Часть 1

Ответом на задания B1–B10 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерения писать не нужно.

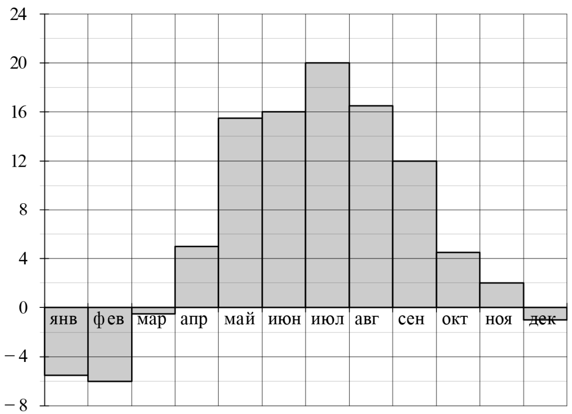
B1 Для ремонта квартиры купили 61 рулон обоев. Какое наименьшее количество пачек обойного клея нужно купить, если одна пачка клея рассчитана на 7 рулонов?

Ответ: ____________________________.

B2 Железнодорожный билет для взрослого стоит 600 рублей. Стоимость билета для школьника составляет 50% от стоимости билета для взрослого. Группа состоит из 19 школьников и 3 взрослых. Сколько рублей стоят билеты на всю группу?

Ответ: ____________________________.

B3 На диаграмме показана средняя температура воздуха в Минске за каждый месяц 2003 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали – средняя температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме, сколько в 2003 году было месяцев, когда средняя температура в Минске была положительной.



Ответ: ____________________________.

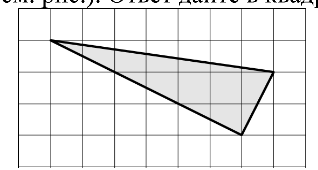
B4 Клиент хочет арендовать автомобиль на двое суток для поездки протяжённостью 400 км. В таблице приведены характеристики трёх автомобилей и стоимость их аренды. Помимо аренды клиент обязан оплатить топливо для автомобиля на всю поездку. Какую сумму в рублях заплатит клиент за аренду и топливо, если выберет самый дешёвый вариант?

Автомобиль	Топливо	Расход топлива (л на 100 км)	Арендная плата (руб. за 1 сутки)
А	Дизельное	7	3800
Б	Бензин	9	2800
В	Газ	13	3100

Цена дизельного топлива – 19 рублей за литр, бензина – 25 рублей за литр, газа – 14 рублей за литр.

Ответ: ____________________________.

B5 Найдите площадь треугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см $\times$ 1 см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Ответ: ____________________________.

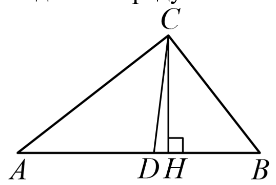
B6 Вероятность того, что новый персональный компьютер прослужит больше года, равна 0,98. Вероятность того, что он прослужит больше двух лет, равна 0,84. Найдите вероятность того, что он прослужит меньше двух лет, но больше года.

Ответ: ____________________________.

B7 Найдите корень уравнения $\sqrt{13-x}=3$.

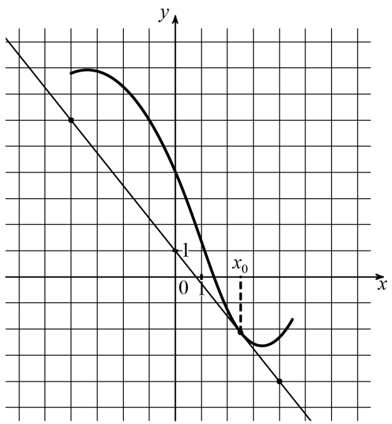
Ответ: ____________________________.

B8 В прямоугольном треугольнике угол между высотой и биссектрисой, проведёнными из вершины прямого угла, равен 7°. Найдите меньший угол данного треугольника. Ответ дайте в градусах.



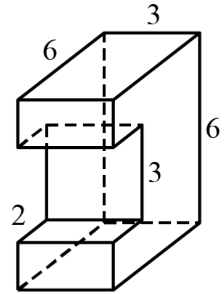
Ответ: ___________________________.

B9 На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Ответ: ___________________________.

B10 Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы прямые).



Ответ: ___________________________.

Часть 2

Ответом на задания B11–B15 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерения писать не нужно.

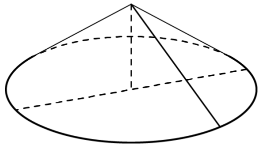
B11 Найдите значение выражения $\dfrac{-44\sin 20^\circ}{\sin 340^\circ}$.

Ответ: ___________________________.

B12 Зависимость температуры (в градусах Кельвина) от времени для нагревательного элемента некоторого прибора была получена экспериментально. На исследуемом интервале температура вычисляется по формуле $T(t) = T_0 + bt + at^2$, где t – время в минутах, $T_0 = 1300$ К, $a = -20$ К/мин^2, $b = 220$ К/мин. Известно, что при температуре нагревателя 1500 К прибор нужно отключить во избежание поломки. Определите, через сколько минут после начала работы нужно отключить прибор.

Ответ: ___________________________.

B13 Высота конуса равна 3, а длина образующей равна 5. Найдите диаметр основания конуса.



Ответ: ____________________________.

B14 Заказ на 140 деталей первый рабочий выполняет на 4 часа быстрее, чем второй. Сколько деталей в час делает второй рабочий, если известно, что первый за час делает на 4 детали больше?

Ответ: ____________________________.

B15 Найдите наибольшее значение функции $y = x^3 + 8x^2 + 16x + 23$ на отрезке $[-13; -3]$.

Ответ: ____________________________.

Для записи решений и ответов на задания C1–C6 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (C1, C2 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1 а) Решите уравнение $4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1 = 0$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-2\pi; -\pi]$.

C2 Высота SO правильной треугольной пирамиды $SABC$ составляет $\frac{5}{7}$ от высоты SM боковой грани SAB. Найдите угол между плоскостью основания пирамиды и её боковым ребром.

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_2^2(-\log_2 x) + \log_2 \log_2^2 x \le 3, \\ -4\left|x^2 - 1\right| - 3 \ge \dfrac{1}{x^2 - 1}. \end{cases}$$

C4 На гипотенузу AB прямоугольного треугольника ABC опустили высоту CH. Из точки H на катеты опустили перпендикуляры HK и HE.
а) Докажите, что точки A, B, K и E лежат на одной окружности.
б) Найдите радиус этой окружности, если $AB = 12$, $CH = 5$.

C5 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\left|(x-1)^2 - 2^{1-a}\right| + |x-1| + (1-x)^2 + 2^{a-1} = 4 + 4^a$ имеет единственное решение. Найдите это решение для каждого значения a.

C6 По кругу в некотором порядке по одному разу написаны числа от 9 до 18. Для каждой из десяти пар соседних чисел нашли их наибольший общий делитель.
а) Могло ли получиться так, что все наибольшие общие делители равны 1?
б) Могло ли получиться так, что все наибольшие общие делители попарно различны?
в) Какое наибольшее количество попарно различных наибольших общих делителей могло при этом получиться?

Часть 1

Ответом на задания В1–В10 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерения писать не нужно.

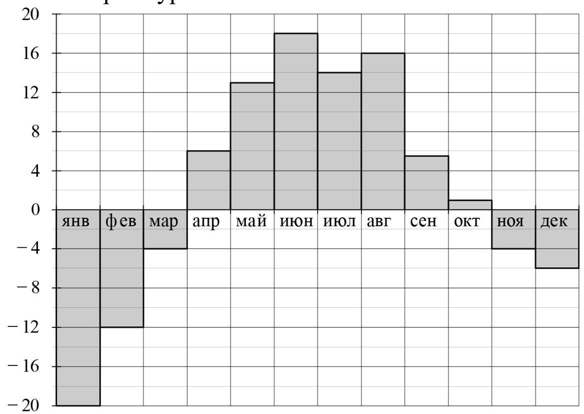
B1 Для ремонта квартиры купили 28 рулонов обоев. Какое наименьшее количество пачек обойного клея нужно купить, если одна пачка клея рассчитана на 5 рулонов?

Ответ: ___________________________.

B2 Железнодорожный билет для взрослого стоит 650 рублей. Стоимость билета для школьника составляет 50% от стоимости билета для взрослого. Группа состоит из 17 школьников и 3 взрослых. Сколько рублей стоят билеты на всю группу?

Ответ: ___________________________.

B3 На диаграмме показана средняя температура воздуха в Екатеринбурге (Свердловске) за каждый месяц 1973 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали – средняя температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме, сколько в 1973 году было месяцев с положительной средней температурой в Екатеринбурге.



Ответ: ___________________________.

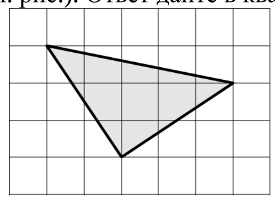
B4 Клиент хочет арендовать автомобиль на сутки для поездки протяжённостью 200 км. В таблице приведены характеристики трёх автомобилей и стоимость их аренды. Помимо аренды клиент обязан оплатить топливо для автомобиля на всю поездку. Какую сумму в рублях заплатит клиент за аренду и топливо, если выберет самый дешёвый вариант?

Автомобиль	Топливо	Расход топлива (л на 100 км)	Арендная плата (руб. за 1 сутки)
А	Дизельное	7	3500
Б	Бензин	8	2700
В	Газ	10	2800

Цена дизельного топлива – 21 рубль за литр, бензина – 23 рубля за литр, газа – 14 рублей за литр.

Ответ: ___________________________.

B5 Найдите площадь треугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см $\times$ 1 см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Ответ: ___________________________.

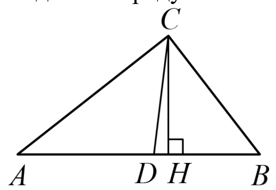
B6 Вероятность того, что новый персональный компьютер прослужит больше года, равна 0,93. Вероятность того, что он прослужит больше двух лет, равна 0,86. Найдите вероятность того, что он прослужит меньше двух лет, но больше года.

Ответ: ___________________________.

B7 Найдите корень уравнения $\sqrt{19-3x}=5$.

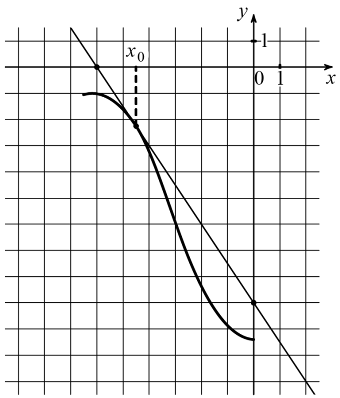
Ответ: ___________________________.

B8 В прямоугольном треугольнике угол между высотой и биссектрисой, проведёнными из вершины прямого угла, равен 2°. Найдите меньший угол данного треугольника. Ответ дайте в градусах.



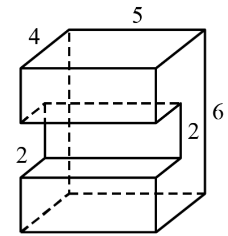
Ответ: ______________________________.

B9 На рисунке изображены график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Ответ: ______________________________.

B10 Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы прямые).



Ответ: ______________________________.

Часть 2

Ответом на задания B11–B15 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерения писать не нужно.

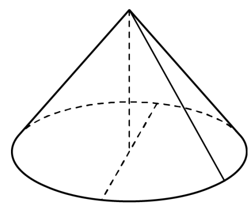
B11 Найдите значение выражения $\dfrac{-32\sin 96^\circ}{\sin 264^\circ}$.

Ответ: ______________________________.

B12 Зависимость температуры (в градусах Кельвина) от времени для нагревательного элемента некоторого прибора была получена экспериментально. На исследуемом интервале температура вычисляется по формуле $T(t)=T_0+bt+at^2$, где t – время в минутах, $T_0=1340$ К, $a=-5$ К/мин^2, $b=40$ К/мин. Известно, что при температуре нагревателя 1400 К прибор нужно отключить во избежание поломки. Определите, через сколько минут после начала работы нужно отключить прибор.

