Государственное бюджетное общеобразовательное учреждение

средняя общеобразовательная школа № 454

Колпинского района Санкт-Петербурга

**Учебно-методическое пособие по математике**

**«Обобщающее повторение темы "Элементы теории вероятностей"»**

Автор пособия

Любимова Виктория Викторовна,

учитель математики

Санкт-Петербург

2013

Краткая аннотация

В пособии представлены теоретические сведения по теме «Элементы теории вероятностей», приведены примеры решения задач, а также предлагаются задачи для самостоятельного решения. Пособие может использоваться как учителем при проведении уроков повторения, так и учащимися для систематизации знаний по теме при подготовке к итоговой аттестации как в 9, так и в 11 классе.

Пояснительная записка

Хотя тема «Элементы теории вероятностей» сравнительно недавно включена в базовую программу по математике, но уже несколько лет входит в перечень тем, проверяемых на итоговой аттестации учащихся как в 9, так и в 11 классе. Поэтому необходимо уделять внимание систематизации и обобщению теоретических знаний учащихся.

Задачи по теории вероятностей, как правило, вызывают интерес у учащихся, так как связаны с жизненными ситуациями, с такими обыденными понятиями, как случай, событие, вероятность. Но ребята должны знать и математически точные определения этих понятий, уметь грамотно их применять при решении задач. Основной целью пособия является создание у учащихся целостного представления о теме: чем отличаются классическое, статистическое и геометрическое определение вероятности, в каких условиях можно применять каждое из этих определений, какие действия можно совершать над событиями, как это используется в основных теоремах (о сумме и произведении вероятностей). Каждое теоретическое положение иллюстрируется примерами решения задач, выбранных из открытого банка заданий по подготовке к ЕГЭ. Таким образом, пособие может быть рекомендовано для систематизации имеющихся знаний в период подготовки к итоговой аттестации или при повторении пройденной темы.

Содержание

Основные понятия……………………………………………………………………………….4

Невозможные, случайные и достоверные события……………………………………4

Совместные и несовместные события………………………………………………….4

Равновозможные события……………………………………………………………….5

Классическое определение вероятности……………………………………………………….6

Задачи для самостоятельного решения……………………………………………….. 6

Статистическое определение вероятности…………………………………………………….8

Относительная частота события ………………………………………………………..8

Закон больших чисел…………………………………………………………………….9

Задачи для самостоятельного решения…………………………………………………9

Геометрическая вероятность…………………………………………………………………..11

Задача для самостоятельного решения……………………………………………….11

Действия над событиями………………………………………………………………………12

Противоположное событие……………………………………………………………………13

Теорема сложения вероятностей………………………………………………………………13

Теорема умножения вероятностей…………………………………………………………….14

Условная вероятность…………………………………………………………………..14

Формула полной вероятности…………………………………………………………………15

Задачи для самостоятельного решения ………………………………………………16

Литература………………………………………………………………………………………17

Элементы теории вероятностей

Основные понятия

*Испытанием* (*опытом, экспериментом*) называется выполнение определенного комплекса условий, в которых происходит то или иное явление, фиксируется тот или иной результат.

*Событие* – результат испытания (опыта).

*Вероятность события* – численная мера степени объективности возможности события.

***По степени объективной возможности события бывают***:

*невозможные* – события, которые в данных условиях никогда произойти не могут;

*случайные* – события, которые в данных условиях могут произойти, а могут и не произойти;

*достоверные* – события, которые в данных условиях обязательно произойдут.

Слова «*в данных условиях*» важны, так как одно и то же событие в разных условиях может быть и невозможным, и случайным, и достоверным.

**Пример.**

Событие А – «из ящика, где лежат несколько шаров, наудачу извлекают шар, и этот шар оказывается белого цвета»

* Если в ящике лежат одни черные шары, то событие А – невозможное.
* Если в ящике лежат несколько белых и несколько черных шаров, то событие А – случайное.
* Если в ящике одни белые шары, то событие А – достоверное.

Задачи для самостоятельного решения

**Задача 1.** Из цифр 3, 2, 4 составили трехзначное число, взяв их в произвольном порядке.

Каким событием (невозможным, случайным или достоверным) являются каждое из событий: А – «это число делится на 3»,

В – «это число делится на 2»,

С – «это число делится на 5».

