Роль элективного курса в организации системного подхода по подготовке к ЕГЭ по математике (из опыта работы).

Учитель высшей квалификационной категории Метелькова Людмила Михайловна, средняя школа №7

Муром. 2009г.

Пояснительная записка.

Сдача экзамена в форме ЕГЭ требует от учащихся обширных знаний по всему школьному курсу математики. Все разделы математики, изучаемой в школе, занимают определённое место в контрольно – измерительных материалах ЕГЭ. Поэтому необходима целенаправленная, систематическая подготовка учащихся для того, чтобы эффективно систематизировать и обобщить знания, вспомнить основные способы и методы решения задач и пополнить свои знания недостающими сведениями.

Многие задания второй части «В» можно отрабатывать и на уроках алгебры, и на уроках геометрии. Задания типа «С» требуют больших не только познавательных, но и временных затрат. Поэтому для решения заданий этой части приходится использовать и дополнительную литературу, и дополнительное время. Вот здесь существенную помощь в подготовке могут оказать факультативные занятия и элективные курсы.

Программа данного элективного курса предназначена для занятий в 11 общеобразовательном классе. Она направлена на систематизацию учебного материала, изученного учащимися, на углубление и расширение знаний.

Цели и задачи данного элективного курса: повторение ранее изученного материала, его систематизация, дополнение и расширение знаний учащихся. Включение в программу дополнительных разделов способствует расширению знаний учащихся. Результатом изучения дополнительных вопросов должно стать не просто знание учащимися соответствующих терминов и формулировок, а умение применять на практике при решении задач. Потому что именно в процессе решения задач отрабатываются соответствующие навыки, развиваются интересы и склонности к математике, что является залогом успешной сдачи экзамена.

Учебники содержат большей частью стандартные вопросы и задачи. Поэтому у учащихся вырабатывается своего рода стереотипный подход к стандартным заданиям. А при выполнении некоторых заданий раздела «В» и заданий части 3 необходимо умение применить свои знания в новой ситуации, не имея готового метода решения, который учащийся должен в сжатые сроки разработать самостоятельно, используя известные методы из различных разделов курса математики средней школы.

Поэтому при подготовке учащихся я стремилась к отбору заданий, содержащих нестандартные формулировки и требующие нестандартного подхода к их решению.

Курс алгебры строится как бы по спирали. Одни и те же действия, математические операции периодически повторяются при изучении новых видов чисел, функций. К тому же и число часов по алгебре значительно больше, чем по геометрии. Поэтому учащиеся лучше усваивают алгебраический материал. Совсем иначе строится курс геометрии. Каждое теоретическое положение изучается один раз, а применяется при изучении и планиметрии и стереометрии. В связи с этим, необходимо наиболее полно повторить геометрический материал. Особенное внимание, на мой взгляд, необходимо уделить вписанным и описанным фигурам и геометрическим телам.

Содержание программы

1. *<u>Преобразование выражений и вычисления</u>.*

Многочлены и тождественные преобразования многочленов. Выделение квадрата двучлена. Теорема Виета. Деление многочленов. Алгоритм Евклида. Теорема Безу.

Алгебраические дроби и действия с дробями. Преобразование выражений, содержащих степени и корни. Тождественные преобразования логарифмических и тригонометрических выражений.

2. *<u>Уравнения, неравенства и системы.</u>*

Нестандартные приёмы решения уравнений и неравенств. Использование областей существования функции. Использование неотрицательности функций. Использование ограниченности функций. Использование свойств синуса и косинуса. Уравнения и неравенства с параметрами и модулями.

3. *<u>Функции и графики.</u>*

Область определения и область значений функции. Чётность и нечётность. Периодичность. Наибольшее и наименьшее значения.

4. *<u>Текстовые задачи.</u>*

Задачи на смеси и сплавы. Задачи с целыми и простыми числами. Задачи на проценты.

5<u>. Геометрия.</u>

Повторение из планиметрии тем: «Вписанные и описанные треугольники», «Вписанные и описанные четырёхугольники», «Вписанные и описанные многоугольники». Вписанные и описанные пирамиды.

Тематическое планирование

№	Тема	Число часов
1	Преобразование выражений. Вычисления.	**6**
	Тождественные преобразования многочленов	1
	Выделение квадрата двучлена. Теорема Виета.	2
	Деление многочленов. Алгоритм Евклида. Теорема Безу.	1
	Тождественные преобразования рациональных выражений, содержащих степени и корни.	2
2	Уравнения, неравенства и системы.	**13**
	Использование областей существования функции.	2
	Использование неотрицательности функции.	2

	Использование ограниченности функции.	2
	Использование свойств синуса и косинуса.	2
	Решение уравнений и неравенств с параметрами и модулями.	5
3	Функции и графики.	**3**
	Область определения и область значений.	1
	Чётность, нечётность, периодичность.	1
	Наибольшее и наименьшее значения функции.	1
4	Текстовые задачи.	**6**
	Задачи на смеси и сплавы.	2
	Задачи на проценты.	2
	Задачи с целыми и простыми числами.	2
5	Геометрия.	**8**
	Вписанные и описанные треугольники.	2
	Вписанные и описанные четырёхугольники и многоугольники.	2
	Вписанные пирамиды.	2
	Описанные пирамиды.	2

Тема №1.

Преобразование выражений, Вычисления.

Для решения многих задач из различных разделов математики необходимо выполнять алгебраические преобразования. Цель таких преобразований – замена сложных и громоздких выражений более простыми и наглядными. Практика показывает, что действия со степенями, корнями, многочленами (умножение, разложение на множители различными способами, деление), должны быть доведены до автоматизма.
Плохое знание формул приводит к тому, что учащиеся пытаются «изобретать» свои, а это приводит к неверным решениям задач. Поэтому знание формул различных тем и разделов математики обязательно.

Рекомендации к решению задач.

1) Чёткое знание формул сокращённого умножения.
2) Знать все способы разложения многочленов на множители.
3) При действиях с алгебраическими дробями необходимы прочные навыки разложения многочленов на множители и нахождение наименьшего общего знаменателя.
4) Необходимо ставить знак модуля при извлечении корней чётной степени и далее раскрывать модуль, пользуясь его определением и методом интервалов.
5) При преобразованиях иррациональных выражений удобно избавиться от иррациональности в знаменателях дробей, а также использовать введение новой переменной, чтобы свести задачу к преобразованию рационального выражения.

6) Повторение правил действий с рациональными числами.
Практическая часть.

Задание №1.

1. Вычислить $36\cdot\left(3{,}2\sqrt[5]{216\sqrt{216}}+2{,}8\sqrt{6\sqrt[5]{36^2}}\right)^{-\frac{10}{19}}$

Решение.

Используя свойства степеней положительных чисел, получим:

$$36\cdot\left(3{,}2\sqrt[5]{216\sqrt{216}}+2{,}8\sqrt{6\sqrt[5]{36^2}}\right)^{-\frac{10}{19}}=36\cdot\left(3{,}2\cdot\left(6^3\cdot6^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{5}}+2{,}8\cdot\left(6\cdot6^{\frac{4}{5}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{10}{19}}=$$

$$=36\cdot\left(3{,}2\cdot6^{\frac{9}{10}}+2{,}8\cdot6^{\frac{9}{10}}\right)^{-\frac{10}{19}}=36\cdot\left(6^{\frac{9}{10}}(3{,}2+2{,}8)\right)^{-\frac{10}{19}}=36\cdot\left(6^{\frac{19}{10}}\right)^{-\frac{10}{19}}=36\cdot6^{-1}=6$$

Ответ:6.

Задание 2. Вычислить $\sqrt[3]{6+\sqrt{\frac{847}{27}}}+\sqrt[3]{6-\sqrt{\frac{847}{27}}}$

Решение.

Обозначим $\sqrt[3]{6+\sqrt{\frac{847}{27}}}+\sqrt[3]{6-\sqrt{\frac{847}{27}}}=x$;

Возведём обе части в куб. Получим

$$\left(\sqrt[3]{6+\sqrt{\frac{847}{27}}}+\sqrt[3]{6-\sqrt{\frac{847}{27}}}\right)^3=x^3;$$

Преобразуем левую часть

$$6+\sqrt{\frac{847}{27}}+3\sqrt[3]{\left(6+\sqrt{\frac{847}{27}}\right)^2\left(6-\sqrt{\frac{847}{27}}\right)}+3\sqrt[3]{\left(6+\sqrt{\frac{847}{27}}\right)\left(6-\sqrt{\frac{847}{27}}\right)^2}+6-\sqrt{\frac{847}{27}}=$$

$$=12+3\sqrt[3]{\left(36-\frac{847}{27}\right)\left(6+\sqrt{\frac{847}{27}}\right)}+3\sqrt[3]{\left(36-\frac{847}{27}\right)\left(6-\sqrt{\frac{847}{27}}\right)}=$$

$$=12+3\sqrt[3]{\frac{125}{27}}\cdot\sqrt[3]{6+\sqrt{\frac{847}{27}}}+3\sqrt[3]{\frac{125}{27}}\cdot\sqrt[3]{6-\sqrt{\frac{847}{27}}}=$$

$$=12+5\left(\sqrt[3]{6+\sqrt{\frac{847}{27}}}+\sqrt[3]{6-\sqrt{\frac{847}{27}}}\right);$$

Получили уравнение

$x^3=12+5x;$

$x^3-5x-12=0;$

Очевидно, что $x=3.$

Ответ: $x=3.$

Задание №3.