Ответ: ______________________________.

B13 Высота конуса равна 12, а длина образующей равна 15. Найдите диаметр основания конуса.



Ответ: ______________________________.

B14 На изготовление 540 деталей первый рабочий затрачивает на 12 часов меньше, чем второй рабочий на изготовление 600 деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 10 деталей больше, чем второй. Сколько деталей в час делает первый рабочий?

Ответ: ____________________________.

B15 Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 - 10x^2 + 25x + 7$ на отрезке $[4; 11]$.

Ответ: ____________________________.

Для записи решений и ответов на задания С1–С6 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (С1, С2 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1 а) Решите уравнение $16\cos^4 x - 24\cos^2 x + 9 = 0$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[2\pi; 3\pi]$.

C2 Высота SO правильной треугольной пирамиды $SABC$ составляет $\frac{4}{5}$ от высоты SM боковой грани SAB. Найдите угол между плоскостью основания пирамиды и её боковым ребром.

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log^2_{0,5}(-\log_3 x) - \log_{0,5}\log^2_3 x \le 3, \\ -8|x^2 - 1| - 2 \ge \dfrac{1}{x^2 - 1}. \end{cases}$$

C4 На гипотенузу AB прямоугольного треугольника ABC опустили высоту CH. Из точки H на катеты опустили перпендикуляры HK и HE.
а) Докажите, что точки A, $И$, K и E лежат на одной окружности.
б) Найдите радиус этой окружности, если $AB = 24$, $CH = 7$.

C5 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\left|(x+1)^2 - 2^{-a-1}\right| + |x+1| + (1+x)^2 + 2^{a+1} = 0,25 + 4^a$ имеет единственное решение. Найдите это решение для каждого значения a.

C6 По кругу в некотором порядке по одному разу написаны числа от 10 до 21. Для каждой из двенадцати пар соседних чисел нашли их наибольший общий делитель.
а) Могло ли получиться так, что все наибольшие общие делители равны 1?
б) Могло ли получиться так, что все наибольшие общие делители попарно различны?
в) Какое наибольшее количество попарно различных наибольших общих делителей могло при этом получиться?

Часть 1

Ответом на задания В1–В10 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерения писать не нужно.

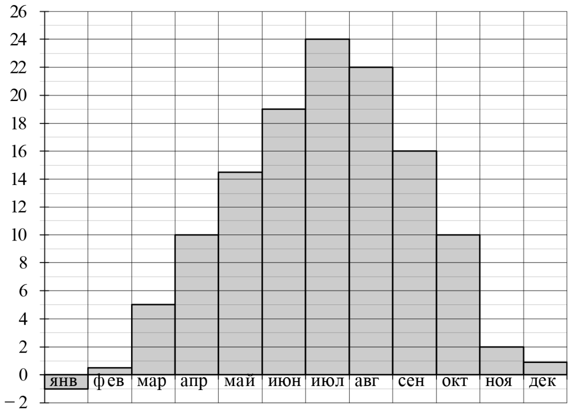
B1 Для ремонта квартиры купили 49 рулонов обоев. Какое наименьшее количество пачек обойного клея нужно купить, если одна пачка клея рассчитана на 5 рулонов?

Ответ: ____________________________.

B2 Железнодорожный билет для взрослого стоит 620 рублей. Стоимость билета для школьника составляет 50% от стоимости билета для взрослого. Группа состоит из 14 школьников и 2 взрослых. Сколько рублей стоят билеты на всю группу?

Ответ: ____________________________.

B3 На диаграмме показана средняя температура воздуха в Симферополе за каждый месяц 1988 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали – средняя температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме, сколько в 1988 году было месяцев с положительной средней температурой в Симферополе.



Ответ: ____________________________.

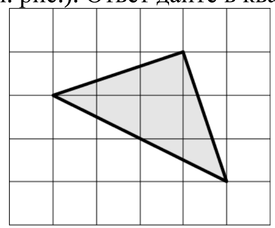
B4 Клиент хочет арендовать автомобиль на трое суток для поездки протяжённостью 900 км. В таблице приведены характеристики трёх автомобилей и стоимость их аренды. Помимо аренды клиент обязан оплатить топливо для автомобиля на всю поездку. Какую сумму в рублях заплатит клиент за аренду и топливо, если выберет самый дешёвый вариант?

Автомобиль	Топливо	Расход топлива (л на 100 км)	Арендная плата (руб. за 1 сутки)
А	Дизельное	6	3600
Б	Бензин	8	3200
В	Газ	15	3100

Цена дизельного топлива – 19 рублей за литр, бензина – 25 рублей за литр, газа – 16 рублей за литр.

Ответ: ____________________________.

B5 Найдите площадь треугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Ответ: ____________________________.

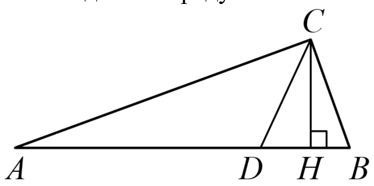
B6 Вероятность того, что новый тостер прослужит больше года, равна 0,98. Вероятность того, что он прослужит больше двух лет, равна 0,86. Найдите вероятность того, что он прослужит меньше двух лет, но больше года.

Ответ: ____________________________.

B7 Найдите корень уравнения $\sqrt{16-4x}=2$.

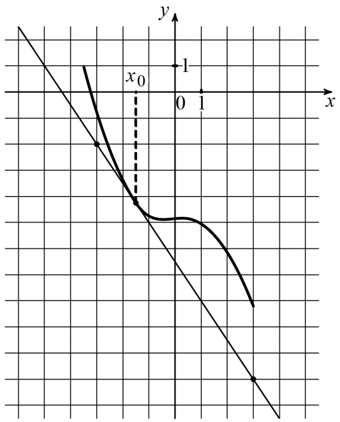
Ответ: ____________________________.

B8 В прямоугольном треугольнике угол между высотой и биссектрисой, проведёнными из вершины прямого угла, равен $30°$. Найдите меньший угол данного треугольника. Ответ дайте в градусах.



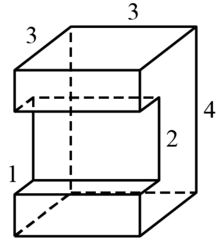
Ответ: ___________________________.

B9 На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Ответ: ___________________________.

B10 Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы прямые).



Ответ: ___________________________.

Часть 2

Ответом на задания B11–B15 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерения писать не нужно.

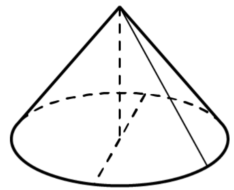
B11 Найдите значение выражения $\dfrac{46\sin 24°}{\sin 336°}$.

Ответ: ___________________________.

B12 Зависимость температуры (в градусах Кельвина) от времени для нагревательного элемента некоторого прибора была получена экспериментально. На исследуемом интервале температура вычисляется по формуле $T(t) = T_0 + bt + at^2$, где t – время в минутах, $T_0 = 680$ К, $a = -16$ К/мин^2, $b = 224$ К/мин. Известно, что при температуре нагревателя 1400 К прибор нужно отключить во избежание поломки. Определите, через сколько минут после начала работы нужно отключить прибор.

Ответ: ___________________________.

B13 Высота конуса равна 4, а длина образующей равна 5. Найдите диаметр основания конуса.



Ответ: ___________________________.

B14 Заказ на 104 детали первый рабочий выполняет на 5 часов быстрее, чем второй. Сколько деталей в час делает второй рабочий, если известно, что первый за час делает на 5 деталей больше?

Ответ: ____________________________.

B15 Найдите наибольшее значение функции $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$ на отрезке $[0,5;\ 2]$.

Ответ: ____________________________.

Для записи решений и ответов на задания С1–С6 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (С1, С2 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1 а) Решите уравнение $4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1 = 0$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-2\pi;\ -\pi]$.

C2 Высота SO правильной треугольной пирамиды $SABC$ составляет $\frac{5}{7}$ от высоты SM боковой грани SAB. Найдите угол между плоскостью основания пирамиды и её боковым ребром.

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_2^2(-\log_2 x) + \log_2 \log_2^2 x \le 3, \\ -4\left|x^2 - 1\right| - 3 \ge \dfrac{1}{x^2 - 1}. \end{cases}$$

C4 На гипотенузу AB прямоугольного треугольника ABC опустили высоту CH. Из точки H на катеты опустили перпендикуляры HK и HE.
а) Докажите, что точки A, B, K и E лежат на одной окружности.
б) Найдите радиус этой окружности, если $AB = 12$, $CH = 5$.

C5 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\left|(x-1)^2 - 2^{1-a}\right| + \left|x-1\right| + (1-x)^2 + 2^{a-1} = 4 + 4^a$ имеет единственное решение. Найдите это решение для каждого значения a.

C6 По кругу в некотором порядке по одному разу написаны числа от 9 до 18. Для каждой из десяти пар соседних чисел нашли их наибольший общий делитель.
а) Могло ли получиться так, что все наибольшие общие делители равны 1?
б) Могло ли получиться так, что все наибольшие общие делители попарно различны?
в) Какое наибольшее количество попарно различных наибольших общих делителей могло при этом получиться?

Часть 1

Ответом на задания B1–B10 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерения писать не нужно.

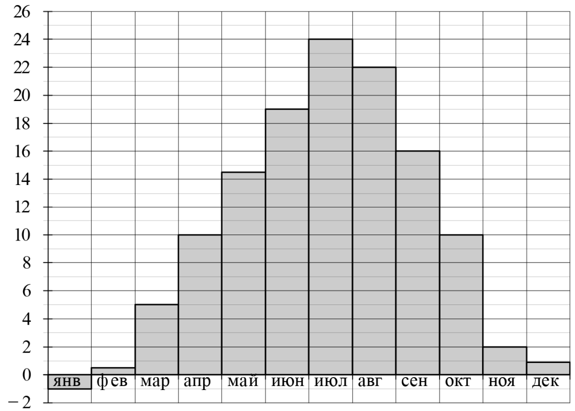
B1 Для ремонта квартиры купили 61 рулон обоев. Какое наименьшее количество пачек обойного клея нужно купить, если одна пачка клея рассчитана на 7 рулонов?

Ответ: ____________________________.

B2 Железнодорожный билет для взрослого стоит 650 рублей. Стоимость билета для школьника составляет 50% от стоимости билета для взрослого. Группа состоит из 17 школьников и 3 взрослых. Сколько рублей стоят билеты на всю группу?

Ответ: ____________________________.

B3 На диаграмме показана средняя температура воздуха в Симферополе за каждый месяц 1988 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали – средняя температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме, сколько в 1988 году было месяцев с положительной средней температурой в Симферополе.



Ответ: ____________________________.

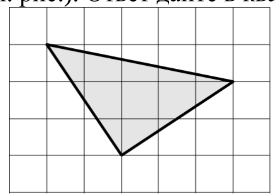
B4 Клиент хочет арендовать автомобиль на двое суток для поездки протяжённостью 400 км. В таблице приведены характеристики трёх автомобилей и стоимость их аренды. Помимо аренды клиент обязан оплатить топливо для автомобиля на всю поездку. Какую сумму в рублях заплатит клиент за аренду и топливо, если выберет самый дешёвый вариант?

Автомобиль	**Топливо**	**Расход топлива (л на 100 км)**	**Арендная плата (руб. за 1 сутки)**
А	Дизельное	7	3800
Б	Бензин	9	2800
В	Газ	13	3100

Цена дизельного топлива – 19 рублей за литр, бензина – 25 рублей за литр, газа – 14 рублей за литр.

Ответ: ____________________________.

B5 Найдите площадь треугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Ответ: ____________________________.

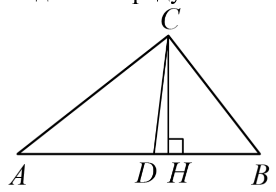
B6 Вероятность того, что новый тостер прослужит больше года, равна 0,98. Вероятность того, что он прослужит больше двух лет, равна 0,86. Найдите вероятность того, что он прослужит меньше двух лет, но больше года.

Ответ: ____________________________.