**Задача 2**. Каким событием является событие?

А – «Бросают игральный кубик. Выпавшее число делится на 2».

В – «Бросают два игральных кубика. Сумма выпавших очков на двух кубиках меньше 15».

С – «В классе 35 человек. Числа дня рождения у всех разные».

Совместные и несовместные события

Два события называются *совместными,* если в данных условиях они могут произойти одновременно (то есть появление одного из них не исключает появления другого в этом же опыте).

Два события называются  *несовместными*, если в данных условиях они не могут произойти одновременно.

Несколько событий называют *несовместными*, если они попарно несовместны.

**Пример.** Бросают игральный кубик.

Событие А – «выпало четное число»

Событие В – «выпало число, делящееся на 3»

События А и В совместны (одновременно они могут произойти при выпадении числа 6)

Событие С – «выпало нечетное число»

Событие D – «выпало число, делящееся на 4»

События С и D несовместны (нечетное число никогда не может делиться на 4)

**Задача** (решите самостоятельно)**.** Совместны или несовместны события:

1. Событие А – «написано нечетное число»

Событие В – «написано число, делящееся на 5»

1. Событие А – «на кубике выпало число, большее 2»

Событие В – «на кубике выпало число, меньшее 5»

Равновозможные события

*Равновозможными* называют события, если каждое из событий не обладает по отношению к другим никаким преимуществом появляться чаще других при многократных испытаниях, проводимых в одинаковых условиях. В противном случае события называются *неравновозможными*.

**Примеры.** Равновозможные события:

Выпадение 1, 2, 3, 4, 5, 6 при броске кубика.

Выпадение орла или решки при броске монеты.

Неравновозможные события:

Падение бутерброда на хлеб или маслом вниз.

Падение канцелярской кнопки плашмя или боком.

Несколько событий образуют *полную группу* событий, если в результате испытания должно произойти одно и только одно из этих событий.

Если исходы некоторого испытания образуют полную группу событий (то есть попарно несовместны) и равновозможны, то такие исходы называются *элементарными* *событиями (элементарными исходами).*

Элементарные исходы, при которых данное событие наступает, называются *благоприятствующими* этому событию.

**Пример.**

При подбрасывании кубика событию А – «выпало четное число очков» благоприятствуют исходы: выпадение чисел 2, 4, 6.

Классическое определение вероятности

Может быть использовано только в случае конечного числа равновозможных и попарно несовместных исходов.

**Определение***.* Если в некотором испытании существует ***n*** равновозможных и попарно несовместных исходов и ***m*** из них благоприятствуют событию A, то *вероятностью* наступления события A называют отношение , то есть .

**Пример 1.** Из чисел от 10 до 19 наугад выбирают число. Какова вероятность, что оно делится на 3?

Решение:

Имеем числа 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19; то есть n = 10. Из них на 3 делятся числа 12, 15, 18; то есть m = 3. Следовательно, *.*

**Пример 2.** Класс, где учится 21 человек, разделили на группы по 7 человек. Какова вероятность, что Миша и Петя попадут в одну группу?

Решение:

Пусть Миша попал в первую группу, тогда в этой группе еще 6 мест, то есть m = 6. Остальных учащихся, кроме Миши 20 человек, то есть n = 20. Поэтому вероятность попасть Пете в одну группу с Мишей равна .

**Замечание:**

Вероятность *невозможного* события , вероятность *достоверного* события.