Найдите целое положительное значение x, при котором значение выражения

$$\sqrt{\frac{x-2}{x+7}}\cdot\frac{x^2+\left(7-x\sqrt{x^2+5x-14}-49\right)}{x^2-(x+2)\sqrt{x^2+5x-14}-4}$$

ближе всего к числу – 0.3.

Решение.

Область определения выражения $\sqrt{\frac{x-2}{x+7}}$ есть множество $(-\infty;-7)\cup[2;\infty)$. При $x=2$ знаменатель второго множителя обращается в нуль. Значит, $x\neq 2$. Так как требуется найти целое положительное значение x, достаточно решить задачу на множестве $(2;\infty)$.

Числитель второго множителя можно преобразовать к виду:

$x^2+(7-x)\sqrt{x^2+5x-14}-49=$ $(x-7)(x+7)-(x-7)\sqrt{(x+7)(x-2)}$ $=$ $(x-7)\sqrt{x+7}\left(\sqrt{x+7}-\sqrt{x-2}\right)$.

Аналогично можно преобразовать и знаменатель, т. е. $x^2-(x+2)\sqrt{x^2+5x-14}-4=$ $(x+2)\sqrt{x-2}\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{x+7}\right)$.

В результате, получим:

$$\sqrt{\frac{x-2}{x+7}}\cdot\frac{x^2+\left(7-x\sqrt{x^2+5x-14}-49\right)}{x^2-(x+2)\sqrt{x^2+5x-14}-4} = \sqrt{\frac{x-2}{x+7}}\cdot\frac{(x-7)\sqrt{x+7}(\sqrt{x+7}-\sqrt{x-2})}{(x+2)\sqrt{x-2}(\sqrt{x-2}-\sqrt{x+7})} = \frac{7-x}{x+2} = \frac{9}{x+2}-1.$$

При положительных значениях x функция $y=\frac{9}{x-2}-1$ монотонно убывает, т. к. её производная

$y^{`}=-9(x+2)^{-2}$ отрицательна.

Кроме того, $y=-0{,}3$, если $\frac{9}{x+2}-1=-0{,}3$, т.е. $\frac{9}{x+2}=0{,}7$, $x=10\frac{6}{7}$.

Найденное значение x лежит между целыми числами 10 и 11. Из монотонности функции

$y=\frac{9}{x-2}-1$ следует, что при целом x её значением, ближайшим к числу – 0, 3 может быть либо $y(10)$, либо $y(11)$.

Вычислим расстояние между – 0, 3 и $y(10)$:

$$|y(10)-(-0{,}3)|=\left|\frac{9}{12}-1-\left(-\frac{3}{10}\right)\right|=\left|-\frac{1}{4}+\frac{3}{10}\right|=\frac{1}{20}.$$

Вычислим расстояние между – 0, 3 и $y(11)$:

$|y(11)-(-0{,}3)|=\left|-\frac{4}{13}+\frac{3}{10}\right|=\left|\frac{-40+39}{130}\right|=\frac{1}{130}\langle\frac{1}{20}$. Следовательно, $y(11)$ ближе к – 0,3, чем $y(10)$.

Ответ: 11.

Задание №4.

При каком значении x из множества $\{1,2,3,...,98,99\}$ значение выражения

$$\left(\left(\sqrt{\frac{x+2}{x}}-\sqrt{1-\frac{2}{x+2}}\right):\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}+\sqrt{\frac{x}{x+2}}-2}\right)\right):\left(1+\sqrt{\frac{x}{x+2}}\right)$$

ближе всего к 73?

Решение.

$$\left(\left(\sqrt{\frac{x+2}{x}}-\sqrt{1-\frac{2}{x+2}}\right):\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}+\sqrt{\frac{x}{x+2}}-2}\right)\right):\left(1+\sqrt{\frac{x}{x+2}}\right)=$$

$$=\frac{(x+2)-x}{\sqrt{x(x+2)}}\cdot\frac{\sqrt{x(x+2)}}{(x+2)-2\sqrt{x(x+2)}+x}\cdot\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}=$$

$$=\frac{(x+2)-x}{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}\right)^2}\cdot\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x+2}\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x}\right)}{2}=1+\frac{x+\sqrt{x(x+2)}}{2}.$$

Так как $x^2<x(x+2)<(x+1)^2$, то данное выражение больше, чем $1+x$ и меньше, чем $1+x+0,5$

Следовательно, при x=72найденное значение выражения лежит в интервале (73; 73,5). При $x\geq 73$ все значения выражения больше 74, а при $x\leq 71$ - меньше 72,5.

Ответ: 72.

Задание №5.

Решить уравнение $\frac{a}{x+a}+\frac{b}{x+b}=\frac{(a+b)^2}{ab}$ при $a>0, b>0$.

Решение.

Приведём к общему знаменателю и получим: $(ax+2ab+bx)ab=(x+a)(x+b)(a+b)^2$

Далее удобно выполнить преобразования следующим образом:

$$x(a+b)\cdot ab+2a^2b^2=(a+b)^2\cdot x^2+(a+b)^3x+ab(a+b)^2$$

После того, как все слагаемые соберём в одной части и приведём подобные члены, получим следующее уравнение:

$$x^2(a+b)^2+x(a+b)(a^2+ab+b^2)+ab(a^2+b^2)=0.$$

По условию задачи $a>0, b>0$, поэтому разделим на коэффициент при x^2 и получим следующее приведённое уравнение:

$$x^2+x\frac{(a+b)(a^2+ab+b^2)}{(a+b)^2}+\frac{ab(a^2+b^2)}{(a+b)^2}=0.$$

Применяя теорему, обратную теореме Виета, получим:

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{(a+b)(a^2+ab+b^2)}{(a+b)^2} \\ x_1x_2=\dfrac{ab(a^2+b^2)}{(a+b)^2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{a^2+b^2}{a+b}-\dfrac{ab}{a+b}, \\ x_1x_2=\dfrac{a^2+b^2}{a+b}\cdot\dfrac{ab}{a+b} \end{cases}$$

Отсюда следует, что корнями уравнения будут следующие рациональные дроби:

$x_1 = -\frac{a^2+b^2}{a+b}; \quad x_2 = -\frac{ab}{a+b}.$

Ответ: $x_1 = -\frac{a^2+b^2}{a+b}; \quad x_2 = -\frac{ab}{a+b}.$

Задание 6.

Решить уравнение $x^2 + \frac{81x^2}{(x+9)^2} = 40;$

Решение. Данное уравнение разрешимо при всех x, кроме – 9.

Преобразуем данное уравнение к виду:

$$\left(x - \frac{9x}{x+9}\right)^2 + \frac{18x^2}{x+9} = 40; \quad \left(\frac{x^2+9x-9x}{x+9}\right)^2 + \frac{18x^2}{x+9} = 40; \quad \left(\frac{x^2}{x+9}\right)^2 + \frac{18x^2}{x+9} = 40;$$

Введём новую переменную: $\frac{x^2}{x+9} = y$ и получим приведённое квадратное уравнение $y^2 + 18y - 40 = 0$. Корнями этого уравнения являются числа 2 и – 20 . рассмотрим два уравнения: 1) $\frac{x^2}{x+9} = 2$ и 2) $\frac{x^2}{x+9} = -20$.

Корнями первого уравнения являются числа $1+\sqrt{19}$ и $1-\sqrt{19}$. Уравнение 2) корней не имеет.

Следовательно, корнями данного уравнения являются числа $1+\sqrt{19}$ и $1-\sqrt{19}$.

Ответ: $1+\sqrt{19}$ и $1-\sqrt{19}$.

<u>Следующие задания решить самостоятельно.</u>

1. Вычислите $\sqrt[4]{8\sqrt{10}-24} \cdot \sqrt[4]{24+8\sqrt{10}} \cdot \sqrt[4]{64}$. Ответ: 8.

2. Найдите значение выражения

$$\frac{5\sqrt{x^2-8x+16}}{x-4} + \frac{17\sqrt{x^2-10x+25}}{5-x} - \frac{\sqrt{36x-9x^2-27}}{\sqrt{4x-3-x^2}}.$$

Ответ: 9.

3. Найдите значение выражения

$$\frac{7\sqrt{4\sin^2 x - 4\sin x + 1}}{2\sin x - 1} + \frac{9\sqrt{4\cos^2 x - 4\cos x + 1}}{1 - 2\cos x} + \frac{\sqrt{28x-16x^2-12}}{\sqrt{7x-4x^2-3}}.$$

Ответ: 0.

4. Найдите значение выражения

$$\frac{4\sqrt{\log_3^2 x - 6\log_{3x} + 9}}{\log_3 x - 3} - \frac{11\sqrt{\log_2^2 x - 4\log_2 x + 4}}{\log_2 x - 2} + \frac{\sqrt{60x-4x^2-224}}{\sqrt{15x-x^2-56}}.$$

Ответ: -13.