B7 Найдите корень уравнения $\sqrt{13-x}=3$.

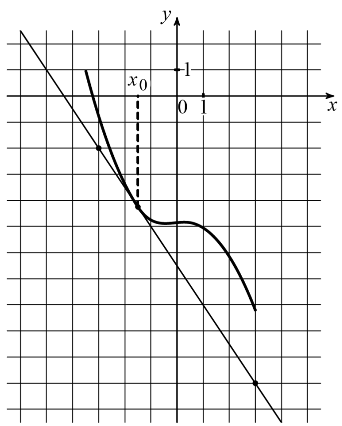
Ответ: ____________________________.

B8 В прямоугольном треугольнике угол между высотой и биссектрисой, проведёнными из вершины прямого угла, равен $2°$. Найдите меньший угол данного треугольника. Ответ дайте в градусах.



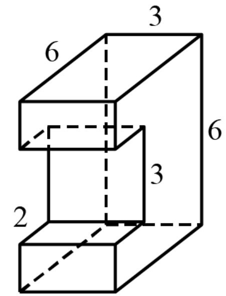
Ответ: ___________________________.

B9 На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Ответ: ___________________________.

B10 Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы прямые).



Ответ: ___________________________.

Часть 2

Ответом на задания B11–B15 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерения писать не нужно.

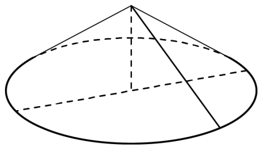
B11 Найдите значение выражения $\dfrac{-32\sin 96°}{\sin 264°}$.

Ответ: ___________________________.

B12 Зависимость температуры (в градусах Кельвина) от времени для нагревательного элемента некоторого прибора была получена экспериментально. На исследуемом интервале температура вычисляется по формуле $T(t) = T_0 + bt + at^2$, где t – время в минутах, $T_0 = 680$ К, $a = -16$ К/мин^2, $b = 224$ К/мин. Известно, что при температуре нагревателя 1400 К прибор нужно отключить во избежание поломки. Определите, через сколько минут после начала работы нужно отключить прибор.

Ответ: ___________________________.

B13 Высота конуса равна 3, а длина образующей равна 5. Найдите диаметр основания конуса.



Ответ: ______________________________.

B14 На изготовление 540 деталей первый рабочий затрачивает на 12 часов меньше, чем второй рабочий на изготовление 600 деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 10 деталей больше, чем второй. Сколько деталей в час делает первый рабочий?

Ответ: ______________________________.

B15 Найдите наименьшее значение функции $y=x^3-10x^2+25x+7$ на отрезке $[4;11]$.

Ответ: ______________________________.

Для записи решений и ответов на задания С1–С6 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (С1, С2 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1 а) Решите уравнение $16\cos^4 x-24\cos^2 x+9=0$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[2\pi;3\pi]$.

C2 Высота SO правильной треугольной пирамиды $SABC$ составляет $\frac{4}{5}$ от высоты SM боковой грани SAB. Найдите угол между плоскостью основания пирамиды и её боковым ребром.

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases}\log_{0,5}^2(-\log_3 x)-\log_{0,5}\log_3^2 x\le 3,\\ -8\left|x^2-1\right|-2\ge\dfrac{1}{x^2-1}.\end{cases}$$

C4 На гипотенузу AB прямоугольного треугольника ABC опустили высоту CH. Из точки H на катеты опустили перпендикуляры HK и HE.
а) Докажите, что точки A, $И$, K и E лежат на одной окружности.
б) Найдите радиус этой окружности, если $AB=24$, $CH=7$.

C5 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\left|(x+1)^2-2^{-a-1}\right|+|x+1|+(1+x)^2+2^{a+1}=0,25+4^a$ имеет единственное решение. Найдите это решение для каждого значения a.

C6 По кругу в некотором порядке по одному разу написаны числа от 10 до 21. Для каждой из двенадцати пар соседних чисел нашли их наибольший общий делитель.
а) Могло ли получиться так, что все наибольшие общие делители равны 1?
б) Могло ли получиться так, что все наибольшие общие делители попарно различны?
в) Какое наибольшее количество попарно различных наибольших общих делителей могло при этом получиться?

Часть 1

Ответом на задания В1–В10 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерения писать не нужно.

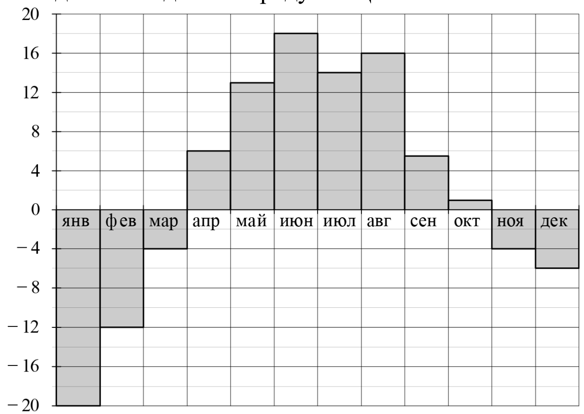
B1 В университетскую библиотеку привезли новые учебники по математическому анализу для трёх курсов по 430 штук для каждого курса. Все книги одинаковы по размеру. В книжном шкафу 6 полок, на каждой полке помещается 30 учебников. Сколько шкафов можно целиком заполнить новыми учебниками?

Ответ: ___________________________.

B2 В магазине «Сделай сам» мебель продаётся в разобранном виде. При желании покупатель может заказать сборку мебели на дому, стоимость которой составляет 15% от стоимости самой мебели. Во сколько рублей обойдётся кухонный шкаф вместе со сборкой, если без сборки он продаётся за 3000 руб.?

Ответ: ___________________________.

B3 На диаграмме показана средняя температура воздуха в Екатеринбурге (Свердловске) за каждый месяц 1973 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали – средняя температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме наибольшую среднюю температуру в Екатеринбурге во второй половине 1973 года. Ответ дайте в градусах Цельсия.



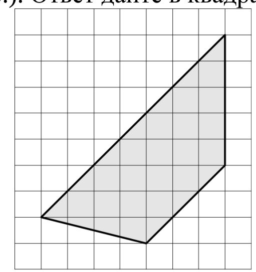
Ответ: ___________________________.

B4 Для группы иностранных гостей требуется купить путеводители в количестве 10 штук. Нужные путеводители нашлись в трёх интернет-магазинах. Условия покупки и доставки даны в таблице. Определите, в каком из магазинов общая сумма покупки с учётом доставки будет наименьшей. В ответе напишите наименьшую сумму в рублях.

Интернет-магазин	**Цена одного путеводителя (руб.)**	**Стоимость доставки (руб.)**	**Доп. условия**
А	275	200	Нет
Б	284	250	Доставка бесплатно, если сумма заказа превышает 2500 руб.
В	271	300	Доставка бесплатно, если сумма заказа превышает 3000 руб.

Ответ: ___________________________.

B5 Найдите площадь трапеции, изображённой на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Ответ: ___________________________.

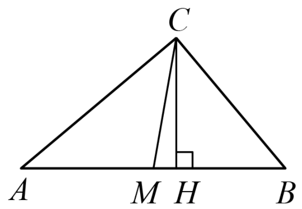
B6 Из множества натуральных чисел от 25 до 39 наудачу выбирают одно число. Какова вероятность того, что оно делится на 5?

Ответ: ___________________________.

B7 Найдите корень уравнения $\sqrt{23-2x}=3$.

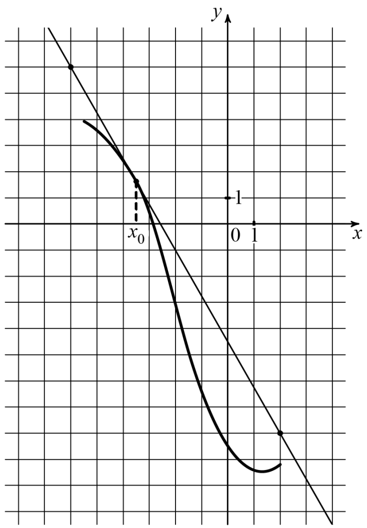
Ответ: ___________________________.

B8 Острые углы прямоугольного треугольника равны 50° и 40°. Найдите угол между высотой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.



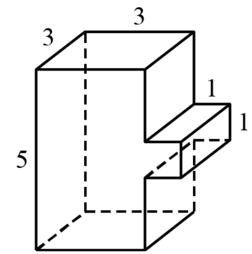
Ответ: ____________________________.

B9 На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Ответ: ____________________________.

B10 Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы прямые).



Ответ: ____________________________.

Часть 2

Ответом на задания B11–B15 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерения писать не нужно.

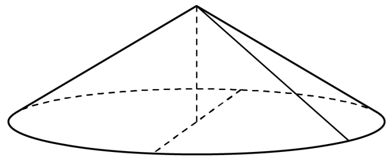
B11 Найдите значение выражения $\dfrac{-30\,\mathrm{tg}\,123^\circ}{\mathrm{tg}\,57^\circ}$.

Ответ: ____________________________.

B12 Сила тока в цепи I (в амперах) определяется напряжением в цепи и сопротивлением электроприбора по закону Ома: $I = \dfrac{U}{R}$, где U – напряжение в вольтах, R – сопротивление электроприбора в омах. В электросеть включён предохранитель, который плавится, если сила тока превышает 1,1 А. Определите, какое минимальное сопротивление должно быть у электроприбора, подключаемого к розетке в 220 вольт, чтобы сеть продолжала работать. Ответ выразите в омах.

Ответ: ____________________________.

B13 Диаметр основания конуса равен 24, а длина образующей равна 13 . Найдите высоту конуса.



Ответ: ____________________________.

B14 Смешали 3 литра 20-процентного водного раствора некоторого вещества с 12 литрами 30-процентного водного раствора этого же вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

Ответ: ____________________________.

B15 Найдите наименьшее значение функции $y=x^3-4x^2+4x+3$ на отрезке $[1{,}5;13]$.

Ответ: ____________________________.

Для записи решений и ответов на задания С1–С6 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (С1, С2 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1 а) Решите уравнение $4\cos^4 x-4\cos^2 x+1=0$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-2\pi;-\pi]$.

C2 Высота SO правильной треугольной пирамиды $SABC$ составляет $\frac{5}{7}$ от высоты SM боковой грани SAB. Найдите угол между плоскостью основания пирамиды и её боковым ребром.

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases}\log_2^2(-\log_2 x)+\log_2\log_2^2 x\le 3,\\ -4\left|x^2-1\right|-3\ge \dfrac{1}{x^2-1}.\end{cases}$$

C4 На гипотенузу AB прямоугольного треугольника ABC опустили высоту CH . Из точки H на катеты опустили перпендикуляры HK и HE .
а) Докажите, что точки A, B, K и E лежат на одной окружности.
б) Найдите радиус этой окружности, если $AB=12$, $CH=5$.

C5 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\left|(x-1)^2-2^{1-a}\right|+|x-1|+(1-x)^2+2^{a-1}=4+4^a$ имеет единственное решение. Найдите это решение для каждого значения a.

C6 По кругу в некотором порядке по одному разу написаны числа от 9 до 18. Для каждой из десяти пар соседних чисел нашли их наибольший общий делитель.
а) Могло ли получиться так, что все наибольшие общие делители равны 1?
б) Могло ли получиться так, что все наибольшие общие делители попарно различны?
в) Какое наибольшее количество попарно различных наибольших общих делителей могло при этом получиться?

Часть 1

Ответом на задания B1–B10 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерения писать не нужно.

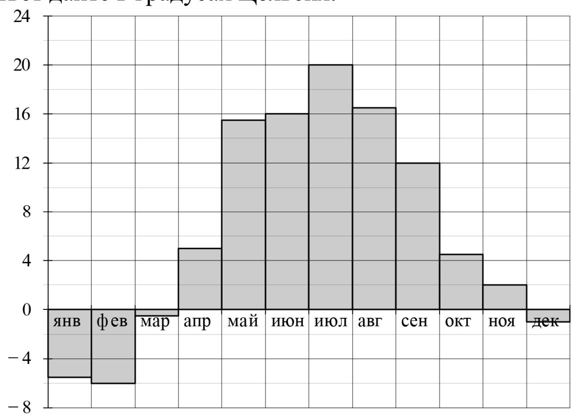
B1 В университетскую библиотеку привезли новые учебники по ветеринарии для четырёх курсов по 70 штук для каждого курса. Все книги одинаковы по размеру. В книжном шкафу 7 полок, на каждой полке помещается 25 учебников. Сколько шкафов можно целиком заполнить новыми учебниками?