**Задачи для самостоятельного решения:**

1. В чемпионате по гимнастике участвуют 20 спортсменок: 8 из России, 7 из США, остальные — из Китая. Порядок, в котором выступают гимнастки, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсменка, выступающая первой, окажется из Китая.
2. В среднем из 1000 садовых насосов, поступивших в продажу, 5 подтекают. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает.
3. Фабрика выпускает сумки. В среднем на 100 качественных сумок приходится восемь сумок со скрытыми дефектами. Найдите вероятность того, что купленная сумка окажется качественной. Результат округлите до сотых.
4. Научная конференция проводится в 5 дней. Всего запланировано 75 докладов — первые три дня по 17 докладов, остальные распределены поровну между четвертым и пятым днями. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Какова вероятность, что доклад профессора М. окажется запланированным на последний день конференции?
5. Перед началом первого тура чемпионата по бадминтону участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 26 бадминтонистов, среди которых 10 участников из России, в том числе Руслан Орлов. Найдите вероятность того, что в первом туре Руслан Орлов будет играть с каким-либо бадминтонистом из России?
6. На борту самолёта 12 мест рядом с запасными выходами и 18 мест за перегородками, разделяющими салоны. Остальные места неудобны для пассажира высокого роста. Пассажир В. высокого роста. Найдите вероятность того, что на регистрации при случайном выборе места пассажиру В. достанется удобное место, если всего в самолёте 300 мест.
7. В группе туристов 30 человек. Их вертолётом в несколько приёмов забрасывают в труднодоступный район по 6 человек за рейс. Порядок, в котором вертолёт перевозит туристов, случаен. Найдите вероятность того, что турист П. полетит первым рейсом вертолёта.
8. В чемпионате мира участвуют 16 команд. С помощью жребия их нужно разделить на четыре группы по четыре команды в каждой. В ящике вперемешку лежат карточки с номерами групп:1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4. Капитаны команд тянут по одной карточке. Какова вероятность того, что команда России окажется во второй группе?
9. В случайном эксперименте симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что в первый раз выпадает орёл, а во второй — решка.
10. В случайном эксперименте бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 8 очков. Результат округлите до сотых.

Ответы: 1)  0,25; 2) 0,995; 3)  0,93; 4) 0,16; 5) 0,36; 6) 0,1; 7) 0,2; 8) 0,25; 9)  0,25; 10) 0,14.

Статистическое определение вероятности

Классическое определение вероятности предполагает, что элементарные исходы равновозможны, но такие испытания редко имеют место на практике.

Например, если игральный кубик несимметричен, то выпадение одной грани уже не будет характеризоваться вероятностью , но ясно, что для этого несимметричного кубика выпадение этой грани характеризуется некоторой вероятностью, указывающей, насколько часто должна появляться эта грань при многократном бросании.

Классическое определение вероятности не требует, чтобы испытание обязательно проводилось в действительности: теоретически определяются все равновозможные и благоприятствующие исходы, но на практике часто до проведения большого количества испытаний трудно или невозможно установить равновозможность исходов испытания.

Например, до многократного подбрасывания канцелярской кнопки трудно представить, равновозможны ли ее падения «на плоскость» или «на бок».

Поэтому одним из более важных подходов с практической точки зрения является статистический подход к определению вероятности. Для этого используется понятие относительной частоты события.

**Определение.** *Относительной частотой* события *A* в данной серии испытаний называют отношение числа испытаний *M*, в которых это событие произошло, к числу *N* всех проведенных испытаний:, где

*M* – частота события *A*,

*W* – относительная частота.

При небольшом числе опытов частота события имеет случайный характер и может заметно отличаться от одной группы опытов к другой. Но при большом числе независимых повторений одного и того же опыта в одинаковых условиях частота появления данного случайного события колеблется около постоянного числа.

Например, в 18 веке французский естествоиспытатель Жорж де Бюффон провел 4040 испытаний с подбрасыванием монеты, в результате чего наблюдал появление орла 2048 раз (какую относительную частоту появления орла он получил? 0,5069). В начале ХХ века английский ученый Карл Пирсон провел с помощью своих учеников 24000 аналогичных испытаний и наблюдал 12012 появлений орла. Какова относительная частота была в этом случае? 0,5005.

Можно заметить, что при большом числе подбрасываний монеты относительная частота выпадения орла приближается к 0,5 – значению классической вероятности.

Это явление называют *статистической устойчивостью* относительных частот. Оно связывает реально проводимые испытания с теоретическими моделями этих испытаний.

**Определение.** *Статистической вероятностью* называют число, около которого колеблется и к которому приближается относительная частота события при увеличении числа испытаний.