5. При каком целом положительном x значение выражения

$$\sqrt{\frac{x-3}{x+1}}\cdot\frac{1+(x-1)\sqrt{x^2-2x-3}-x^2}{x^2-(x+3)\sqrt{x^2-2x-3}-9}$$ ближе всего к 0,66?

Ответ: 9.

6. Найдите целое положительное значение х, при котором значение выражения

$$\sqrt{\frac{x-5}{x+11}}\cdot\frac{x^2+(11-x)\sqrt{x^2+6x-55}-121}{x^2-(x+5)\sqrt{x^2+6x-55}-25}$$ ближе всего к – 0, 4.

Ответ: 22.

7. Решить уравнение $x^4+x^3-3x^2-5x-2=0$.

Ответ: 2 и – 1.

8. Решить уравнение

$$\frac{x^2-10x+15}{x^2-6x+15}=\frac{3x}{x^2-8x+15}.$$

Ответ: $7-\sqrt{34};\ \ 7+\sqrt{34}.$

Тема № 2.
Уравнения и неравенства.

При решении уравнений и неравенств используйте следующие рекомендации.

1) Определить вид уравнения или неравенства: линейное, квадратное. логарифмическое, и т .д. Решать уравнение в соответствии с определённым видом.

1) В случае решения иррациональных уравнений и неравенств, логарифмических, дробно-рациональных , а также уравнений и неравенств с параметрами надо внимательно следить за ОДЗ (или не забывать сделать проверку), чтобы избежать появления посторонних корней.
2) При решении показательных или логарифмических неравенств надо учитывать монотонность соответствующих функций.
3) При решении тригонометрических уравнений и неравенств особая сложность в многообразии формул, поэтому здесь можно порекомендовать побольше решать задачи на преобразование тригонометрических выражений, чтобы выработать целенапрвленный выбор необходимых формул. Нужно чёткое представление об области определения и множестве значений тригонометрических функций.

На этих занятиях отдельно рассматриваем уравнения и неравенства, решаемые нестандартными методами.

<u>Использование областей существования функций.</u>

1. Решить уравнение $3\sqrt{4-x^2}=\lg\left(1+\sqrt{x^2-4}\right)+3x-x^2-1$.

Решение.

Очевидно, что данное уравнение стандартными методами решить нельзя. Так как здесь имеются квадратные корни и логарифм, то в первую очередь необходимо найти область определения.

Обе части уравнения определены только для тех x, которые удовлетворяют системе неравенств

$\begin{cases} 4-x^2 \ge 0, \\ 4-x^2 \le 0 \end{cases}$ Все решения системы состоят из двух чисел: 2 и -2. Поэтому, если данное уравнение имеет решение, то это либо 2, либо – 2.

В результате проверки убеждаемся, что $x=2$ является решением данного уравнения, а $x=-2$ данному уравнению не удовлетворяет.

Ответ: 2.

2. Решить неравенство $\left(\sqrt{x^2-6x+5}+1\right)\log_5\frac{x}{5}+\frac{1}{x}\left(\sqrt{12x-2x^2-10}+1\right)>0.$

Решение. Обе части неравенства определены только для тех x, которые удовлетворяют системе неравенств: $\begin{cases} x>0, \\ x^2-6x+5\ge 0, \\ 12x-2x^2-10\ge 0. \end{cases}$

Решая эту систему, находим, что ей удовлетворяют лишь два числа: 1 и 5. Поэтому, если неравенство имеет решения, то они могут быть только среди этих двух чисел. В результате проверки выясняем, что решением данного неравенства является только число 5.

Ответ: 5.

Использование неотрицательности функций.

3. Решить уравнение $1-\sqrt{1-x^2-x^4}+\log_2\left(1+x^2\right)=0$.

Очевидно, что данное уравнение стандартными методами решить нельзя.

Запишем уравнение в виде: $\log_2\left(1+x^2\right)=\sqrt{1-x^2-x^4}-1$. Каждая из функций $y=\sqrt{1-x^2-x^4}-1$

и $y=\log_2\left(1+x^2\right)$ неотрицательна для любого x из области её существования.

Поэтому данное уравнение равносильно системе уравнений $\begin{cases} \sqrt{1-x^2-x^4}=1, \\ \log_2\left(1+x\right)=0. \end{cases}$

Эта система имеет единственное решение $x=0$. Следовательно, данное уравнение тоже имеет единственное решение.

Ответ: 0.

4. Решить неравенство $\sqrt{x^2-7x+12}+\lg^2\left(x^2-4x+1\right)\le 0.$

Решение. Рассмотрим две функции: $y=\sqrt{x^2-7x+12}$ и $y=\lg^2\left(x^2-4x+1\right)$. Каждая из них неотрицательна для любого x из области её существования. Поэтому данное неравенство равносильно системе уравнений:

$$\begin{cases} x^2-7x+12=0, \\ \lg^2\left(x^2-4x+1\right)=0. \end{cases}$$

Первое уравнение имеет два решения 3 и 4. Но второму уравнению удовлетворяет только $x=4$. Следовательно, система, а значит, и равносильное ей уравнение имеют единственное решение $x=4$.

Ответ: 4.

Использование ограниченности функций.

5. Решить уравнение $\cos^2(x\sin x)=1+\left|\log_5\left(x^2-x+1\right)\right|$.

Данное уравнение можно решить, используя ограниченность функций $y=\cos^2(x\sin x)$ и $y=1+\left|\log_2\left(x^2-x+1\right)\right|$. Пусть множество М есть общая часть областей существования этих функций, тогда для любого $x\in M$ имеем: $\cos^2(x\sin x)\le 1;\ 1+\left|\log_5\left(x^2-x+1\right)\right|\ge 1$. Следовательно, уравнение $\cos^2(x\sin x)=1+\left|\log_5\left(x^2-x+1\right)\right|$ равносильно системе двух уравнений:

$$\begin{cases} \cos^2(x\sin x)=1, \\ \left|\log_5\left(x^2-x+1\right)\right|=0 \end{cases}$$

Решая второе уравнение системы, получаем: $x_1=0$ а $x_2=1$. Из этих чисел только число $x=0$ удовлетворяет первому уравнению системы. Следовательно, и уравнение, равносильное полученной системе, имеет единственное решение, равное 0.

Использование свойств синуса и косинуса.

6. Решить неравенство $2^{\sqrt{\cos x-1}}+\log_2\left(x^2+1\right)>\sin x+1$.

Решение. Обе части неравенства определены только для тех x, для которых $\cos x\ge 1$. $x_n=2\pi n, n\in Z, n\ne 0$.

Так как $\cos x\le 1$ для любого x, получаем, что обе части данного неравенства определены для тех x,
для которых $\cos x=1$, т.е. для $x_n=2\pi n, n\in Z$. Подставим полученное число в левую и правую части данного неравенства и получим: $2^{\sqrt{\cos x_n-1}}+\log_2\left(x_n^2x+1\right)=1+\log_2\left(4n^2\pi^2+1\right)$, а $\sin x_n+1=1$.

Остаётся выяснить, для каких n справедливо неравенство $\log_2\left(4n^2\pi^2+1\right)>0$.

Очевидно, что для n = 0 последнее неравенство не выполняется, а для $n\ne 0$ выполняется. Следовательно, все решения данного неравенства составляют числа $x_n=2\pi n, n\in Z, n\ne 0$.

Ответ: $x_n=2\pi n, n\in Z, n\ne 0$.

8. Решить уравнение $\sin 2x - \sin 6x + 2 = 0$.

Решение. Мы знаем, функция синус ограничена: $-1 \le \sin t \le 1$. Поэтому в силу ограниченности данное уравнение имеет решение при одновременном выполнении равенств:

$$\begin{cases} \sin 2x = -1, \\ \sin 6x = 1 \end{cases}, \text{ отсюда } \begin{cases} 2x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z, \\ 6x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z, \\ x_2 = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3}k, k \in Z \end{cases}.$$

Из этих решений необходимо выбрать общие. Путём перебора значений n и k, и с помощью числовой прямой находим единственное значение $x= -\frac{\pi}{4} + \pi l, l \in Z$.

Ответ: $x= -\frac{\pi}{4} + \pi l, l \in Z$.

9. Решить уравнение: $2\sin^3 x + 4\cos^3 x = 3\sin x$.