Ответ: ____________________________.

B2 В магазине «Сделай сам» мебель продаётся в разобранном виде. При желании покупатель может заказать сборку мебели на дому, стоимость которой составляет 10% от стоимости самой мебели. Во сколько рублей обойдётся кухонный шкаф вместе со сборкой, если без сборки он продаётся за 3000 руб.?

Ответ: ____________________________.

B3 На диаграмме показана средняя температура воздуха в Минске за каждый месяц 2003 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали – средняя температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме наибольшую среднюю температуру в Минске в период с сентября по декабрь 2003 года. Ответ дайте в градусах Цельсия.



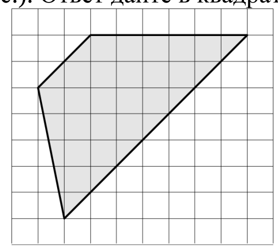
Ответ: ____________________________.

B4 Для группы иностранных гостей требуется купить путеводители в количестве 10 штук. Нужные путеводители нашлись в трёх интернет-магазинах. Условия покупки и доставки даны в таблице. Определите, в каком из магазинов общая сумма покупки с учётом доставки будет наименьшей. В ответе напишите наименьшую сумму в рублях.

Интернет-магазин	**Цена одного путеводителя (руб.)**	**Стоимость доставки (руб.)**	**Доп. условия**
А	297	250	Нет
Б	309	200	Доставка бесплатно, если сумма заказа превышает 2500 руб.
В	307	300	Доставка бесплатно, если сумма заказа превышает 3000 руб.

Ответ: ____________________________.

B5 Найдите площадь трапеции, изображённой на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Ответ: ____________________________.

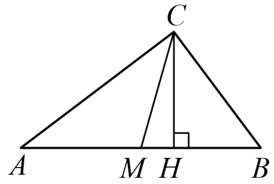
B6 Из множества натуральных чисел от 30 до 54 наудачу выбирают одно число. Какова вероятность того, что оно делится на 2?

Ответ: ____________________________.

B7 Найдите корень уравнения $\sqrt{13-2x}=5$.

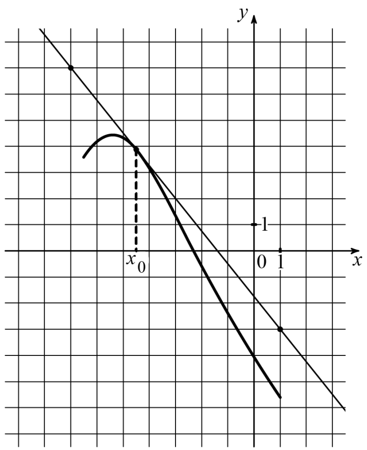
Ответ: ____________________________.

B8 Острые углы прямоугольного треугольника равны $53°$ и $37°$. Найдите угол между высотой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.



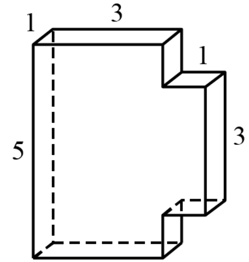
Ответ: ___________________________.

B9 На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Ответ: ___________________________.

B10 Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы прямые).



Ответ: ___________________________.

Часть 2

Ответом на задания B11–B15 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерения писать не нужно.

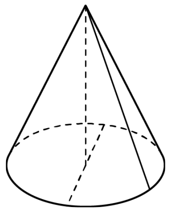
B11 Найдите значение выражения $\dfrac{29\,\mathrm{tg}\,87°}{\mathrm{tg}\,93°}$.

Ответ: ___________________________.

B12 Сила тока в цепи I (в амперах) определяется напряжением в цепи и сопротивлением электроприбора по закону Ома: $I = \dfrac{U}{R}$, где U – напряжение в вольтах, R – сопротивление электроприбора в омах. В электросеть включён предохранитель, который плавится, если сила тока превышает $2{,}2$ А. Определите, какое минимальное сопротивление должно быть у электроприбора, подключаемого к розетке в 220 вольт, чтобы сеть продолжала работать. Ответ выразите в омах.

Ответ: ___________________________.

B13 Диаметр основания конуса равен 10, а длина образующей равна 13. Найдите высоту конуса.



Ответ: ____________________________.

B14 Смешали 4 литра 30-процентного водного раствора некоторого вещества с 6 литрами 35-процентного водного раствора этого же вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

Ответ: ____________________________.

B15 Найдите наибольшее значение функции $y=x^3+2x^2+x+3$ на отрезке $[-13;-0{,}5]$.

Ответ: ____________________________.

Для записи решений и ответов на задания С1–С6 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (С1, С2 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1 а) Решите уравнение $16\cos^4 x-24\cos^2 x+9=0$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[2\pi;3\pi]$.

C2 Высота SO правильной треугольной пирамиды $SABC$ составляет $\frac{4}{5}$ от высоты SM боковой грани SAB. Найдите угол между плоскостью основания пирамиды и её боковым ребром.

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases}\log_{0,5}^2(-\log_3 x)-\log_{0,5}\log_3^2 x\le 3,\\ -8\left|x^2-1\right|-2\ge\dfrac{1}{x^2-1}.\end{cases}$$

C4 На гипотенузу AB прямоугольного треугольника ABC опустили высоту CH. Из точки H на катеты опустили перпендикуляры HK и HE.
а) Докажите, что точки A, $И$, K и E лежат на одной окружности.
б) Найдите радиус этой окружности, если $AB=24$, $CH=7$.

C5 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\left|(x+1)^2-2^{-a-1}\right|+|x+1|+(1+x)^2+2^{a+1}=0{,}25+4^a$ имеет единственное решение. Найдите это решение для каждого значения a.

C6 По кругу в некотором порядке по одному разу написаны числа от 10 до 21. Для каждой из двенадцати пар соседних чисел нашли их наибольший общий делитель.
а) Могло ли получиться так, что все наибольшие общие делители равны 1?
б) Могло ли получиться так, что все наибольшие общие делители попарно различны?
в) Какое наибольшее количество попарно различных наибольших общих делителей могло при этом получиться?

Часть 1

Ответом на задания B1–B10 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерения писать не нужно.

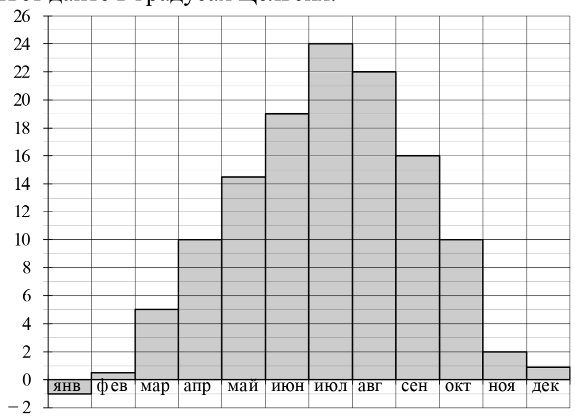
B1 В университетскую библиотеку привезли новые учебники по математическому анализу для трёх курсов по 480 штук для каждого курса. Все книги одинаковы по размеру. В книжном шкафу 9 полок, на каждой полке помещается 30 учебников. Сколько шкафов можно целиком заполнить новыми учебниками?

Ответ: ____________________________.

B2 В магазине «Сделай сам» мебель продаётся в разобранном виде. При желании покупатель может заказать сборку мебели на дому, стоимость которой составляет 15% от стоимости самой мебели. Во сколько рублей обойдётся кухонный шкаф вместе со сборкой, если без сборки он продаётся за 4200 руб.?

Ответ: ____________________________.

B3 На диаграмме показана средняя температура воздуха в Симферополе за каждый месяц 1988 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали – средняя температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме наибольшую среднюю температуру в Симферополе в период с августа по декабрь 1988 года. Ответ дайте в градусах Цельсия.



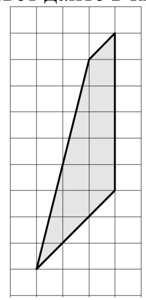
Ответ: ____________________________.

B4 Для группы иностранных гостей требуется купить путеводители в количестве 10 штук. Нужные путеводители нашлись в трёх интернет-магазинах. Условия покупки и доставки даны в таблице. Определите, в каком из магазинов общая сумма покупки с учётом доставки будет наименьшей. В ответе напишите наименьшую сумму в рублях.

Интернет-магазин	**Цена одного путеводителя (руб.)**	**Стоимость доставки (руб.)**	**Доп. условия**
А	373	200	Нет
Б	368	300	Доставка бесплатно, если сумма заказа превышает 4000 руб.
В	382	250	Доставка бесплатно, если сумма заказа превышает 3000 руб.

Ответ: ____________________________.

B5 Найдите площадь трапеции, изображённой на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Ответ: ____________________________.

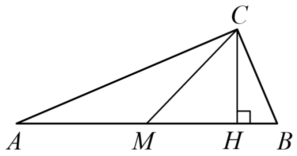
B6 Из множества натуральных чисел от 15 до 36 наудачу выбирают одно число. Какова вероятность того, что оно делится на 2?

Ответ: ____________________________.

B7 Найдите корень уравнения $\sqrt{7-x}=3$.

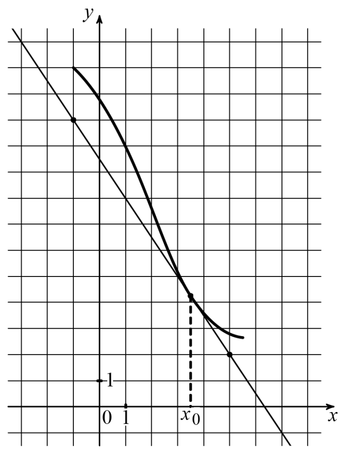
Ответ: ____________________________.

B8 Острые углы прямоугольного треугольника равны $67°$ и $23°$. Найдите угол между высотой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.



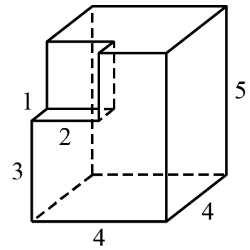
Ответ: ______________________________.

B9 На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Ответ: ______________________________.

B10 Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы прямые).



Ответ: ______________________________.

Часть 2

Ответом на задания B11–B15 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерения писать не нужно.

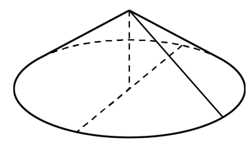
B11 Найдите значение выражения $\dfrac{35\,\mathrm{tg}\,127°}{\mathrm{tg}\,53°}$.

Ответ: ______________________________.

B12 Сила тока в цепи I (в амперах) определяется напряжением в цепи и сопротивлением электроприбора по закону Ома: $I = \dfrac{U}{R}$, где U – напряжение в вольтах, R – сопротивление электроприбора в омах. В электросеть включён предохранитель, который плавится, если сила тока превышает $13{,}75$ А. Определите, какое минимальное сопротивление должно быть у электроприбора, подключаемого к розетке в 220 вольт, чтобы сеть продолжала работать. Ответ выразите в омах.

Ответ: ______________________________.

B13 Диаметр основания конуса равен 8, а длина образующей равна 5. Найдите высоту конуса.



Ответ: ______________________________.

B14 Смешали 3 литра 35-процентного водного раствора некоторого вещества с 12 литрами 30-процентного водного раствора этого же вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

Ответ: ___________________________.

B15 Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 - 2x^2 + x + 3$ на отрезке $[0,5; 13]$.

Ответ: ___________________________.

Для записи решений и ответов на задания С1–С6 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (С1, С2 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1 а) Решите уравнение $4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1 = 0$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-2\pi; -\pi]$.