Якоб Бернулли обосновал так называемый **закон больших чисел**:

Можно считать достоверным, что при большом числе испытаний относительная частота события W(A) практически не отличается от его вероятности P(A), то есть при большом N:

P(A)

Статистическое определение вероятности применимо лишь в определенных условиях:

* рассматриваемые события должны быть исходами только тех испытаний, которые

могут быть воспроизведены неограниченное число раз при одних и тех же условиях (например, невозможно ставить вопрос о вероятности появления гениального произведения искусства)

* число испытаний, в которых появляется событие, должно быть достаточно велико.

**Пример.** Лекарство давалось 1000 пациентам, 952 излечились. Какова относительная частота в рассмотренном исследовании?

Решение: .

Ответ: 0, 952.

**Пример.** Вероятность того, что новый телевизор в течение года поступит в гарантийный ремонт, равна 0,045. В некотором городе из 1000 проданных телевизоров в течение года в гарантийную мастерскую поступила 51 штука. На сколько отличается частота события «гарантийный ремонт» от его вероятности в этом городе?

Решение:

, по условию P(A)=0,045, значит, W(A) – P(A) = 0,051 – 0,045 = 0,006.

**Пример.** Родильный дом некоторого города вел по годам подсчет рождения мальчиков и девочек. Результаты заносились в таблицу:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Год | Число новорожденных | |
| Девочки | Мальчики |
| 1998 | 802 | 823 |
| 1999 | 629 | 665 |
| 2000 | 714 | 769 |
| 2001 | 756 | 798 |
| 2002 | 783 | 811 |

Какое примерно количество мальчиков можно было ожидать в 2003 году, если ожидалось появление 2000 малышей?

*М* = 3866; *N* = 3866+3684 = 7550; *W* ≈ 0,5121 (относительная частота появления мальчика) 0,5121· 2000 ≈ 1024 мальчика.

Ответ: 1024.

**Задачи для самостоятельного решения:**

1. В изготовлении партии из 10.000 болтов обнаружено 250 бракованных болтов. Найти относительную частоту появления в данной партии бракованного болта.
2. В некотором городе из 5000 появившихся на свет младенцев 2512 мальчиков. Найдите частоту рождения девочек в этом городе. Результат округлите до тысячных.
3. Вероятность того, что новый принтер в течение года поступит в гарантийный ремонт, равна 0,072. В некотором городе из 1000 проданных принтеров в течение года в гарантийную мастерскую поступило 73 штуки. На сколько отличается частота события «гарантийный ремонт» от его вероятности в этом городе?

Ответы: 1)  0,025; 2) 0,498; 3)  0,001.

Геометрическая вероятность

Классическое определение вероятности предполагало, что число элементарных исходов *конечно*, что также ограничивает его применение на практике.

В случае, когда имеет место испытание с *бесконечным* числом исходов, используют определение геометрической вероятности – попадание точки в область.

При определении *геометрической* вероятности полагают, что имеется область N и в ней меньшая область M. На область N наудачу бросают точку (это означает, что все точки области N «равноправны» в отношении попадания туда брошенной случайно точки).

***M***

***N***

Событие A – «попадание брошенной точки на область M». Область M называют благоприятствующей событию A.

Вероятность попадания в какую-либо часть области N пропорциональна мере этой части и не зависит от ее расположения и формы.

Область, на которую распространяется геометрическая вероятность, может быть:

***N***

***M***

1. отрезок (мерой является длина)
2. геометрическая фигура на плоскости (мерой является площадь)
3. геометрическое тело в пространстве (мерой является объем)

Дадим определение геометрической вероятности для случая плоской фигуры.

**Определение.** Пусть область *M* является частью области *N*. Событие *A* состоит в попадании случайно брошенной на область *N* точки в область *M*. *Геометрической вероятностью* события *A* называется отношение площади области *M* к площади области *N*:

При этом вероятность попадания случайно брошенной точки на границу области считается равной нулю.

**Пример.** Механические часы с двенадцатичасовым циферблатом сломались и перестали ходить. Найдите вероятность того, что часовая стрелка застыла, достигнув отметки 5, но не дойдя до отметки 8 часов.

Решение. Число исходов бесконечно, применим определение геометрической вероятности. Сектор между 5 и 8 часами составляет часть площади всего циферблата, следовательно, .