Решение:

Умножим правую часть на $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$;

$$2\sin^3 x + 4\cos^3 x = 3\sin x$$
$$2\sin^3 x + 4\cos^3 x = 3\sin x(\sin^2 x + \cos^2 x);$$
$$2\sin^3 x + 4\cos^3 x = 3\sin^3 x + 3\sin x\cos^2 x;$$
$$\sin^3 x + 3\sin x\cos^2 x - 4\cos^3 x = 0;$$

Теперь можно применить стандартный способ: разделим обе части уравнения на $\cos^3 x$. Корни исходного уравнения при этом не теряются, иначе $\sin x = 0$, что противоречит тождеству

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$

Итак, разделив обе части уравнения на $\cos^3 x$, придем к уравнению

$tg^3 x + 3tgx - 4 = 0.$

Сделав замену $tgx = t$, решим уравнение

$t^3 + 3t - 4 = 0.$

Сумма коэффициентов данного уравнения равна нулю, следовательно, одно из его корней – число 1. Представим многочлен $t^3 + 3t - 4$ в виде

$t^3 - t + 4t - 4 = (t-1)(t^2 + t + 4).$

Уравнение

$t^2 + t + 4 = 0$

действительных корней не имеет, поэтому число 1 – единственный действительный корень уравнения

$t^3 + 3t - 4 = 0.$

Решим уравнение

$tgx = 1;$

$x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n = Z.$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n = Z.$

Решение. Обе части неравенства определены только для тех x, которые удовлетворяют системе неравенств: $\begin{cases} x > 0, \\ x^2 - 6x + 5 \ge 0, \\ 12x - 2x^2 - 10 \ge 0. \end{cases}$

10. Решить уравнение $\log_{\frac{\sqrt{3}}{3}}(x+3) = \sqrt{3+x} - 1.$ В ответе запишите корень уравнения или сумму корней, если их несколько.

Решение. Рассмотрим функции $y = \log_{\frac{\sqrt{3}}{3}}(x+3)$ и $y = \sqrt{3+x} - 1.$

Обе функции определены на промежутке $(-3;+\infty)$. На этом промежутке и будем искать корни.

Функция $y = \log_{\frac{\sqrt{3}}{3}}(x+3)$ монотонно убывает на рассматриваемом промежутке, так как основание логарифма $0 < \frac{\sqrt{3}}{3} < 1.$ Функция $y = \sqrt{3+x} - 1.$ монотонно возрастает на этом промежутке. Поэтому уравнение не может иметь более одного корня. Очевидно, что корень уравнения равен – 2 .

Ответ: - 2.

11. Решить уравнение $\sqrt{16 + (2x-3)^2} = 4 - \cos^2 \frac{5\pi x}{3}$

Решение. Функция $y = \sqrt{16 + (2x-3)^2}$ определена при всех значениях ***x*, так как подкоренное выражение положительно при** любых значениях x. Наименьшее значение функции $y = \sqrt{16} = 4$ достигается при 2x - 3 = 0, т. е. при x = 1,5.

Так как $0 \le \cos^2 t \le 1$ при любом значении t, $3 \le 4 - \cos^2 t \le 4$. Следовательно, равенство

$\sqrt{16 + (2x-3)^2} = 4 - \cos^2 \frac{5\pi x}{3}$ может выполняться только тогда, когда значения обеих его частей равны 4. Подставив x = 1,5 в выражение $4 - \cos^2 \frac{5\pi x}{3}$, получаем:

$4 - \cos^2 \frac{5\pi x}{3} = 4 - \cos^2 \frac{5\pi}{2} = 4 - \cos^2 (2\pi + \frac{\pi}{2}) = 4$. Следовательно, x = 1,5 – корень данного уравнения. Ответ: 1,5.

12. Решите уравнение $\sin 2x \cdot \operatorname{tg} x + 1 = 3 \sin x$

<u>Решение:</u>

1) $\sin 2x \cdot \operatorname{tg} x + 1 = 3 \sin x \Leftrightarrow 2 \sin x \cos x \cdot \frac{\sin x}{\cos x} - 3 \sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0 \\ \cos x \neq 0. \end{cases}$$

2) $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$;
$\sin x = 1$ или $\sin x = 0,5$.

а) $\sin x = 1$, тогда $\cos x = 0$, значит, $\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$ не являются решениями исходного уравнения.

б) $\sin x = 0,5$, тогда $\cos x \neq 0$ и $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$.

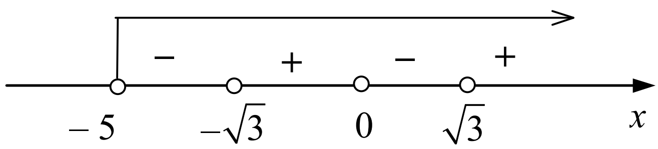
Ответ: $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$.

13. Найдите значение функции $f(x) = 10^{\lg\frac{x^3-3x}{x+5} - \log_{0,1}(x+5)}$ в точке максимума.

<u>Решение</u>:

1. Найдем область определения функции f:

$$\begin{cases} \dfrac{x^3 - 3x}{x+5} > 0 \\ x + 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) > 0 \\ x + 5 > 0 \end{cases}.$$



$x \in (-\sqrt{3}; 0) \cup (\sqrt{3}; \infty)$

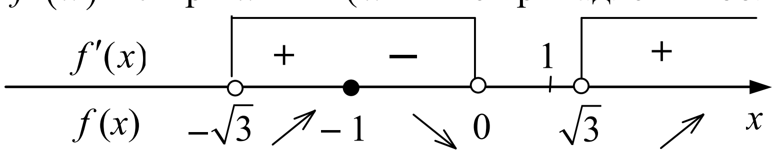
Упростим формулу, задающую функцию:

$$f(x) = 10^{\lg\frac{x^3-3x}{x+5} + \lg(x+5)} = 10^{\lg(x^3-3x)} = x^3 - 3x.$$

2. $f(x) = x^3 - 3x, \quad x \in (-\sqrt{3}; 0) \cup (\sqrt{3}; \infty)$.

$f'(x) = 3x^2 - 3$, $f'(x) = 3(x^2 - 1)$.

$f'(x) = 0$ при $x = -1$ ($x = 1$ не принадлежит области определения функции f).



$x = -1$ - точка максимума и $f(-1) = 2$

Ответ: 2.

14. Найдите количество всех решений системы уравнений
$$\begin{cases} y(1-x)^2 + x^3 = 0 \\ 2x - \dfrac{10}{x\log_y 2} = 5\log_{32}(0{,}125y^2) - 7. \end{cases}$$

Решение:

1) По условию $x \neq 0$, а $y > 0$, $y \neq 1$. Тогда второе уравнение системы равносильно следующим уравнениям: $2x - \dfrac{10}{x} \cdot \log_2 y = \log_2(0{,}125y^2) - 7$,

$2x - \dfrac{10}{x} \cdot \log_2 y = 2\log_2 y - 3 - 7$, $\quad x - \dfrac{5\log_2 y}{x} = \log_2 y - 5$,

$x^2 + (5 - \log_2 y)x - 5\log_2 y = 0$, $\quad (x+5)(x - \log_2 y) = 0$.

Если $x = -5$, то первое уравнение системы имеет вид $y \cdot 36 - 125 = 0$, $y = 125/36 > 0$. Значит, $(-5;\, 125/36)$ – решение системы.

2) Если $x \neq -5$, то $x = \log_2 y$, $y = 2^x$ и первое уравнение системы имеет вид $2^x(1-x)^2 + x^3 = 0$. Если $x > 0$, то $x^3 > 0$ и $2^x(1-x)^2 + x^3 > 0$, т.е. положительных корней нет. Если $x < 0$, то $1 - x \neq 0$ и

$$2^x = -x^3 \cdot (1-x)^{-2}. \qquad (*)$$

3) Рассмотрим функции $y = 2^x$ и $y = -x^3 \cdot (1-x)^{-2}$.

Функция $y = 2^x$ возрастает ($2 > 1$).

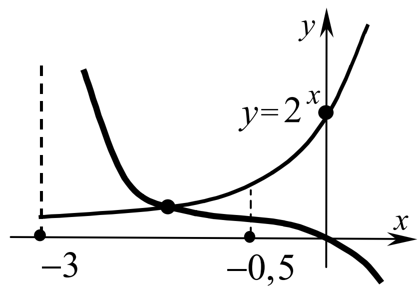
Исследуем функцию $y = -x^3 \cdot (1-x)^{-2}$, $x < 0$:

$y' = -3x^2(1-x)^{-2} - x^3(-2)(1-x)^{-3}(-1) =$

$= -x^2(1-x)^{-3}(3(1-x) + 2x) = -x^2(1-x)^{-3}(3-x) < 0$,

т.к. $x^2 > 0$, $3 - x > 0$, $(1-x)^{-3} > 0$. Значит, эта функция убывает при $x < 0$.

4) Если $x = -3$, то $2^x < 1 < -x^3 \cdot (1-x)^{-2}$. Если же $x = -0{,}5$, то $2^x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\quad -x^3 \cdot (1-x)^{-2} = \dfrac{1}{8} : \dfrac{9}{4} = \dfrac{1}{18}$ и $2^x > -x^3 \cdot (1-x)^{-2}$. Так как обе функции изменяются непрерывно, то имеется единственный корень x_0 уравнения (*), $-3 < x_0 < -0{,}5$; $x_0 \neq -5$. Поэтому исходная система имеет ровно два решения $(x_0;\, 2^{x_0})$ и $(-5;\, 125/36)$.



Ответ: 2.

15. Найдите все значения x, которые удовлетворяют неравенству $(2a-1)x^2<(a+1)x+3a$ при любом значении параметра a, принадлежащем промежутку $(1;2)$.

Решение:

1) Неравенство приводится к виду $(2x^2-x-3)a+(-x^2-x)<0$, в котором левая часть, рассматриваемая как функция от a, есть **линейная** функция $f(a)=\left(2x^2-x-3\right)a+\left(-x^2-x\right)$ с коэффициентами, зависящими от x. В задаче требуется найти все значения x, при каждом из которых эта функция отрицательна для всех $a\in(1;2)$.