C2 Высота SO правильной треугольной пирамиды $SABC$ составляет $\frac{5}{7}$ от высоты SM боковой грани SAB. Найдите угол между плоскостью основания пирамиды и её боковым ребром.

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{0,5}^2(-\log_3 x) - \log_{0,5}\log_3^2 x \le 3, \\ -8|x^2-1| - 2 \ge \dfrac{1}{x^2-1}. \end{cases}$$

C4 На гипотенузу AB прямоугольного треугольника ABC опустили высоту CH. Из точки H на катеты опустили перпендикуляры HK и HE.
а) Докажите, что точки A, B, K и E лежат на одной окружности.
б) Найдите радиус этой окружности, если $AB = 12$, $CH = 5$.

C5 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\left|(x-1)^2 - 2^{1-a}\right| + |x-1| + (1-x)^2 + 2^{a-1} = 4 + 4^a$ имеет единственное решение. Найдите это решение для каждого значения a.

C6 По кругу в некотором порядке по одному разу написаны числа от 9 до 18. Для каждой из десяти пар соседних чисел нашли их наибольший общий делитель.
а) Могло ли получиться так, что все наибольшие общие делители равны 1?
б) Могло ли получиться так, что все наибольшие общие делители попарно различны?
в) Какое наибольшее количество попарно различных наибольших общих делителей могло при этом получиться?

Часть 1

Ответом на задания В1–В10 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерения писать не нужно.

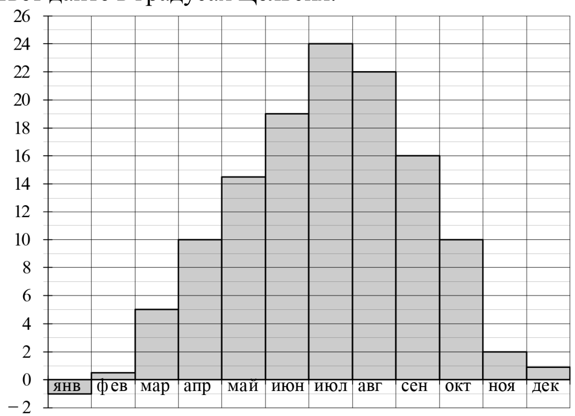
B1 В университетскую библиотеку привезли новые учебники по математическому анализу для трёх курсов по 430 штук для каждого курса. Все книги одинаковы по размеру. В книжном шкафу 6 полок, на каждой полке помещается 30 учебников. Сколько шкафов можно целиком заполнить новыми учебниками?

Ответ: ___________________________.

B2 В магазине «Сделай сам» мебель продаётся в разобранном виде. При желании покупатель может заказать сборку мебели на дому, стоимость которой составляет 10% от стоимости самой мебели. Во сколько рублей обойдётся кухонный шкаф вместе со сборкой, если без сборки он продаётся за 3000 руб.?

Ответ: ___________________________.

B3 На диаграмме показана средняя температура воздуха в Симферополе за каждый месяц 1988 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали – средняя температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме наибольшую среднюю температуру в Симферополе в период с августа по декабрь 1988 года. Ответ дайте в градусах Цельсия.



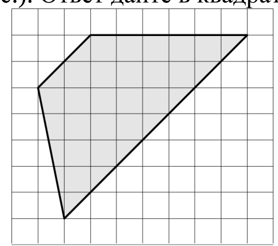
Ответ: ___________________________.

B4 Для группы иностранных гостей требуется купить путеводители в количестве 10 штук. Нужные путеводители нашлись в трёх интернет-магазинах. Условия покупки и доставки даны в таблице. Определите, в каком из магазинов общая сумма покупки с учётом доставки будет наименьшей. В ответе напишите наименьшую сумму в рублях.

Интернет-магазин	**Цена одного путеводителя (руб.)**	**Стоимость доставки (руб.)**	**Доп. условия**
А	275	200	Нет
Б	284	250	Доставка бесплатно, если сумма заказа превышает 2500 руб.
В	271	300	Доставка бесплатно, если сумма заказа превышает 3000 руб.

Ответ: ___________________________.

B5 Найдите площадь трапеции, изображённой на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Ответ: ___________________________.

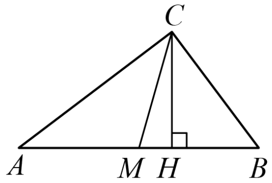
B6 Из множества натуральных чисел от 15 до 36 наудачу выбирают одно число. Какова вероятность того, что оно делится на 2?

Ответ: ___________________________.

B7 Найдите корень уравнения $\sqrt{23-2x}=3$.

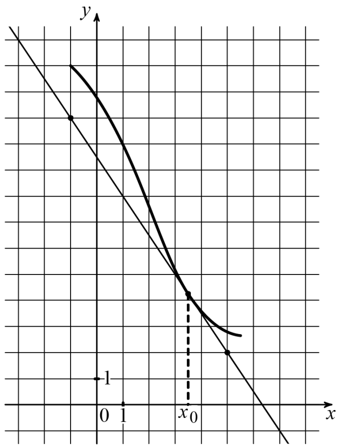
Ответ: ___________________________.

B8 Острые углы прямоугольного треугольника равны 53° и 37°. Найдите угол между высотой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.



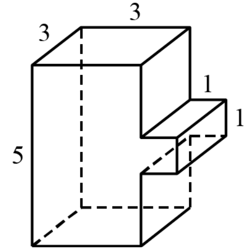
Ответ: ____________________________.

B9 На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Ответ: ____________________________.

B10 Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы прямые).



Ответ: ____________________________.

Часть 2

Ответом на задания B11–B15 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерения писать не нужно.

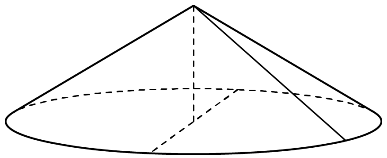
B11 Найдите значение выражения $\dfrac{29\,\mathrm{tg}\,87^\circ}{\mathrm{tg}\,93^\circ}$.

Ответ: ____________________________.

B12 Сила тока в цепи I (в амперах) определяется напряжением в цепи и сопротивлением электроприбора по закону Ома: $I = \dfrac{U}{R}$, где U – напряжение в вольтах, R – сопротивление электроприбора в омах. В электросеть включён предохранитель, который плавится, если сила тока превышает $13{,}75$ А. Определите, какое минимальное сопротивление должно быть у электроприбора, подключаемого к розетке в 220 вольт, чтобы сеть продолжала работать. Ответ выразите в омах.

Ответ: ____________________________.

B13 Диаметр основания конуса равен 24, а длина образующей равна 13 . Найдите высоту конуса.



Ответ: ____________________________.

B14 Смешали 4 литра 30-процентного водного раствора некоторого вещества с 6 литрами 35-процентного водного раствора этого же вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

Ответ: ____________________________.

B15 Найдите наибольшее значение функции $y = x^3 + 2x^2 + x + 3$ на отрезке $[-13; -0,5]$.

Ответ: ____________________________.

Для записи решений и ответов на задания C1–C6 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (C1, C2 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1 а) Решите уравнение $16\cos^4 x - 24\cos^2 x + 9 = 0$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[2\pi; 3\pi]$.

C2 Высота SO правильной треугольной пирамиды $SABC$ составляет $\frac{4}{5}$ от высоты SM боковой грани SAB. Найдите угол между плоскостью основания пирамиды и её боковым ребром.

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log^2_{0,5}(-\log_3 x) - \log_{0,5}\log^2_3 x \le 3, \\ -8\left|x^2-1\right| - 2 \ge \dfrac{1}{x^2-1}. \end{cases}$$

C4 На гипотенузу AB прямоугольного треугольника ABC опустили высоту CH . Из точки H на катеты опустили перпендикуляры HK и HE .
а) Докажите, что точки A, $И$, K и E лежат на одной окружности.
б) Найдите радиус этой окружности, если $AB = 24$, $CH = 7$.

C5 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\left|(x+1)^2 - 2^{-a-1}\right| + |x+1| + (1+x)^2 + 2^{a+1} = 0,25 + 4^a$ имеет единственное решение. Найдите это решение для каждого значения a.

C6 По кругу в некотором порядке по одному разу написаны числа от 10 до 21. Для каждой из двенадцати пар соседних чисел нашли их наибольший общий делитель.
а) Могло ли получиться так, что все наибольшие общие делители равны 1?
б) Могло ли получиться так, что все наибольшие общие делители попарно различны?
в) Какое наибольшее количество попарно различных наибольших общих делителей могло при этом получиться?

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 а) Решите уравнение $4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1 = 0$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-2\pi; -\pi]$.

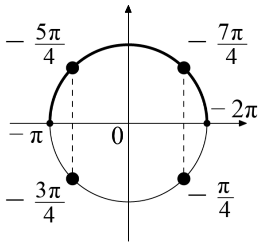
Решение.
а) Выделим полный квадрат:

$$\left(2\cos^2 x - 1\right)^2 = 0.$$

Преобразуем уравнение дальше:

$$2\cos^2 x = 1;\quad \cos^2 x = \frac{1}{2};\quad \cos x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}};\quad x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}.$$

б) При помощи тригонометрической окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $[-2\pi; -\pi]$. Получим $x = -\frac{7\pi}{4}$, $x = -\frac{5\pi}{4}$.



Ответ: а) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{7\pi}{4}$; $-\frac{5\pi}{4}$.

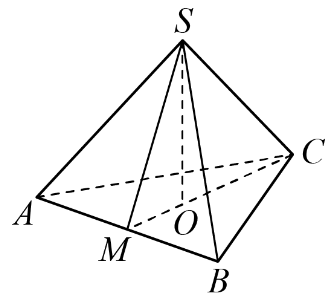
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

C2 Высота SO правильной треугольной пирамиды $SABC$ составляет $\frac{5}{7}$ от высоты SM боковой грани SAB. Найдите угол между плоскостью основания пирамиды и её боковым ребром.

Решение.
Пусть $SO = 5x$ и $SM = 7x$. Тогда $OM = x\sqrt{49-25} = x\sqrt{24} = 2x\sqrt{6}$, а $OC = 2\cdot OM = 4x\sqrt{6}$. Из треугольника COS находим

$$\operatorname{tg}\angle SCO = \frac{OS}{OC} = \frac{5x}{4x\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{6}}{24}.$$

Тогда искомый угол равен $\operatorname{arctg}\frac{5\sqrt{6}}{24}$.



Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{5\sqrt{6}}{24}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено. ИЛИ При правильном ответе решение недостаточно обосновано.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases}\log_2^2(-\log_2 x) + \log_2\log_2^2 x \le 3,\\ -4\left|x^2-1\right| - 3 \ge \dfrac{1}{x^2-1}.\end{cases}$$

Решение.

Решим первое неравенство. Из условия следует, что $-\log_2 x > 0$ и поэтому $\log_2\log_2^2 x = 2\log_2(-\log_2 x)$. Пусть $\log_2(-\log_2 x) = z$. Решим неравенство:

$$z^2 + 2z \le 3;\quad (z-1)(z+3) \le 0;\quad -3 \le z \le 1.$$

Обратная замена:

$$-3 \le \log_2(-\log_2 x) \le 1;\quad \frac{1}{8} \le -\log_2 x \le 2;\quad -2 \le \log_2 x \le -\frac{1}{8};\quad \frac{1}{4} \le x \le \frac{1}{\sqrt[8]{2}}.$$

Решим второе неравенство. Учитывая, что $0 < x < 1$, и, значит $x^2 - 1 < 0$, получаем:

$$4(x^2-1) - 3 \ge \frac{1}{x^2-1};\quad 4(x^2-1)^2 - 3(x^2-1) \le 1.$$

Сделаем замену $y = x^2 - 1$ и получим $4y^2 - 3y - 1 \le 0$, откуда, учитывая, что $y < 0$, находим:

$$-\frac{1}{4} \le y < 0;\quad \frac{3}{4} \le x^2 < 1;\quad \frac{\sqrt{3}}{2} \le x < 1.$$

Чтобы найти решение системы, нужно сравнить границы полученных промежутков: $\frac{3^4}{2^8} = \frac{81}{256} < \frac{1}{2}$, поэтому $\frac{\sqrt{3}}{2} < \frac{1}{\sqrt[8]{2}}$. Очевидно, $\frac{1}{4} < \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\frac{1}{\sqrt[8]{2}} < 1$.

