{15\pi}{2};-\frac{13\pi}{2}$	$2\sqrt{3}$	$(-1;\ 0{,}5(1-\sqrt{5})]\cup$ $\cup(0{,}5;\ 1)\cup$ $\cup(0{,}5(1+\sqrt{5});\ 3)$	б) 750	$\left(\pi;\ \pi+\sqrt{\sqrt{5}-2}-\right.$ $\left.-\arcsin(\sqrt{5}-2)\right)$	а) нет решений; б) от 1 до 9; в) нет решений
10	а) $-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$; б) $-\frac{5\pi}{2};-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}$	$\frac{1}{7}$	$\left(-3;\ \frac{1-\sqrt{21}}{2}\right)\cup$ $\cup\left(\frac{1+\sqrt{21}}{2};\ 5\right]$	б) $3\sqrt{2}$	$\left\{\frac{\arccos(\sqrt{5}-2)}{2}+\right.$ $\left.+\frac{\sqrt{\sqrt{5}-2}}{2}\right\}\cup$ $\cup[0;\ 0{,}5)$	а) 4; б) 4; в) 3

Ответы к заданиям части C (продолжение)

№	C1	C2	C3	C4	C5	C6
11	а) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ n\in Z$; б) $-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$	$\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}$	$[4; +\infty)$	$\sqrt{6}$	$\left(3; \frac{2\sqrt{3}+27}{9}\right)$	а) второй; б) второй; в) первый
12	а) $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$, $2\pi k,\ k\in Z$; б) $-\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$	2	$[0; \log_3 2]$	$\sqrt{10}$	$\left(\frac{15}{4}; 4\right]$	а) второй; б) второй; в) первый
13	а) $\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$; $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}, k\in Z$; б) $-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}$	$18\sqrt{5}$	$(3; 2\log_2 3]$	$118{,}8\sqrt{11}$	$\left(\frac{1}{9}; \frac{10+4\sqrt{5}}{3}\right)$	а) 20 160; б) 1152; в) 2880
14	а) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}, k\in Z$; б) $-\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}$	$\frac{169\sqrt{7}}{4}$	$(1; \log_3 6]$	8,5	$\left(-\infty; \frac{1}{4}\right)\cup$ $\cup\left(\frac{7+4\sqrt{2}}{4}; +\infty\right)$	а) 17; б) 26; в) 0
15	а) $\frac{\pi}{6}+2\pi k, k\in Z$; б) $\frac{\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}$	2	$(-0{,}6; -0{,}5]\cup$ $\cup(0; \log_3 4)\cup$ $\cup(2; +\infty)$	16	$\left[-1; -\frac{1}{2}\right]\cup\{1\}$	а) нет; б) нет; в) нет

Ответы к заданиям части C (окончание)

№	C1	C2	C3	C4	C5	C6
16	а) $\frac{\pi}{3}+2\pi k, k\in Z$ б) $-\frac{5\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$	12	$(-2\sqrt{2}; -\sqrt{5}]\cup$ $\cup\{-2\}\cup[\sqrt{5}; 2\sqrt{2})$	2	$\left(-2;-1\right)\cup\left(1\frac{1}{3};2\right)$	а) 5; б) 3 или 0; в) 17
17	а) $-\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z;$ $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi k, k\in Z;$ б) $-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \operatorname{arctg}\frac{1}{2},$ $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi, \operatorname{arctg}\frac{1}{2}+2\pi$	$10\sqrt{82}$	$\left[-\log_2 15;\ -\frac{7}{2}\right)\cup$ $\cup\{-1\}$	$\frac{391}{40}$	$\left(-\infty;-\frac{3}{14}\right]\cup$ $\cup\left(\frac{1}{6};\frac{3}{2}\right)\cup$ $\cup\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$	а) 9π; б) 25; в) 16
18	а) $-\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z;$ $(-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}, n\in Z;$ б) $\frac{3\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}, \frac{13\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\{1\}\cup(3;\log_3 28]$	$\frac{32}{5}$	$\left(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{5}\right]\cup\{\pi\}$	а) 16π; б) 49; в) 35
19	а) $1\pm\sqrt{2},\ 1\pm\sqrt{5};$ б) $1-\sqrt{2},\ 1-\sqrt{5}$	10	$\{1\}\cup(2;\log_3 15]$	3	$(-\infty;0)\cup\{0{,}25\}$	а) да, a_3+a_4+ $+a_5+a_6=-12;$ б) 26
20	а) $2\pm\sqrt{5},\ 2\pm\sqrt{13};$ б) $2-\sqrt{5}$	6	$\{1\}\cup(2;\log_4 17]$	$\sqrt{21}$	$[0;1)$	а) да, $a_{12}+a_{13}=14;$ б) 26

Литература

1. Спецификация контрольных измерительных материалов для проведения в 2014 году Единого государственного экзамена по математике [Электронный ресурс]. — Москва: ФИПИ, 2013. — Режим доступа: www.fipi.ru, свободный.