2) Для отрицательности линейной функции f на промежутке (1; 2) необходимо, чтобы она была отрицательна или равна нулю при каждом из двух значений $a=1$ и $a=2$, т.е. выполнялась система $\begin{cases} f(1)\le 0 \\ f(2)\le 0 \end{cases}$;

$$\begin{cases} f(1)\le 0 \\ f(2)\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x-3\le 0 \\ 3x^2-3x-6\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)(x+1)\le 0 \\ (x-2)(x+1)\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1\le x\le 2.$$

3) Для выполнения требования задачи функция f не должна равняться нулю при обоих значениях $a=1$ и $a=2$ одновременно, т. е. **не** выполняется система $\begin{cases} f(1)=0 \\ f(2)=0 \end{cases}$;

$$\begin{cases} f(1)=0 \\ f(2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)(x+1)=0 \\ (x-2)(x+1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=-1.$$

4) Выполнения двух полученных условий уже достаточно для отрицательности $f(a)$ на данном промежутке. Таким образом, искомые значения x — это решения системы $\begin{cases} -1\le x\le 2 \\ x\ne -1 \end{cases} \Leftrightarrow -1<x\le 2.$

Ответ: $(-1;2]$.

Следующие задания решить самостоятельно.

16. Найдите корень (или сумму корней, если их несколько) уравнения $\left(\sqrt{x+3}\right)\cdot(0{,}25x-2{,}5)=(x-2)\cdot\left(\sqrt{6+x}-4\right)$.

Ответ: 12.

17. . Найдите корень (или сумму корней , если их несколько) уравнения
$\frac{17-3x}{7}=\frac{1}{0{,}5+\log_{0{,}25}x}$.

Ответ: 9.

18. Решить уравнение $\frac{\sqrt{\sin^2 x+5}+\sqrt{\cos^2 x+4}}{2}=\sqrt[4]{\left(\sin^2 x+5\right)\left(\cos^2 x+4\right)}$.

Ответ: $\pi n, n \in Z$.

19. Решить неравенство $\frac{\sqrt{\sin x+2}+\sqrt{\cos x+3}}{2} \le \sqrt[4]{\sin x\cos x+3\sin x+2\cos x+6}$.

Ответ: $\frac{\pi}{2}+2\pi n, n \cup Z$ и $\pi+2\pi k, k \in Z$.

20. Решить неравенство $\sqrt{x^2-x-6}+10^{\sqrt{4-x^2}}+5\lg(12+x) \le 6$.

Ответ: -2.

Тема №3.

Функции и графики.

На эту тему отведено небольшое число часов, потому что все виды функций, их свойства, преобразования и методы построения графиков изучаются в 10 и 11 классах. Поэтому в первую очередь , необходимо ещё раз дополнительно обратить внимание учащихся на такие важные понятия, как область определения и область изменения функции, чётность и нечётность, периодичность и монотонность, максимумы и минимумы. Дополнтельно рассмотреть вопрос об асимптотах. Уделить внимание вопросу нахождения наибольшего и наименьшего значений функции.

Практическая часть.

Задание №1.

Найдите наибольшее целое значение функции

$y=\frac{7}{3}\sqrt{4\cos^2 x+4\cos x+8.}$

Решение.

Пусть $\cos x=t$, где $-1 \le t \le 1$. Тогда подкоренное выражение принимает вид $4t^2+4t+8$. Выделив полный квадрат двучлена, получим: $4t^2+4t+8=\left(2t+1\right)^2+7$. Функция g(t)=(2t+1)^2+7 непрерывна и при $-1 \le t \le 1$принимает все значения из промежутка$[8;16]$. Следовательно, функция $h=\sqrt{g}$ принимает все значения из промежутка $\left[\frac{14\sqrt{2}}{3};9\frac{1}{3}\right]$. Значит, наибольшее целое значение функции $y=\frac{7}{3}\sqrt{4\cos^2 x+4\cos x+8.}$ равно 9.

Ответ: 9.

Задание №2.

Сколько целых чисел содержится в области определения функции

$y=\sqrt{\frac{\sqrt[4]{x-5}}{14x-48-x^2}}$?

Решение.

В соответствии с определением квадратного корня областью определения данной функции является множество решений неравенства

$\frac{\sqrt[4]{x-5}}{14x-48-x^2} \geq$, которое равносильно совокупности двух систем:

$\begin{cases} x-5>0, \\ 14x-48-x^2>0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x-5=0, \\ 14x-48-x^2 \neq 0 \end{cases}$.

Решение первой системы – пересечение множеств (5; $+\infty$)и (6; 8), т. е. промежуток (6; 8). Решение второй системы – число 5. Следовательно, решением этой совокупности систем является объединение множеств $\{a\} \cup (6;8)$. В этом множестве два целых числа: 5 и 7.

Ответ: 2.

Задание №3.

Найдите наименьшее значение функции
$y = \log_{0,5}(0,25 - x^2)$.

Решение.

Основание логарифма 0<0.5<1, поэтому функция $y = \log_{0,5} t$ монотонно убывает на всей области определения. Область определения логарифмической функции - множество всех положительных чисел. Поэтому: $0,25 - x^2 > 0$, $(x-0,5)(x+0,5) < 0,\ -0,5 < x < 0,5.$

Таким образом, функция $y = \log_{0,5}(0,25 - x^2)$ определена на множестве (-0,5; 0,5).

График квадратичной функции $t = 0,25 - x^2$ парабола, вершина которой находится на оси ординат в точке (0; 0,25), а ветви направлены вниз.

Поэтому своё наибольшее значение, равное 0,25, эта функция достигает при $x = 0$.

При $x \in [0;0,5]$ значения функции непрерывно убывают от 0,25 до 0, а при $x \in [-0,5;0]$ непрерывно возрастают от0 до 0,25.

Следовательно, исходная функция непрерывно убывает на промежутке $(-0,5;0]$, принимая наименьшее значение 2 при $x = 0$, а на промежутке $[0;0,5)$ непрерывно возрастает, принимая наименьшее значение 2 при $x = 0$. Значит, наименьшее значение данной функции равно 2.

Ответ: 2.

Задание № 4.

Нечётная функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой. Для всякого неотрицательного значения переменной x значение этой функции совпадает со значением функции $g(x) = x(x+1)(x+3)(x-7)$. Найдите значение функции $h(x) = \frac{f(x)+g(x)}{f(x)-g(x)}$ при x = - 3.

Решение. По условию, нечётная функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой, и притом для любого значения переменной x выполняется условие $g(x) = x(x+1)(x+3)(x-7)$, то $f(3) = g(3) = 3(3+1)(3+3)(3-7) = -288$. Отсюда $f(-3) = -(-288) = 288$. т.к. для нечётной функции выполняется равенство

$f(-x)=-f(x)$. Поскольку g(-3)=0, то $f(-3)+g(-3)=288+0=288$ и $f(-3)-g(-3)=288-0=288$. Таким образом, $h(x)=\dfrac{f(x)+g(x)}{f(x)-g(x)}$ при x = -3 равно $h(x)=\dfrac{f(-3)+g(-3)}{f(-3)-g(-3)}=\dfrac{288}{288}=1.$

Ответ: 1.

Задание № 5

Найдите наименьшее значение функции $y=e^{x^2+2x+1}$ на отрезке $[-2;0]$.

Решение. Функция, непрерывная на отрезке, принимает наибольшее и наименьшее значения либо на концах этого отрезка, либо в критических точках, являющихся внутренними точками этого отрезка.

Вычислим производную данной функции: $y'=e^{x^2+2x+1}\left(x^2+2x+1\right)' = \ 2(x+1)e^{x^2+2x+1}$. $y'=0$ при x = - 1.Выполним вычисления: $y(-2)=e; y(-1)=1; y(0)=e$. Следовательно, наименьшее значение функции на отрезке $[-2;0]$ равно 1.

Ответ: 1.

Задание № 6.

При каких значениях x значения функции $f(x)=5^{|x-1|+|x-2|}$ будут не меньше соответствующих значений функции $g(x)=5^{x+3}$?

Решение. Составим неравенство по условию задачи: $f(x)\ge g(x)$. Поскольку 5>1? то это неравенство равносильно следующему: $|x-1|+|x-2|\ge x+3$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<1, \\ 1-x+2-x\ge x+3 \\ 1\le x\le 2, \\ x-1+2-x\ge x+3 \\ x>2, \\ x-1+x-2\ge x+3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<1, \\ x\le 0 \\ 1\le x\le 2 \\ x\le -2 \\ x>2, \\ x\ge 6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\le 0, \\ x\ge 6 \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;0]\cup[6;+\infty)$.

Следующие задачи решите самостоятельно.

Задание № 7.

Найдите значение функции $y=\dfrac{3f(x)-2f(-x)}{2g(x)-3g(-x)}$ в точке x_0. если известно, что функция $y=f(x)$ - чётная, функция $y=g(x)$ - нечётная и $f(x_0)=5$, а $g(x_0)=1$.

Ответ:1.

Задание № 8.