Решение системы: $\frac{\sqrt{3}}{2} \le x \le \frac{1}{\sqrt[8]{2}}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2} \le x \le \frac{1}{\sqrt[8]{2}}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах.	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве исходной системы. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	3

C4 На гипотенузу AB прямоугольного треугольника ABC опустили высоту CH. Из точки H на катеты опустили перпендикуляры HK и HE.

а) Докажите, что точки A, B, K и E лежат на одной окружности.

б) Найдите радиус этой окружности, если $AB = 12$, $CH = 5$.

Решение.

а) Предположим для определённости, что точка E лежит на катете BC, а точка K – на катете AC. Проведём отрезок KE и заметим, что он является гипотенузой прямоугольного треугольника KCE, подобного треугольнику BCA.

Рассмотрим углы четырёхугольника $ABEK$. Если $\angle ABE = \alpha$, то

$$\angle BEK = \angle BEH + \angle HEK = 90^\circ + \alpha, \text{ а } \angle KAB = 90^\circ - \alpha.$$

Значит, $\angle BEK + \angle KAB = 90^\circ + \alpha + 90^\circ - \alpha = 180^\circ$. Сумма двух противоположных углов в четырёхугольнике 180°, следовательно, четырёхугольник вписан в окружность.

б) Радиус окружности, проходящей через точки A, B и E, равен

$$\frac{AB}{2\sin\angle BEA} = \frac{AB}{2\sin\angle AEC}.$$

Из подобия треугольников находим

$$\frac{CE}{CH} = \frac{AC}{AB}, \text{ откуда } CE = \frac{CH \cdot AC}{AB}.$$

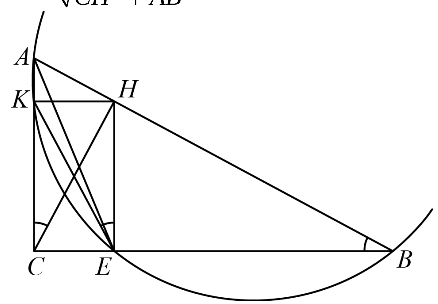
Тогда

$$AE = \sqrt{CE^2 + AC^2} = AC \cdot \sqrt{\frac{CH^2 + AB^2}{AB^2}} = \frac{AC}{AB}\sqrt{CH^2 + AB^2}$$

Поэтому $\sin\angle AEC = \frac{AC}{AE} = \frac{AB}{\sqrt{CH^2 + AB^2}}$.

Следовательно, искомый радиус равен

$$AB : \frac{2AB}{\sqrt{CH^2 + AB^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{CH^2 + AB^2} = \frac{13}{2}.$$



Ответ: $\frac{13}{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*.	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки.	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	3

C5 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\left|(x-1)^2-2^{1-a}\right|+|x-1|+(1-x)^2+2^{a-1}=4+4^a$ имеет единственное решение. Найдите это решение для каждого значения a.

Решение.

Пусть число x – решение данного уравнения при некотором значении параметра a. Тогда число $(2-x)$ есть его решение при том же значении a. Если решение единственно, то решения $(2-x)$ и x совпадают, то есть $(2-x)=x$; $x=1$. Подставив это решение в исходное уравнение, получим

$$2^{1-a}+2^{a-1}=4+4^a;\ \frac{2}{2^a}+\frac{2^a}{2}=4+4^a;\ \frac{1}{2^{a+1}}=1,\ \text{откуда } a=-1.$$

Пусть $a=-1$. Тогда исходное уравнение примет вид

$$\left|(x-1)^2-4\right|+|x-1|=4-(1-x)^2.$$

Отсюда следует, что $4-(1-x)^2\geq 0$, следовательно, $\left|(x-1)^2-4\right|=4-(1-x)^2$.

Исходное уравнение принимает вид $|x-1|=0$, и оно имеет единственное решение $x=1$, удовлетворяющее условию $4-(1-x)^2\geq 0$. Следовательно, $a=-1$ удовлетворяет условию задачи.

Ответ: при $a=-1$ единственное решение $x=1$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
С помощью верного рассуждения найдено значение a. Доказано отсутствие других возможных значений a. Получено неверное значение x из-за вычислительной ошибки.	3
С помощью верного рассуждения найдено значение a и получено соответствующее значение x. Не обосновано отсутствие других решений.	2
Верно найдено значение a; возможно, имеются посторонние решения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

C6 По кругу в некотором порядке по одному разу написаны числа от 9 до 18. Для каждой из десяти пар соседних чисел нашли их наибольший общий делитель.

а) Могло ли получиться так, что все наибольшие общие делители равны 1?

б) Могло ли получиться так, что все наибольшие общие делители попарно различны?

в) Какое наибольшее количество попарно различных наибольших общих делителей могло при этом получиться?

Решение.

а) Да, могло. Например, если числа записаны в порядке 9, 16, 15, 14, 13, 12, 11, 18, 17, 10.

б) Всего по кругу записано 10 чисел. Для каждой пары соседних чисел мы ищем наибольший общий делитель, следовательно, получим 10 наибольших общих делителей. Если они все попарно различны, то хотя бы один из них не меньше 10. Но такого быть не может, так как для данных чисел наибольший из всевозможных наибольших общих делителей есть НОД(18,9) = 9.

в) Числа 11, 13 и 17 являются простыми, наибольшие общие делители этих чисел со всеми остальными числами равняются 1. Каждое из чисел имеет двух соседей, следовательно, хотя бы два числа из этих трёх будут иметь по крайней мере одного соседа, отличного от этих трёх чисел. Таким образом, хотя бы четыре из всех наибольших общих делителей будут равняться 1, то есть совпадать. Следовательно, не может быть больше, чем семь попарно различных наибольших общих делителей, поскольку всего их десять, причём четыре совпадают. Для расстановки 9, 18, 12, 16, 14, 13, 11, 17, 10, 15 получается ровно 7 попарно различных наибольших общих делителей.

Ответ: а) Да; б) нет; в) семь.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*.	4
Получены верные обоснованные ответы в двух пунктах из трёх.	3
Получен верный обоснованный ответ в пункте *б* или в пункте *в*.	2
Приведён пример в пункте *а*, пункты *б* и *в* не решены.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 а) Решите уравнение $16\cos^4 x - 24\cos^2 x + 9 = 0$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[2\pi; 3\pi]$.

Решение.
а) Выделим полный квадрат:

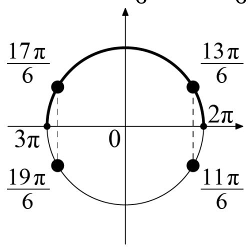
$$\left(4\cos^2 x - 3\right)^2 = 0.$$

Преобразуем уравнение дальше:

$$4\cos^2 x = 3;\quad \cos^2 x = \frac{3}{4};$$

$$\cos x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2};\quad x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

б) При помощи тригонометрической окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $[2\pi; 3\pi]$. Получим $x = \frac{13\pi}{6}$, $x = \frac{17\pi}{6}$.



Ответ: а) $\pm\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{13\pi}{6}$; $\frac{17\pi}{6}$.

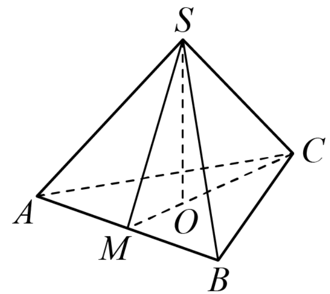
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

C2 Высота SO правильной треугольной пирамиды $SABC$ составляет $\frac{4}{5}$ от высоты SM боковой грани SAB. Найдите угол между плоскостью основания пирамиды и её боковым ребром.

Решение.
Пусть $SO = 4x$ и $SM = 5x$. Тогда $OM = x\sqrt{25-16} = 3x$, а $OC = 2\cdot OM = 6x$. Из треугольника COS находим

$$\operatorname{tg}\angle SCO = \frac{OS}{OC} = \frac{4x}{6x} = \frac{2}{3}.$$

Тогда искомый угол равен $\operatorname{arctg}\frac{2}{3}$.



Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{2}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено. ИЛИ При правильном ответе решение недостаточно обосновано.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{0,5}^2\left(-\log_3 x\right) - \log_{0,5}\log_3^2 x \le 3, \\ -8\left|x^2-1\right| - 2 \ge \dfrac{1}{x^2-1}. \end{cases}$$

Решение.

Решим первое неравенство. Из условия следует, что $-\log_3 x > 0$ и поэтому $\log_{0,5}\log_3^2 x = -2\log_2\left(-\log_3 x\right)$. Пусть $\log_2(-\log_3 x) = z$. Решим неравенство:

$$z^2 + 2z \le 3;\quad (z-1)(z+3) \le 0;\quad -3 \le z \le 1.$$

Обратная замена:

$$-3 \le \log_2\left(-\log_3 x\right) \le 1;\quad \frac{1}{8} \le -\log_3 x \le 2;\quad -2 \le \log_3 x \le -\frac{1}{8};\quad \frac{1}{9} \le x \le \frac{1}{\sqrt[8]{3}}.$$

Решим второе неравенство. Учитывая, что $0 < x < 1$, и, значит $x^2 - 1 < 0$, получаем:

$$8\left(x^2-1\right) - 2 \ge \frac{1}{x^2-1};\quad 8\left(x^2-1\right)^2 - 2\left(x^2-1\right) \le 1.$$

Сделаем замену $y = x^2 - 1$ и получим: $8y^2 - 2y - 1 \le 0$, откуда, учитывая, что $y < 0$, находим: $-\frac{1}{4} \le y < 0$; $\frac{3}{4} \le x^2 < 1$; $\frac{\sqrt{3}}{2} \le x < 1$.

Чтобы найти решение системы, нужно сравнить границы полученных промежутков: $\frac{3^4}{2^8} = \frac{81}{256} < \frac{1}{3}$, поэтому $\frac{\sqrt{3}}{2} < \frac{1}{\sqrt[8]{3}}$. Очевидно, $\frac{1}{9} < \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\frac{1}{\sqrt[8]{3}} < 1$.

Решение системы: $\frac{\sqrt{3}}{2} \le x \le \frac{1}{\sqrt[8]{3}}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2} \le x \le \frac{1}{\sqrt[8]{3}}$.

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ.	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах.	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве исходной системы. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	3

C4 На гипотенузу AB прямоугольного треугольника ABC опустили высоту CH. Из точки H на катеты опустили перпендикуляры HK и HE.

а) Докажите, что точки A, B, K и E лежат на одной окружности.

б) Найдите радиус этой окружности, если $AB = 24$, $CH = 7$.

Решение.

а) Предположим для определённости, что точка E лежит на катете BC, а точка K – на катете AC. Проведём отрезок KE и заметим, что он является гипотенузой прямоугольного треугольника KCE, подобного треугольнику BCA.

Рассмотрим углы четырёхугольника $ABEK$. Если $\angle ABE = \alpha$, то

$$\angle BEK = \angle BEH + \angle HEK = 90^\circ + \alpha, \text{ а } \angle KAB = 90^\circ - \alpha.$$

Значит, $\angle BEK + \angle KAB = 90^\circ + \alpha + 90^\circ - \alpha = 180^\circ$. Сумма двух противоположных углов в четырёхугольнике 180°, следовательно, четырёхугольник вписан в окружность.

б) Радиус окружности, проходящей через точки A, B и E, равен

$$\frac{AB}{2\sin\angle BEA} = \frac{AB}{2\sin\angle AEC}.$$

Из подобия треугольников находим

$$\frac{CE}{CH} = \frac{AC}{AB}, \text{ откуда } CE = \frac{CH \cdot AC}{AB}.$$

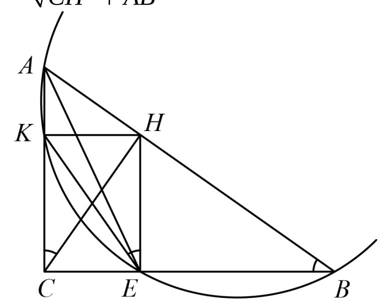
Тогда

$$AE = \sqrt{CE^2 + AC^2} = AC \cdot \sqrt{\frac{CH^2 + AB^2}{AB^2}} = \frac{AC}{AB}\sqrt{CH^2 + AB^2}$$

Поэтому $\sin\angle AEC = \frac{AC}{AE} = \frac{AB}{\sqrt{CH^2 + AB^2}}$.