**Задача для самостоятельного решения.**

Дано: *AB* = 10 см, *AM* = 2 см, *MN* = 4 см. На отрезке *АВ* случайным образом отмечается точка *Х*. Какова вероятность, что точка *Х* попадет на отрезок:

а) *AM*; б) *AN*; в) *MN*; г) *MB*; д) *AB*.

*A*

*M*

*N*

*B*

Ответы: а) 0,2; б) 0,6; в) 0,4; г) 0,8; д) 1.

Действия над событиями

*Суммой (или объединением)* двух событий называется событие, состоящее в появлении хотя бы одного из этих событий.

Обозначается: A + B или A

***A***

***B***

***B***

***A***

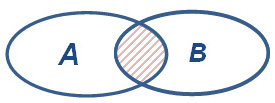
сумма совместных событий сумма несовместных событий

Обозначим Ω - достоверное событие, - невозможное событие, тогда

A + Ω = Ω; A + = A;

A + A = A; A + B = B + A.

*Произведением (или пересечением)* двух событий называется событие, состоящее в одновременном наступлении этих событий.



***A***

***B***

Произведение совместных событий Произведение несовместных событий есть невозможное событие.

Произведение совместных событий обозначается A∙B или AB.

Для произведения событий выполняются следующие равенства:

A ∙ B = B ∙ A; A ∙ Ω = A; A ∙ = ; A ∙ A = A.

*Разностью* событий A и B называют событие C, которое означает, что происходит событие A и не происходит событие B; обозначается A – B или A\ B.

***A***

***B***

**Примеры.**

1. A – «на кубике выпало четное число очков»

***А***

***В***

***2 ; 4***

***6***

***3***

B – «на кубике выпало число, делящееся на 3»

A + B – «выпало 2; 4; 6 или 3 очка

A ∙ B – «выпало 6 очков»

A – B – «выпало 2 и 4 очка»

1. А – «первая лампа погасла» А + В – «хотя бы одна из ламп погасла»

В – «вторая лампа погасла» А ∙ В – «обе лампы погасли»

Событием, *противоположным* событию A, называется событие , состоящее в том, что событие А не наступает: A + = Ω; A ∙ = .

Заметим, что противоположное достоверному событию невозможно и наоборот:

= ; Ω

Теорема сложения вероятностей

Вероятность суммы двух *несовместных* событий равна сумме вероятностей этих событий, то есть:

если А ∙ В = , значит, **P(A + B) = P(A) + P(B)**

Вероятность суммы двух *совместных* событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного наступления:

**P(A + B) = P(A) + P(B) – P(A ∙ B)**

Сумма вероятностей *противоположных* событий равна 1: P(A) + P() = 1.

Отсюда получаем формулу для нахождения *вероятности противоположного события*:

**P() = 1 – P(A).**

**Примеры задач на теорему сложения.**

1. На экзамене по геометрии школьнику достаётся один вопрос из списка экзаменационных вопросов. Вероятность того, что это вопрос на тему «Вписанная окружность», равна 0,2. Вероятность того, что это вопрос на тему «Параллелограмм», равна 0,15. Вопросов, которые одновременно относятся к этим двум темам, нет. Найдите вероятность того, что на экзамене школьнику достанется вопрос по одной из этих двух тем.

Решение. Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий: 0,2 + 0,15 = 0,35.

Ответ: 0,35.

1. В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,3. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,12. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.  
   Решение. Рассмотрим события А – «кофе закончится в первом автомате», В – «кофе закончится во втором автомате». Тогда A·B – «кофе закончится в обоих автоматах», A + B – «кофе закончится хотя бы в одном автомате». По условию P(A) = P(B) = 0,3; P(A·B) = 0,12.   
   События A и B совместные, вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их произведения:   
   P(A + B) = P(A) + P(B) − P(A·B) = 0,3 + 0,3 − 0,12 = 0,48.

Следовательно, вероятность противоположного события, состоящего в том, что кофе останется в обоих автоматах, равна 1 − 0,48 = 0,52.

Ответ: 0,52.

1. Вероятность того, что на тесте по биологии учащийся О. верно решит больше 11 задач, равна 0,67. Вероятность того, что О. верно решит больше 10 задач, равна 0,74. Найдите вероятность того, что О. верно решит ровно 11 задач.