Найдите наименьшее целое значение функции $y = \frac{1}{3}\sqrt{36\sin^2 x - 12\sin x + 17}$.

Ответ: 2.

Тема №5.

Текстовые задачи.

Смеси и сплавы.

Задание № 1.

В сосуде содержится 5л 20%-ного водного раствора кислоты. Сколько воды необходимо добавить в этот сосуд, чтобы получить 5%-ный раствор кислоты.

Решение.

Так как 5л раствора содержат 20% кислоты, то объем кислоты равен: $\frac{5 \cdot 20}{100}$ = 1л.

Пусть в раствор добавили *x*л воды. Тогда объем раствора составил величину (5 + *x*)л. По условию задачи кислота равняется 5% этой величины и её объем равен $\frac{5(5+x)}{100}$ л. Так как кислоты в раствор не добавляли, то это тот объем кислоты, который находился в сосуде первоначально. Получаем уравнение: $\frac{5(5+x)}{100}$ = 1 или 5 + *x* = 20. Решив это линейное уравнение, найдем *x* = 15 (л).

Задание № 2

Имеется два куска сплавов меди и серебра: первый массой 2кг и содержит 30% меди, второй массой 3 кг и содержит 40% меди. Сколько килограммов второго сплава надо сплавить со всем первым куском, чтобы получить новый сплав, содержащий *p*% меди?

Решение.

В первом куске содержится $\frac{2}{100} \cdot 30 = 0{,}6$ кг меди. Пусть взяли *x* кг второго сплава (очевидно, что $0 \le x \le 3$). Тогда вместе с ним было взято $\frac{x}{100} \cdot 40 = 0{,}4x$ кг чистой меди. В новом сплаве будет $(0{,}6 + 0{,}4x)$ кг меди. При этом вес нового сплава (2 + *x*) кг.

Процентное содержание меди в новом сплаве $\frac{0{,}6 + 0{,}4x}{2+x} \cdot 100\%$. По условию задачи это содержание составляет *p*%. Для нахождения *x* получаем уравнение $p = \frac{0{,}6 + 0{,}4x}{2+x} \cdot 100$ или $2p + px = 60 + 40x$ или $2p - 60 = x(40 - p)$, откуда $x = \frac{2(p-30)}{40-p}$.

Ограничение на параметр *p* найдем из условия $x \in [0;3]$. Так как $x \ge 0$, то получаем неравенство $\frac{2(p-30)}{40-p} \ge 0$, решение которого $p \in [30;40)$. Так как $x \le 3$, то получаем неравенство $\frac{2(p-30)}{40-p} \le 3$ или $\frac{2(p-30)}{40-p} - 3 \le 0$ или $\frac{5(p-36)}{40-p} \le 0$, откуда $p \in [0;36] \cup (40;100]$

(здесь учтено, что по смыслу задачи $0 \le p \le 100$). Учитывая решения двух неравенств окончательно имеем: $p \in [30;36]$. Таким образом, при $p \in [0;30) \cup (36;100]$ $x \in ø$; при $p \in [30;36]$ $x = \dfrac{2(p-30)}{40-p}$ кг.

Задание № 3

Из сосуда, наполненного 96%-ным раствором кислоты , отлили 2,5 л и долили 2,5 л 80%-ного раствора той же кислоты, затем еще раз отлили 2,5 л и снова долили 2,5 л 80%-ного раствора кислоты. После этого в сосуде получился 89%-ный раствор кислоты.

Найти емкость сосуда.

Решение.

Будем интересоваться процентным содержанием кислоты в сосуде. Пусть емкость сосуда x л. Тогда в нем содержалось $\frac{96}{100}x$ л чистой кислоты. Во время первого переливания взяли 2,5 л 96%-ного раствора (или $2{,}5 \cdot \frac{96}{100}$ л чистой кислоты). В сосуде осталось $\frac{96}{100}x - \frac{2{,}5 \cdot 96}{100}$ л кислоты. После этого долили 2,5 л 80%-ного раствора кислоты (или $2{,}5 \cdot \frac{80}{100}$ л кислоты). Тогда кислоты стало $\frac{96}{100}x - \frac{2{,}5 \cdot 96}{100} + \frac{2{,}5 \cdot 80}{100} = \frac{24}{25}x - \frac{2}{5}$ л.

После этого отлили 2,5 л смеси (или $\dfrac{2{,}5\left(\frac{24}{25}x - \frac{2}{5}\right)}{x}$ л чистой кислоты). Тогда осталось $\left(\frac{24}{25}x - \frac{2}{5}\right) - \dfrac{2{,}5\left(\frac{24}{25}x - \frac{2}{5}\right)}{x}$ л кислоты. К ним было добавлено еще $\frac{2{,}5 \cdot 80}{100}$ л кислоты и ее стало $\left(\frac{24}{25}x - \frac{2}{5}\right) - \dfrac{2{,}5\left(\frac{24}{25}x - \frac{2}{5}\right)}{x} + 2$ л. С другой стороны, известно, что получится 89%-ный раствор кислоты, и так как емкость сосуда x л, то в нем содержится $\frac{89}{100}x$ л кислоты. Получаем уравнение: $\left(\frac{24}{25}x - \frac{2}{5}\right) - \dfrac{2{,}5\left(\frac{24}{25}x - \frac{2}{5}\right)}{x} + 2 = \frac{89}{100}x$ или после очередных преобразований: $7x^2 - 80x + 100 = 0$. Корни этого уравнения $x = 10$ и $x = \frac{7}{10}$ (не подходит, так как $x > 2{,}5$). Итак, емкость сосуда 10 л.

Задачи на числа.

Задание № 4.

Найти целочисленные решения уравнения $x^2 + 4xy + 3y^2 = 5.$

Решение. Так как в левой части уравнения стоит однородный многочлен по переменным x и у, то разложим его на множители, а правую часть – на простые множители и получим:

$(x+y)(x+3y) = 1 \cdot 5.$ В силу того, что решения уравнения x и у должны быть целыми числами, то очевидно, что числа $x + y$ и $x+3y$ тоже целые. Поэтому рассмотрим следующие случаи:

а) $\begin{cases} x+y=1, \\ x+3y=5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+y=-1, \\ x+3y=5; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x+y=5, \\ x+3y=1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x+y=-5, \\ x+3y=-1. \end{cases}$

Получили четыре системы линейных уравнений. Решая их, соответственно находим:

а) $\begin{cases} x=-1, \\ y=2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x=1, \\ y=-2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x=7, \\ y=-2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x=-7, \\ y=2. \end{cases}$

Все эти решения являются целыми.

Ответ: а) $\begin{cases} x=-1, \\ y=2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x=1, \\ y=-2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x=7, \\ y=-2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x=-7, \\ y=2. \end{cases}$

Задание № 5

Является ли число 535353…53 простым (число состоит из 120 цифр)?

Решение. Используя признаки делимости на 2, 4, 5, 8, 10, убеждаемся, что ни на одно из них оно не делится. Проверим признаки делимости на 3 и на 9. для этого найдём сумму цифр числа. Так как число образовано повторяющейся группой цифр 5 и 3 и таких групп 60, то сумма цифр числа (5 + 3)· 60=480. Эта сумма делится на 3, значит, данное число делится на 3, а, следовательно, является составным.

Задание № 6

Является ли число $36^{12} + 121^{15}$ простым?

Решение. Подход, который мы использовали в предыдущей задаче, здесь не применим. Почему? Можно определить, что число оканчивается цифрой 7 т. к. (6 + 1) = 7. Признаки делимости позволяют сделать вывод о том, что данное число не делится ни на одно из чисел: 2, 4, 5, 8, 10. Использовать признак делимости на 3 и на 9 мы не можем, т. к. не все цифры числа нам не известны.

Поэтому необходимо искать другой подход. Запишем данное число в виде: $\left(36^4\right)^3 + \left(121^5\right)^3.$

и разложим его на множители по формуле сокращённого умножения:

$\left(36^4\right)^3 + \left(121^5\right)^3. = \left(36^4 + 121^5\right) \cdot \left(36^8 - 36^4 \cdot 121^5 + 121^{10}\right).$. Поскольку данное число можно представить в виде произведения, значит, оно составное.

Задание №7.

Найти все натуральные трёхзначные числа, каждое из которых обладает следующими двумя свойствами: 1) первая цифра числа в 3 раза меньше последней его цифры; 2) сумма самого числа с числом, получающимся из него перестановкой второй и третьей цифр, делится на 8 без остатка.

Решение. Пусть трёхзначное число имеет вид: $\overline{abc} = 100a + 10b + c$, где a - число сотен $(1 \le a \le 9)$, b - число десятков и с – число единиц $(0 \le b, c \le 9)$. запишем условие задачи в виде системы: $\begin{cases} c = 3a, \\ 100a + 10b + c + 100a + 10c + b = 8n \end{cases}$, где n - натуральное число или $\begin{cases} c = 3a, \\ 200a + 11(b + c) = 8n; \end{cases}$

или $\begin{cases} c = 3a, \\ 11(b + c) = 8(n - 25). \end{cases}$

Из второго условия получаем, что выражение $b + c$ кратно 8. Поэтому рассмотрим три случая:

1) $b + c = 0$, но тогда $b = 0, c = 0$, что невозможно.