2. Демонстрационный вариант контрольных измерительных материалов для проведения в 2014 году Единого государственного экзамена по математике [Электронный ресурс]. — Москва: ФИПИ, 2013. — Режим доступа: www.fipi.ru, свободный.

3. Кодификатор элементов содержания по математике для составления контрольных измерительных материалов для проведения Единого государственного экзамена [Электронный ресурс]. — Москва: ФИПИ, 2013. — Режим доступа: www.fipi.ru, свободный.

4. Кодификатор требований к уровню подготовки выпускников общеобразовательных учреждений для проведения Единого государственного экзамена по математике [Электронный ресурс]. — Москва: ФИПИ, 2013. — Режим доступа: www.fipi.ru, свободный.

5. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования (5 – 9 классы). Приказ Минобрнауки РФ № 1897 от 17.12.2010.

6. Федеральный компонент государственного стандарта общего образования. Математика. Основное общее образование; среднее (полное) общее образование. Приказ Минобрнауки РФ от 05.03.04 № 1089.

7. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего (полного) общего образования. Приказ Минобрнауки РФ № 413 от 17.05.2012.

8. *Евич Л. Н., Ольховая Л. С. и др.* Математика. Устные вычисления и быстрый счёт. Тренировочные упражнения за курс 7–11 классов: учебно-методическое пособие / Под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова. — Ростов-на-Дону: Легион-М, 2010.

9. *Лукин Р. Д., Лукина Т. К., Якунина М. С.* Устные упражнения по алгебре и началам анализа. — М.: Просвещение, 1989.

10. Математика. Подготовка к ЕГЭ-2014: учебно-методическое пособие / Под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова. — Ростов-на-Дону: Легион, 2013.

11. Математика. Решебник. Подготовка к ЕГЭ-2014: учебно-методическое пособие / Под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова. — Ростов-на-Дону: Легион, 2013.

Готовимся к ЕГЭ

Учебное издание

Войта Елена Александровна, **Дерезин** Святослав Викторович,
Дрёмов Виктор Александрович, **Иванов** Сергей Олегович,
Коннова Елена Генриевна, **Нужа** Галина Леонтьевна,
Ольховая Людмила Сергеевна, **Резникова** Нина Михайловна,
Фридман Елена Михайловна, **Ханин** Дмитрий Игоревич

**МАТЕМАТИКА.
ПОДГОТОВКА К ЕГЭ-2014.
УЧЕБНО-ТРЕНИРОВОЧНЫЕ ТЕСТЫ
ПО НОВОЙ СПЕЦИФИКАЦИИ: В1–В15, С1–С6**

Под редакцией ***Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова***

Налоговая льгота: издание соответствует коду 95 3000 ОК 005-93 (ОКП)

Обложка *А. Вартанов*
Компьютерная верстка *С. Иванов*
Корректор *Н. Коновалова*

Подписано в печать с оригинал-макета 07.11.2013.
Формат $60x84^1/_{16}$. Бумага типографская.
Гарнитура Таймс. Печать офсетная. Усл. печ. л. 8,37.
Тираж 15000 экз. Заказ № **270.**

Издательство ООО «Легион» включено в перечень организаций, осуществляющих издание учебных пособий, которые допускаются к использованию в образовательном процессе в имеющих государственную аккредитацию и реализующих образовательные программы общего образования образовательных учреждениях. Приказ Минобрнауки России № 729 от 14.12.2009, зарегистрирован в Минюст России 15.01.2010 № 15987.

ООО «ЛЕГИОН»
Для писем: 344000, г. Ростов-на-Дону, а/я 550.
Адрес редакции: 344011, г. Ростов-на-Дону, пер. Доломановский, 55.
www.legionr.ru e-mail: legionrus@legionrus.com