Решение. Рассмотрим события A - «учащийся решит 11 задач» и В - «учащийся решит больше 11 задач». Их сумма — событие A + B – «учащийся решит больше 10 задач». События A и В несовместные, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий:  P(A + B) = P(A) + P(B).   
Тогда, используя данные задачи, получаем: 0,74 = P(A) + 0,67, откуда P(A) = 0,74 − 0,67 = 0,07.

Ответ: 0,07.

Теорема умножения вероятностей

**Определение.** События А и В называют *зависимыми,* если вероятность одного из них зависит от наступления или не наступления другого. В противном случае события называют *независимыми.*

Несовместные события зависимы, так как появление любого из них обращает в нуль вероятность появления всех остальных.

В случае *зависимых* событий вводится понятие условной вероятности.

**Определение.** *Условной вероятностью P(A|B*) события А называется вероятность, вычисленная при условии, что событие В произошло. Аналогично, через P(B|A) обозначается условная вероятность события В при условии, что А наступило.

Для *независимых* событий по определению P(A|B) = P(A); P(B|A) = P(B)

***Теорема умножения для зависимых событий***

Вероятность произведения зависимых событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, при условии, что первое произошло:

P(A ∙ B) = P(A) ∙ P(B|A) P(A ∙ B) = P(B) ∙ P(A|B)

(в зависимости от того, какое событие произошло первым).

***Следствия из теоремы***

1. **Теорема умножения для независимых событий**. Вероятность произведения независимых событий равна произведению их вероятностей:

**P(A∙B) = P(A) ∙ P(B)**

1. Если А и В независимы, то независимы и пары: (;), (; В), (А;).

**Примеры задач на теорему умножения:**

1. Если гроссмейстер А. играет белыми, то он выигрывает у гроссмейстера Б. с вероятностью 0,52. Если А. играет черными, то А. выигрывает у Б. с вероятностью 0,3. Гроссмейстеры А. и Б. играют две партии, причем во второй партии меняют цвет фигур. Найдите вероятность того, что А. выиграет оба раза.

Решение. Возможность выиграть первую и вторую партию не зависят друг от друга. Вероятность произведения независимых событий равна произведению их вероятностей: 0,52 · 0,3 = 0,156.

Ответ: 0,156.

1. По отзывам покупателей Иван Иванович оценил надёжность двух интернет-магазинов. Вероятность того, что нужный товар доставят из магазина А, равна 0,8. Вероятность того, что этот товар доставят из магазина Б, равна 0,9. Иван Иванович заказал товар сразу в обоих магазинах. Считая, что интернет-магазины работают независимо друг от друга, найдите вероятность того, что ни один магазин не доставит товар.

Решение. Вероятность того, что первый магазин не доставит товар равна 1 − 0,9 = 0,1. Вероятность того, что второй магазин не доставит товар равна 1 − 0,8 = 0,2. Поскольку эти события независимы, вероятность их произведения (оба магазина не доставят товар) равна произведению вероятностей этих событий: 0,1 · 0,2 = 0,02.

Ответ: 0,02.

1. В магазине стоят два платёжных автомата. Каждый из них может быть неисправен с вероятностью 0,05 независимо от другого автомата. Найдите вероятность того, что хотя бы один автомат исправен.  
   Решение. Найдем вероятность того, что неисправны оба автомата. Эти события независимые, вероятность их произведения равна произведению вероятностей этих событий: 0,05 · 0,05 = 0,0025.   
   Событие, состоящее в том, что исправен хотя бы один автомат, противоположное. Следовательно, его вероятность равна 1 − 0,0025 = 0,9975.

Ответ: 0,9975.

Формула полной вероятности

Следствием теорем сложения и умножения вероятностей является формула полной вероятности:

Вероятность P(А) события А, которое может произойти только при условии появления одного из событий (гипотез) В1, В2, В3 … Вn, образующих полную группу попарно несовместных событий, равна сумме произведений вероятностей каждого из событий (гипотез) В1, В2, В3, …, Вn на соответствующие условные вероятности события А:

**P(А) = Р(В1)⋅P(A|B1) + Р(В2)⋅P(A|B2) + Р(В3)⋅P(A|B3) + … + Р(Вn)⋅P(A|Bn)**

**Примеры задач.**

1. Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,02. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля. Вероятность того, что система забракует неисправную батарейку, равна 0,99. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,01. Найдите вероятность того, что случайно выбранная из упаковки батарейка будет забракована.