2) $b + c = 8$. Так как из первого уравнения с кратно 3, то или с=3 (тогда $a = \frac{c}{3} = 1$ и $b = 8 - c = 5$) или с = 6 (тогда $a = 2$ и $b = 2$). Получаем два числа: 153 и 226.

3) $b + c = 16$. Так как с кратно 3 и $0 \le b \le 9$, то с = 9. Тогда $a = 3$ и $b = 7$. Получаем число 379.

Ответ: 153; 226; 379.

Задачи на проценты.

Задание № 8

Зарплату повысили на p процентов. Затем новую зарплату повысили на $2p$%. В результате двух повышений зарплата увеличилась в 1,32 раза. На сколько процентов зарплата была увеличена во второй раз?

Решение. Пусть исходная зарплата составляла x рублей. Тогда после первого повышения она стала равна $a\left(1 + \frac{p}{100}\right)$рублей. После второго повышения на $2p$% зарплата стала равна:

$a\left(1 + \frac{p}{100}\right) + a\left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot \frac{2p}{100} = a\left(1 + \frac{p}{100}\right)\left(1 + \frac{2p}{100}\right)$ рублей. По условию задачи эта величина равна $1{,}32a$.

Составим уравнение: $a\left(1 + \frac{p}{100}\right)\left(1 + \frac{2p}{100}\right) = 1{,}32a.$

Выполнив соответствующие преобразования, найдём его корни. Его корнями являются числа -160
и 10. По условию задачи подходит только 10. Итак, p = 10, а $2p$ = 20. Значит, во второй раз зарплата была повышена на 20%.

Ответ: 20%.

Задание № 9

Банк ежегодно увеличивает на одно и то же число процентов сумму, имеющуюся на вкладе к моменту начисления процентов. На сколько процентов ежегодно увеличивается сумма, если за два года она возросла с 2000 до 2420 рублей?.

Решение. Пусть ежегодно сумма увеличивается на x %. В первый раз за 100% принимаем 2000 рублей. тогда через год на счету окажется сумма: $(2000+0{,}01x\cdot 2000)=(2000+20x)$ рублей.

Для расчёта процентов за второй год мы должна принять за 100% сумму, имеющуюся на счету к началу второго года, т. е. $(2000+20x)$ рублей. Итак, к концу второго года на счету будет:

$((2000+20x)+0{,}01(2000+20x))=0{,}2x^2+40x+2000$ рублей. А это, по условию,2420 рублей.

Составим и решим уравнение: $0{,}2x^2+40x+2000=2420.$ Получим $x_1=-210, x_2=10.$ По условию задачи x должно быть положительным, значит x = 10. Итак, ежегодная сумма вклада увеличивалась на 10%.

Ответ:10%.

Следующие задания решите самостоятельно.

Задание № 10.

Вкладчик положил в банк деньги под 10% годовых. После начисления процентов некоторую сумму он изъял. После вторичного начисления процентов оказалось, что образовавшаяся на счету сумма на 1% меньше исходной величины вклада. Сколько процентов от исходной суммы было изъято вкладчиком после первого начисления процентов? Ответ: 20%.

Задание № 11.

Решить уравнение в целых числах $x-2y=2xy$. Ответ: (0; 0), (- 2 ; 1).

Задание № 12.

Является ли число 287^5 + 1563^3 +321^{1991} простым числом? От веет: нет (последняя цифра этого числа будет 5).

Задание № 13

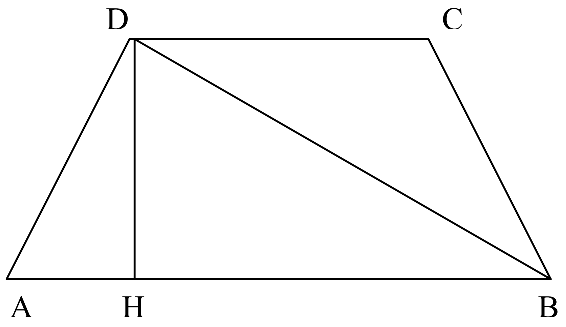
После покупки пакета акций владелец разделил его на две неравные части. Акции первой части он продал на 10% дороже, а акции второй части на 10% дешевле их первоначальной цены. В результате его прибыль составила 2,8%. Сколько процентов всех акций составила вторая часть пакета?
Ответ: 36%.

Тема № 6.

Геометрия

Задание № 1

Высота равнобедренной трапеции, равная 5,25, делит основание трапеции в отношении 1:9.Определите радиус описанной окружности, если боковая сторона трапеции равна меньшему основанию.



Решение

Проведём высоту DH. AD=DC=BC=8x

Обозначим $AH = x$,

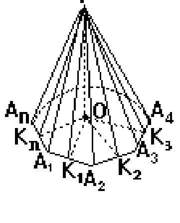
AD=DC=BC=8x

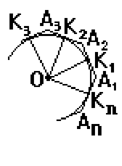
Из треугольника ADH найдём, что $AH = x = \frac{\sqrt{7}}{4}$ $AD = 2\sqrt{7}$ $BH = \frac{9\sqrt{7}}{4}$ $BD = 3\sqrt{7}$. Окружность, описанная около трапеции, описана и около треугольника DCB (равнобедренного). По теореме косинусов найдём, что $\cos C = -\frac{1}{8}$. Тогда $\sin C = \frac{3\sqrt{7}}{8}$. $S_{BCD} = 0{,}5BC \cdot CD \cdot \sin C = \frac{21\sqrt{7}}{4}$. $R = \frac{ABC}{4S} = 4$.

Ответ: 4.

Задание № 2

Двугранные углы при основании n – угольной пирамиды равны. Докажите, что высота пирамиды проходит через центр окружности, вписанной в основание.





Дано: $PA_1A_2\ldots A_n$ – пирамида,

PO – высота,

<u>двугранные углы при основании пирамиды равны</u>

Доказать: O – центр вписанной окружности.

Решение

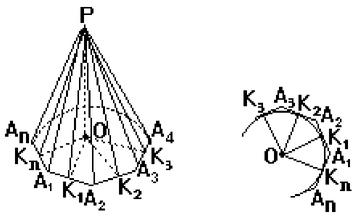
1. Проведём высоты PK_1, PK_2,…, PK_n боковых граней пирамиды;

2. По теореме о трёх перпендикулярах $OK_1 \perp A_1A_2, OK_2 \perp A_2A_3, \ldots, OK_n \perp A_nA_1$;по определению линейной меры двугранного угла и условию: $\angle PK_1O = \angle PK_2O = \ldots = \angle PK_nO$; $\angle POK_1 = \angle POK_2 = \ldots = \angle POK_n = 90°$, т. к. PO - высота пирамиды, следовательно, прямоугольные треугольники PK_1O, PK_2O,…и PK_nO равны по катету и противолежащему углу.

3. Из равенства треугольников следует равенство соответствующих элементов: $K_1O=K_2O=\ldots=K_nO$, следовательно, точка O – центр вписанной окружности.

Задание № 3

Высота n – угольной пирамиды проходит через центр окружности, вписанной в основание. Докажите, что высоты всех боковых граней, проведенные к ребрам основания, образуют равные углы с высотой пирамиды.



Дано: $PA_1A_2\ldots A_n$ – пирамида,

PO – высота,

O – центр вписанной окружности.

Доказать: $\angle OPK_1 = \angle OPK_2 = \ldots = \angle OPK_n$

Решение

1. Проведём высоты PK_1, $PK_2, \ldots, PK_n$ боковых граней пирамиды и соединим точки $K_1, K_2, \ldots, K_n$ с центром вписанной окружности; по теореме о трёх перпендикулярах $OK_1 \perp A_1A_2, OK_2 \perp A_2A_3, \ldots, OK_n \perp A_nA_1$, следовательно, K_1O, K_2O, …, K_nO являются радиусами вписанной окружности,

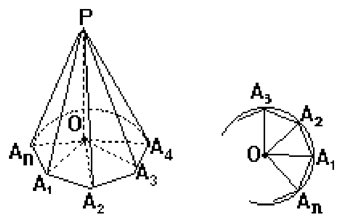
2. $\angle POK_1 = \angle POK_2 = \ldots = \angle POK_n = 90°$, т. к. PO - высота пирамиды,

$\Delta PK_1O = \Delta PK_2O = \ldots = \Delta PK_nO$ по двум катетам (общий катет PO и радиусы одной окружности);

3. Из равенства треугольников следует равенство соответствующих элементов: $\angle OPK_1 = \angle OPK_2 = \ldots = \angle OPK_n$.

Задание № 4.

Высота n – угольной пирамиды проходит через центр окружности, описанной около основания. Докажите, что все боковые рёбра этой пирамиды одинаково наклонены к плоскости основания.



Дано: $PA_1A_2\ldots A_n$ – пирамида,

PO – высота пирамиды,

O – центр описанной окружности.

Доказать: $\angle PA_1O = \angle PA_2O = \ldots = \angle PA_nO$.