Следовательно, искомый радиус равен

$$AB : \frac{2AB}{\sqrt{CH^2 + AB^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{CH^2 + AB^2} = \frac{17}{2}.$$



Ответ: $\frac{17}{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*.	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки.	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	3

C5 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\left|(x+1)^2-2^{-a-1}\right|+|x+1|+(1+x)^2+2^{a+1}=0,25+4^a$ имеет единственное решение. Найдите это решение для каждого значения a.

Решение.

Пусть число x – решение данного уравнения при некотором значении параметра a. Тогда число $(-2-x)$ есть его решение при том же значении a. Если решение единственно, то решения $(-2-x)$ и x совпадают, то есть $(-2-x)=x$; $x=-1$. Подставив это решение в исходное уравнение, получим:

$$2^{-a-1}+2^{a+1}=0,25+4^a;\ \frac{1}{2^{a+1}}+2^{a+1}=0,25+4^a;\ \frac{1}{2^{a+1}}=\frac{1}{4},\text{ откуда } a=1.$$

Пусть $a=1$. Тогда исходное уравнение примет вид

$$\left|(x+1)^2-0,25\right|+|x+1|=0,25-(1+x)^2.$$

Отсюда следует, что $0,25-(1+x)^2\ge 0$, следовательно,

$$\left|(x+1)^2-0,25\right|=0,25-(1+x)^2.$$

Исходное уравнение принимает вид $|x+1|=0$, и оно имеет единственное решение $x=-1$, удовлетворяющее условию $0,25-(1+x)^2\ge 0$.

Следовательно, $a=1$ удовлетворяет условию задачи.

Ответ: при $a=1$ единственное решение $x=-1$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
С помощью верного рассуждения найдено значение a. Доказано отсутствие других возможных значений a. Получено неверное значение x из-за вычислительной ошибки.	3
С помощью верного рассуждения найдено значение a и получено соответствующее значение x. Не обосновано отсутствие других решений.	2
Верно найдено значение a; возможно, имеются посторонние решения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

C6 По кругу в некотором порядке по одному разу написаны числа от 10 до 21. Для каждой из двенадцати пар соседних чисел нашли их наибольший общий делитель.

а) Могло ли получиться так, что все наибольшие общие делители равны 1?

б) Могло ли получиться так, что все наибольшие общие делители попарно различны?

в) Какое наибольшее количество попарно различных наибольших общих делителей могло при этом получиться?

Решение.

а) Да, могло. Например, если числа записаны в порядке 10, 21, 20, 19, 16, 15, 14, 11, 18, 13, 12, 17.

б) Всего по кругу записано 12 чисел. Для каждой пары соседних чисел мы ищем наибольший общий делитель, следовательно, получим 12 наибольших общих делителей. Если они все попарно различны, то хотя бы один из них не меньше 12. Но такого быть не может, так как для данных чисел наибольший из всевозможных наибольших общих делителей есть НОД(10,20) = 10.

в) Числа 11, 13, 17 и 19 являются простыми, наибольшие общие делители этих чисел со всеми остальными числами равняются 1. Каждое из чисел имеет двух соседей, следовательно, хотя бы два числа из этих четырёх будут иметь по крайней мере одного соседа, отличного от этих четырёх чисел. Таким образом, хотя бы пять из всех наибольших общих делителей будут равняться 1, то есть совпадать. Следовательно, не может быть больше чем восемь попарно различных наибольших общих делителей, поскольку всего их двенадцать, причём пять совпадают. Для расстановки 10, 20, 19, 17, 13, 11, 18, 12, 16, 14, 21, 15 получается ровно 8 попарно различных наибольших общих делителей.

Ответ: а) Да; б) нет; в) восемь.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*.	4
Получены верные обоснованные ответы в двух пунктах из трёх.	3
Получен верный обоснованный ответ в пункте *б* или в пункте *в*.	2
Приведён пример в пункте *а*, пункты *б* и *в* не решены.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 а) Решите уравнение $4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1 = 0$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-2\pi; -\pi]$.

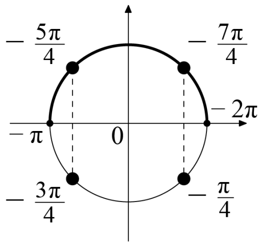
<u>*Решение*</u>.
а) Выделим полный квадрат:

$$\left(2\cos^2 x - 1\right)^2 = 0.$$

Преобразуем уравнение дальше:

$$2\cos^2 x = 1;\ \cos^2 x = \frac{1}{2};\ \cos x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}};\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}.$$

б) При помощи тригонометрической окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $[-2\pi; -\pi]$. Получим $x = -\frac{7\pi}{4}$, $x = -\frac{5\pi}{4}$.



Ответ: а) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{7\pi}{4}$; $-\frac{5\pi}{4}$.

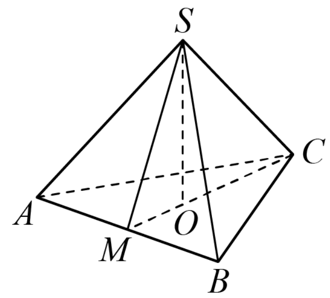
Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

C2 Высота SO правильной треугольной пирамиды $SABC$ составляет $\frac{5}{7}$ от высоты SM боковой грани SAB. Найдите угол между плоскостью основания пирамиды и её боковым ребром.

<u>*Решение*</u>.
Пусть $SO = 5x$ и $SM = 7x$. Тогда $OM = x\sqrt{49-25} = x\sqrt{24} = 2x\sqrt{6}$, а $OC = 2 \cdot OM = 4x\sqrt{6}$. Из треугольника COS находим

$$\operatorname{tg}\angle SCO = \frac{OS}{OC} = \frac{5x}{4x\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{6}}{24}.$$

Тогда искомый угол равен $\operatorname{arctg}\frac{5\sqrt{6}}{24}$.



Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{5\sqrt{6}}{24}$.

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ.	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено. ИЛИ При правильном ответе решение недостаточно обосновано.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{2}^{2}\left(-\log_2 x\right) + \log_2 \log_2^2 x \le 3, \\ -4\left|x^2 - 1\right| - 3 \ge \dfrac{1}{x^2 - 1}. \end{cases}$$

Решение.

Решим первое неравенство. Из условия следует, что $-\log_2 x>0$ и поэтому $\log_2\log_2^2 x=2\log_2(-\log_2 x)$. Пусть $\log_2(-\log_2 x)=z$. Решим неравенство:

$$z^2+2z\le 3;\quad (z-1)(z+3)\le 0;\quad -3\le z\le 1.$$

Обратная замена:

$$-3\le\log_2(-\log_2 x)\le 1;\quad \frac{1}{8}\le -\log_2 x\le 2;\quad -2\le\log_2 x\le -\frac{1}{8};\quad \frac{1}{4}\le x\le\frac{1}{\sqrt[8]{2}}.$$

Решим второе неравенство. Учитывая, что $0<x<1$, и, значит $x^2-1<0$, получаем:

$$4(x^2-1)-3\ge\frac{1}{x^2-1};\quad 4(x^2-1)^2-3(x^2-1)\le 1.$$

Сделаем замену $y=x^2-1$ и получим $4y^2-3y-1\le 0$, откуда, учитывая, что $y<0$, находим:

$$-\frac{1}{4}\le y<0;\quad \frac{3}{4}\le x^2<1;\quad \frac{\sqrt{3}}{2}\le x<1.$$

Чтобы найти решение системы, нужно сравнить границы полученных промежутков: $\frac{3^4}{2^8}=\frac{81}{256}<\frac{1}{2}$, поэтому $\frac{\sqrt{3}}{2}<\frac{1}{\sqrt[8]{2}}$. Очевидно, $\frac{1}{4}<\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\frac{1}{\sqrt[8]{2}}<1$.

Решение системы: $\frac{\sqrt{3}}{2}\le x\le\frac{1}{\sqrt[8]{2}}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}\le x\le\frac{1}{\sqrt[8]{2}}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах.	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве исходной системы. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	3

C4 На гипотенузу AB прямоугольного треугольника ABC опустили высоту CH. Из точки H на катеты опустили перпендикуляры HK и HE.

а) Докажите, что точки A, B, K и E лежат на одной окружности.

б) Найдите радиус этой окружности, если $AB=12$, $CH=5$.

Решение.

а) Предположим для определённости, что точка E лежит на катете BC, а точка K – на катете AC. Проведём отрезок KE и заметим, что он является гипотенузой прямоугольного треугольника KCE, подобного треугольнику BCA.

Рассмотрим углы четырёхугольника $ABEK$. Если $\angle ABE=\alpha$, то

$$\angle BEK=\angle BEH+\angle HEK=90^\circ+\alpha,\text{ а }\angle KAB=90^\circ-\alpha.$$

Значит, $\angle BEK+\angle KAB=90^\circ+\alpha+90^\circ-\alpha=180^\circ$. Сумма двух противоположных углов в четырёхугольнике 180°, следовательно, четырёхугольник вписан в окружность.

б) Радиус окружности, проходящей через точки A, B и E, равен

$$\frac{AB}{2\sin\angle BEA}=\frac{AB}{2\sin\angle AEC}.$$

Из подобия треугольников находим

$$\frac{CE}{CH}=\frac{AC}{AB},\text{ откуда } CE=\frac{CH\cdot AC}{AB}.$$

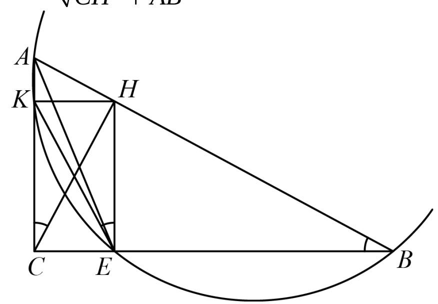
Тогда

$$AE=\sqrt{CE^2+AC^2}=AC\cdot\sqrt{\frac{CH^2+AB^2}{AB^2}}=\frac{AC}{AB}\sqrt{CH^2+AB^2}$$

Поэтому $\sin\angle AEC=\frac{AC}{AE}=\frac{AB}{\sqrt{CH^2+AB^2}}$.

Следовательно, искомый радиус равен

$$AB:\frac{2AB}{\sqrt{CH^2+AB^2}}=\frac{1}{2}\sqrt{CH^2+AB^2}=\frac{13}{2}.$$



Ответ: $\frac{13}{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*.	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки.	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	3

С5 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\left|(x-1)^2-2^{1-a}\right|+|x-1|+(1-x)^2+2^{a-1}=4+4^a$ имеет единственное решение. Найдите это решение для каждого значения a.

Решение.
Пусть число x – решение данного уравнения при некотором значении параметра a. Тогда число $(2-x)$ есть его решение при том же значении a. Если решение единственно, то решения $(2-x)$ и x совпадают, то есть $(2-x)=x$; $x=1$. Подставив это решение в исходное уравнение, получим

$$2^{1-a}+2^{a-1}=4+4^a;\ \frac{2}{2^a}+\frac{2^a}{2}=4+4^a;\ \frac{1}{2^{a+1}}=1,\ \text{откуда } a=-1.$$

Пусть $a=-1$. Тогда исходное уравнение примет вид

$$\left|(x-1)^2-4\right|+|x-1|=4-(1-x)^2.$$

Отсюда следует, что $4-(1-x)^2\ge 0$, следовательно, $\left|(x-1)^2-4\right|=4-(1-x)^2$.