Решение. Ситуация, при которой батарейка будет забракована, может сложиться в результате событий: A – «батарейка действительно неисправна и забракована справедливо» или В – «батарейка исправна, но по ошибке забракована». Это несовместные события, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий. Имеем:

P (A+B) = P(A) + P(B) = 0,02⋅0,99 + 0,98⋅0,01 = 0,0198 + 0,0098 = 0,0296.

Ответ: 0,0296.

2. Всем пациентам с подозрением на гепатит делают анализ крови. Если анализ выявляет гепатит, то результат анализа называется положительным. У больных гепатитом пациентов анализ даёт положительный результат с вероятностью 0,9. Если пациент не болен гепатитом, то анализ может дать ложный положительный результат с вероятностью 0,01. Известно, что 5% пациентов, поступающих с подозрением на гепатит, действительно больны гепатитом. Найдите вероятность того, что результат анализа у пациента, поступившего в клинику с подозрением на гепатит, будет положительным.

Решение. Анализ пациента может быть положительным по двум причинам: А) пациент болеет гепатитом, его анализ верен; B) пациент не болеет гепатитом, его анализ ложен. Это несовместные события, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий. Имеем:

P (A) = 0,9 ⋅ 0,05 = 0,045,

P (B) = 0,01 ⋅ 0,95 = 0,0095,

P (A+B) = P (A) + P (B) = 0,045 + 0,0095 = 0,0545.  
Ответ: 0,0545.

Задачи для самостоятельного решения

1. Из районного центра в деревню ежедневно ходит автобус. Вероятность того, что в понедельник в автобусе окажется меньше 20 пассажиров, равна 0,94. Вероятность того, что окажется меньше 15 пассажиров, равна 0,56. Найдите вероятность того, что число пассажиров будет от 15 до 19.

2. Вероятность того, что батарейка бракованная, равна 0,06. Покупатель в магазине выбирает случайную упаковку, в которой две таких батарейки. Найдите вероятность того, что обе батарейки окажутся исправными.

3. В магазине три продавца. Каждый из них занят с клиентом с вероятностью 0,3. Найдите вероятность того, что в случайный момент времени все три продавца заняты одновременно (считайте, что клиенты заходят независимо друг от друга).

4. Помещение освещается фонарём с двумя лампами. Вероятность перегорания одной лампы в течение года равна 0,3. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа не перегорит.

5. Ковбой Джон попадает в муху на стене с вероятностью 0,9, если стреляет из пристрелянного револьвера. Если Джон стреляет из непристрелянного револьвера, то он попадает в муху с вероятностью 0,2. На столе лежит 10 револьверов, из них только 4 пристрелянные. Ковбой Джон видит на стене муху, наудачу хватает первый попавшийся револьвер и стреляет в муху. Найдите вероятность того, что Джон промахнётся.

Ответ: 1) 0,38; 2) 0,8836; 3) 0,027; 4) 0,91; 5) 0,52.

Литература

1. Ткачева М. В. Элементы статистики и вероятность: учеб. пособие для 7-9 кл. общеобразоват. учреждений / М. В. Ткачева, Н. Е. Федорова. – 4-е изд. – М.: Просвещение, 2007.
2. Тюрин Ю. Н. и др. Теория вероятностей и статистика / Ю. Н. Тюрин, А. А. Макаров, И. Р. Высоцкий, И. В. Ященко. – 2-е изд., переработанное. – М.: МЦНМО, 2008.
3. Тюрин Ю. Н. и др. Теория вероятностей и статистика: Методическое пособие для учителя / Ю. Н. Тюрин, А. А. Макаров, И. Р. Высоцкий, И. В. Ященко. – 3-е изд., стереотип. – М.: МЦНМО, 2011.
4. Шклярник В. С. Введение в комбинаторику и теорию вероятностей. – СПб, 2013.

Интернет-источники:

1. http://mathege.ru
2. http://reshuege.ru
3. http://uztest.ru