Исходное уравнение принимает вид $|x-1|=0$, и оно имеет единственное решение $x=1$, удовлетворяющее условию $4-(1-x)^2\ge 0$. Следовательно, $a=-1$ удовлетворяет условию задачи.
Ответ: при $a=-1$ единственное решение $x=1$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
С помощью верного рассуждения найдено значение a. Доказано отсутствие других возможных значений a. Получено неверное значение x из-за вычислительной ошибки.	3
С помощью верного рассуждения найдено значение a и получено соответствующее значение x. Не обосновано отсутствие других решений.	2
Верно найдено значение a; возможно, имеются посторонние решения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

С6 По кругу в некотором порядке по одному разу написаны числа от 9 до 18. Для каждой из десяти пар соседних чисел нашли их наибольший общий делитель.
а) Могло ли получиться так, что все наибольшие общие делители равны 1?
б) Могло ли получиться так, что все наибольшие общие делители попарно различны?
в) Какое наибольшее количество попарно различных наибольших общих делителей могло при этом получиться?

Решение.
а) Да, могло. Например, если числа записаны в порядке 9, 16, 15, 14, 13, 12, 11, 18, 17, 10.
б) Всего по кругу записано 10 чисел. Для каждой пары соседних чисел мы ищем наибольший общий делитель, следовательно, получим 10 наибольших общих делителей. Если они все попарно различны, то хотя бы один из них не меньше 10. Но такого быть не может, так как для данных чисел наибольший из всевозможных наибольших общих делителей есть НОД(18,9) = 9.
в) Числа 11, 13 и 17 являются простыми, наибольшие общие делители этих чисел со всеми остальными числами равняются 1. Каждое из чисел имеет двух соседей, следовательно, хотя бы два числа из этих трёх будут иметь по крайней мере одного соседа, отличного от этих трёх чисел. Таким образом, хотя бы четыре из всех наибольших общих делителей будут равняться 1, то есть совпадать. Следовательно, не может быть больше, чем семь попарно различных наибольших общих делителей, поскольку всего их десять, причём четыре совпадают. Для расстановки 9, 18, 12, 16, 14, 13, 11, 17, 10, 15 получается ровно 7 попарно различных наибольших общих делителей.
Ответ: а) Да; б) нет; в) семь.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*.	4
Получены верные обоснованные ответы в двух пунктах из трёх.	3
Получен верный обоснованный ответ в пункте *б* или в пункте *в*.	2
Приведён пример в пункте *а*, пункты *б* и *в* не решены.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 а) Решите уравнение $16\cos^4 x-24\cos^2 x+9=0$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[2\pi; 3\pi]$.

Решение.
а) Выделим полный квадрат:

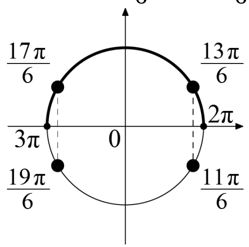
$$\left(4\cos^2 x-3\right)^2=0.$$

Преобразуем уравнение дальше:

$$4\cos^2 x=3;\quad \cos^2 x=\frac{3}{4};$$

$$\cos x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2};\quad x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$$

б) При помощи тригонометрической окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $[2\pi; 3\pi]$. Получим $x=\frac{13\pi}{6}$, $x=\frac{17\pi}{6}$.



Ответ: а) $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{13\pi}{6}$; $\frac{17\pi}{6}$.

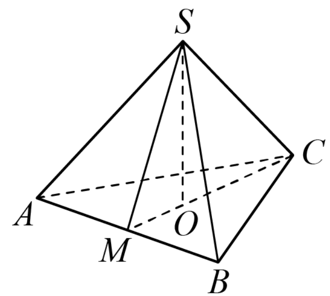
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

C2 Высота SO правильной треугольной пирамиды $SABC$ составляет $\frac{4}{5}$ от высоты SM боковой грани SAB. Найдите угол между плоскостью основания пирамиды и её боковым ребром.

Решение.
Пусть $SO=4x$ и $SM=5x$. Тогда $OM=x\sqrt{25-16}=3x$, а $OC=2\cdot OM=6x$.
Из треугольника COS находим

$$\operatorname{tg}\angle SCO=\frac{OS}{OC}=\frac{4x}{6x}=\frac{2}{3}.$$

Тогда искомый угол равен $\operatorname{arctg}\frac{2}{3}$.



Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{2}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено. ИЛИ При правильном ответе решение недостаточно обосновано.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases}\log_{0,5}^2\left(-\log_3 x\right)-\log_{0,5}\log_3^2 x\le 3,\\ -8\left|x^2-1\right|-2\ge\dfrac{1}{x^2-1}.\end{cases}$$

Решение.

Решим первое неравенство. Из условия следует, что $-\log_3 x > 0$ и поэтому $\log_{0,5}\log_3^2 x = -2\log_2(-\log_3 x)$. Пусть $\log_2(-\log_3 x) = z$. Решим неравенство:

$$z^2 + 2z \le 3;\quad (z-1)(z+3) \le 0;\quad -3 \le z \le 1.$$

Обратная замена:

$$-3 \le \log_2(-\log_3 x) \le 1;\quad \frac{1}{8} \le -\log_3 x \le 2;\quad -2 \le \log_3 x \le -\frac{1}{8};\quad \frac{1}{9} \le x \le \frac{1}{\sqrt[8]{3}}.$$

Решим второе неравенство. Учитывая, что $0 < x < 1$, и, значит $x^2 - 1 < 0$, получаем:

$$8(x^2-1) - 2 \ge \frac{1}{x^2-1};\quad 8(x^2-1)^2 - 2(x^2-1) \le 1.$$

Сделаем замену $y = x^2 - 1$ и получим: $8y^2 - 2y - 1 \le 0$, откуда, учитывая, что $y < 0$, находим: $-\frac{1}{4} \le y < 0$; $\frac{3}{4} \le x^2 < 1$; $\frac{\sqrt{3}}{2} \le x < 1$.

Чтобы найти решение системы, нужно сравнить границы полученных промежутков: $\frac{3^4}{2^8} = \frac{81}{256} < \frac{1}{3}$, поэтому $\frac{\sqrt{3}}{2} < \frac{1}{\sqrt[8]{3}}$. Очевидно, $\frac{1}{9} < \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\frac{1}{\sqrt[8]{3}} < 1$.

Решение системы: $\frac{\sqrt{3}}{2} \le x \le \frac{1}{\sqrt[8]{3}}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2} \le x \le \frac{1}{\sqrt[8]{3}}$.

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ.	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах.	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве исходной системы. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	3

C4 На гипотенузу AB прямоугольного треугольника ABC опустили высоту CH. Из точки H на катеты опустили перпендикуляры HK и HE.

а) Докажите, что точки A, B, K и E лежат на одной окружности.

б) Найдите радиус этой окружности, если $AB = 24$, $CH = 7$.

Решение.

а) Предположим для определённости, что точка E лежит на катете BC, а точка K – на катете AC. Проведём отрезок KE и заметим, что он является гипотенузой прямоугольного треугольника KCE, подобного треугольнику BCA.

Рассмотрим углы четырёхугольника $ABEK$. Если $\angle ABE = \alpha$, то

$$\angle BEK = \angle BEH + \angle HEK = 90^\circ + \alpha, \text{ а } \angle KAB = 90^\circ - \alpha.$$

Значит, $\angle BEK + \angle KAB = 90^\circ + \alpha + 90^\circ - \alpha = 180^\circ$. Сумма двух противоположных углов в четырёхугольнике 180°, следовательно, четырёхугольник вписан в окружность.

б) Радиус окружности, проходящей через точки A, B и E, равен

$$\frac{AB}{2\sin\angle BEA} = \frac{AB}{2\sin\angle AEC}.$$

Из подобия треугольников находим

$$\frac{CE}{CH} = \frac{AC}{AB}, \text{ откуда } CE = \frac{CH \cdot AC}{AB}.$$

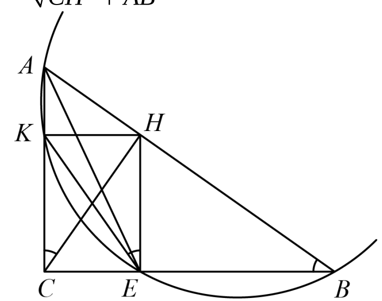
Тогда

$$AE = \sqrt{CE^2 + AC^2} = AC \cdot \sqrt{\frac{CH^2 + AB^2}{AB^2}} = \frac{AC}{AB}\sqrt{CH^2 + AB^2}$$

Поэтому $\sin\angle AEC = \frac{AC}{AE} = \frac{AB}{\sqrt{CH^2 + AB^2}}$.

Следовательно, искомый радиус равен

$$AB : \frac{2AB}{\sqrt{CH^2 + AB^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{CH^2 + AB^2} = \frac{17}{2}.$$



Ответ: $\frac{17}{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*.	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки.	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	3

С5 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\left|(x+1)^2-2^{-a-1}\right|+|x+1|+(1+x)^2+2^{a+1}=0,25+4^a$ имеет единственное решение. Найдите это решение для каждого значения a.

Решение.

Пусть число x – решение данного уравнения при некотором значении параметра a. Тогда число $(-2-x)$ есть его решение при том же значении a. Если решение единственно, то решения $(-2-x)$ и x совпадают, то есть $(-2-x)=x$; $x=-1$. Подставив это решение в исходное уравнение, получим:

$$2^{-a-1}+2^{a+1}=0,25+4^a;\ \frac{1}{2^{a+1}}+2^{a+1}=0,25+4^a;\ \frac{1}{2^{a+1}}=\frac{1}{4},\text{ откуда } a=1.$$

Пусть $a=1$. Тогда исходное уравнение примет вид

$$\left|(x+1)^2-0,25\right|+|x+1|=0,25-(1+x)^2.$$

Отсюда следует, что $0,25-(1+x)^2\ge 0$, следовательно,

$$\left|(x+1)^2-0,25\right|=0,25-(1+x)^2.$$

Исходное уравнение принимает вид $|x+1|=0$, и оно имеет единственное решение $x=-1$, удовлетворяющее условию $0,25-(1+x)^2\ge 0$.

Следовательно, $a=1$ удовлетворяет условию задачи.

Ответ: при $a=1$ единственное решение $x=-1$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
С помощью верного рассуждения найдено значение a. Доказано отсутствие других возможных значений a. Получено неверное значение x из-за вычислительной ошибки.	3
С помощью верного рассуждения найдено значение a и получено соответствующее значение x. Не обосновано отсутствие других решений.	2
Верно найдено значение a; возможно, имеются посторонние решения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

С6 По кругу в некотором порядке по одному разу написаны числа от 10 до 21. Для каждой из двенадцати пар соседних чисел нашли их наибольший общий делитель.

а) Могло ли получиться так, что все наибольшие общие делители равны 1?

б) Могло ли получиться так, что все наибольшие общие делители попарно различны?

в) Какое наибольшее количество попарно различных наибольших общих делителей могло при этом получиться?

Решение.

а) Да, могло. Например, если числа записаны в порядке 10, 21, 20, 19, 16, 15, 14, 11, 18, 13, 12, 17.

б) Всего по кругу записано 12 чисел. Для каждой пары соседних чисел мы ищем наибольший общий делитель, следовательно, получим 12 наибольших общих делителей. Если они все попарно различны, то хотя бы один из них не меньше 12. Но такого быть не может, так как для данных чисел наибольший из всевозможных наибольших общих делителей есть НОД(10,20) = 10.

в) Числа 11, 13, 17 и 19 являются простыми, наибольшие общие делители этих чисел со всеми остальными числами равняются 1. Каждое из чисел имеет двух соседей, следовательно, хотя бы два числа из этих четырёх будут иметь по крайней мере одного соседа, отличного от этих четырёх чисел. Таким образом, хотя бы пять из всех наибольших общих делителей будут равняться 1, то есть совпадать. Следовательно, не может быть больше чем восемь попарно различных наибольших общих делителей, поскольку всего их двенадцать, причём пять совпадают. Для расстановки 10, 20, 19, 17, 13, 11, 18, 12, 16, 14, 21, 15 получается ровно 8 попарно различных наибольших общих делителей.

Ответ: а) Да; б) нет; в) восемь.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*.	4
Получены верные обоснованные ответы в двух пунктах из трёх.	3
Получен верный обоснованный ответ в пункте *б* или в пункте *в*.	2
Приведён пример в пункте *а*, пункты *б* и *в* не решены.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4