Решение

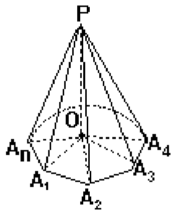
1. Соединим центр окружности с вершинами многоугольника $A_1A_2\ldots A_n$, отрезки OA_1, $OA_2, \ldots, OA_n$ являются проекциями ребер пирамиды, т. к. PO – высота пирамиды. По определению угла между прямой и плоскостью $\angle PA_1O$, $\angle PA_2O, \ldots, \angle PA_nO$ являются углами между ребрами пирамиды и плоскостью основания.

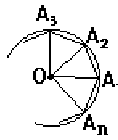
2. Рассмотрим треугольники PA_1O, $PA_2O, \ldots$ и PA_nO: $\angle O=90°$, т. к. PO – высота, PO – общий катет, $A_1O=A_2O=\ldots=A_nO$ – как радиусы одной окружности. Следовательно, прямоугольные треугольники PA_1O, $PA_2O, \ldots$ и PA_nO равны.

3. Из равенства треугольников следует равенство соответствующих элементов: $\angle PA_1O = \angle PA_2O =\ldots \angle PA_nO$.

Задание № 5

Все боковые рёбра *n* – угольной пирамиды одинаково наклонены к плоскости основания. Докажите, что высота этой пирамиды проходит через центр окружности, описанной около основания.





Дано: $PA_1A_2 \ldots A_n$ – пирамида,

PO – высота,

$\angle PA_1O = \angle PA_2O = \ldots = \angle PA_nO$.

Доказать: O – центр описанной окружности.

Решение

1. Соединим основание высоты (точка O) с вершинами многоугольника $A_1A_2 \ldots A_n$, отрезки OA_1, $OA_2, \ldots$, OA_n являются проекциями ребер пирамиды, т. к. PO – высота пирамиды. По определению угла между прямой и плоскостью $\angle PA_1O$, $\angle PA_2O, \ldots$, $\angle PA_nO$ являются углами между ребрами пирамиды и плоскостью основания.

2. Рассмотрим треугольники PA_1O, $PA_2O, \ldots$и PA_nO: $\angle O = 90°$, т. к. PO – высота, PO – общий катет, $\angle PA_1O = \angle PA_2O = \ldots = \angle PA_nO$ по условию. Следовательно, прямоугольные треугольники PA_1O, $PA_2O, \ldots$и PA_nO равны по катету и противолежащему углу.

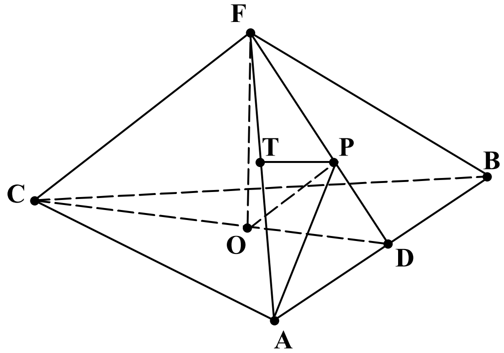
3. Из равенства треугольников следует равенство соответствующих элементов: $A_1O = A_2O = \ldots = A_nO$, следовательно O – центр описанной окружности.

Задание № 6

Дана правильная треугольная пирамида со стороной основания, равной $2\sqrt{7}$. Центр основания пирамиды является вершиной конуса, окружность основания которого вписана в боковую грань пирамиды. Найдите радиус основания конуса.

Решение:

1) Пусть пирамида *FABC* – данная правильная пирамида, *FO* – ее высота, тогда точка *O* – центр треугольника *ABC*. Пусть *CD* – медиана треугольника *ABC*, тогда $O \in CD$ и $CO : OD = 2 : 1$. Треугольник *FAB* равнобедренный и точка *D* – середина *AB,* значит, *FD* – медиана, высота и биссектриса треугольника *FAB*.



Пусть основание конуса вписано в треугольник *FAB*. Тогда центр основания конуса (точка *P*) является точкой пересечения биссектрис треугольника *FAB*. Следовательно, *OP* – высота конуса, *PD* – радиус основания, а *OD* – образующая конуса. Тогда $OP \perp FD$.

2) Пусть $PT \perp FA$. Тогда *PT=PD* как радиусы окружности, вписанной в треугольник *FAB.* Прямоугольные треугольники *FDA* и *FTP* подобны (имеют общий угол при вершине *F*). Следовательно, $\dfrac{FA}{FP} = \dfrac{AD}{PT}$ или $\dfrac{FA}{AD} = \dfrac{FP}{PD}$, так как

$PT=PD$. Отсюда $\dfrac{FA+AD}{AD}=\dfrac{FP+PD}{PD}$,

т.е. $PD=\dfrac{AD\cdot FD}{FA+AD}$. Вычислим PD другим способом. Прямоугольные треугольники FOD и OPD подобны, так как имеют общий угол D. Поэтому $\dfrac{PD}{OD}=\dfrac{OD}{FD}$ и $PD=\dfrac{OD^2}{FD}$. Итак, $\dfrac{AD\cdot FD}{FA+AD}=\dfrac{OD^2}{FD}$ (1).

3) По условию $AB=2\sqrt{7}$. Пусть $AF=b$ и $PD=r$. Из треугольника FAD получаем $FD=\sqrt{b^2-\left(\sqrt{7}\right)^2}=\sqrt{b^2-7}$, а из треугольника ABC получаем $CD=\sqrt{21}$, $OD=\dfrac{1}{3}CD=\dfrac{1}{3}\sqrt{21}$. Подставим найденные величины в равенство (1): $\dfrac{\sqrt{7}\cdot\sqrt{b^2-7}}{b+\sqrt{7}}=\dfrac{7}{3\sqrt{b^2-7}}$. Отсюда получаем: $3\left(b-\sqrt{7}\right)=\sqrt{7}$. Следовательно,

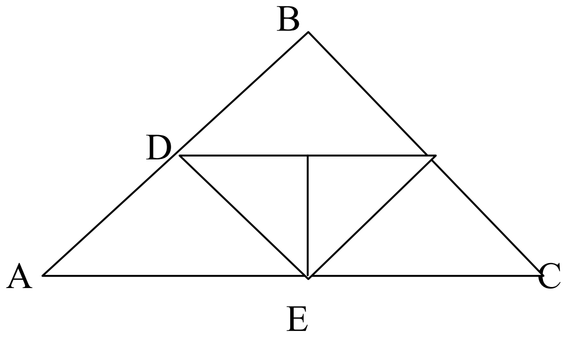
$b=\dfrac{4\sqrt{7}}{3}$ и $r=\dfrac{7}{3\sqrt{b^2-7}}=\dfrac{\frac{7}{3}}{\sqrt{\frac{16\cdot 7}{9}-7}}=1$.

Ответ: 1.

Задача №7

В треугольник ABC вписан равнобедренный прямоугольный треугольник DEF так, что его гипотенуза DF параллельна стороне AC, а вершина E лежит на стороне AC. Найдите высоту треугольника ABC, если AC = 16см, OF = 8см.

Решение.



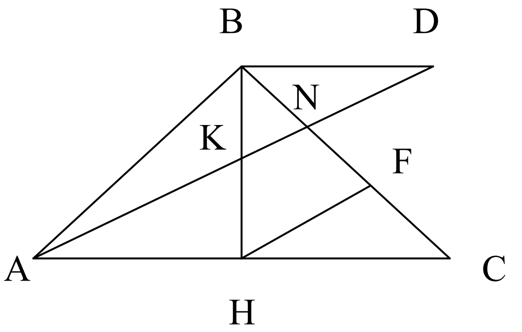
1. По условию задачи DF $\parallel$ AC и DF=$\frac{1}{2}$AC, значит DF – средняя линия треугольника ABC.
2. Так как DF $\parallel$ AC, то треугольники ABC и DBF подобны по второму признаку подобия с коэффициентом подобия 2 (AC : DF=2).
3. В подобных треугольниках отношение сходственных высот равно отношению сходственных сторон. HE = $\frac{1}{2}$DF, следовательно BE = 8см.

Ответ: 8см.

Задача № 8.

Через вершину B равнобедренного треугольника ABC параллельно основанию AC проведена прямая BD. Через точку К – середину высоты BH проведён луч AK, пересекающий прямую BD в точке D, а сторону BC в точке N. Определите, в каком отношении точка N делит сторону BC.

Решение.



1.В треугольнике ANC проведём HF ∥ AN. HF – средняя линия треугольника ANC, т.к. H середина AC и HF ∥ AN. Тогда NF=FC (1).

2. В треугольнике HBF KN – средняя линия, и BN=NF (2).

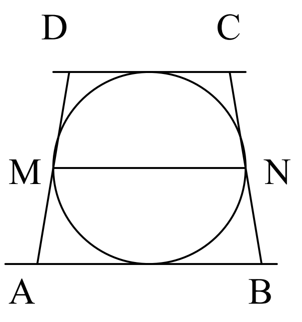
3. Из равенств (1) и (2) следует, что BN = NF = FC. Значит BN : NC = 1 : 2.

Ответ: BN : NC = 1 : 2.

Задача № 9

Известно, что в равнобедренную трапецию с боковой стороной, равной 5, можно вписать окружность. Найдите длину средней линии трапеции.

Решение.



Известно, что средняя линия трапеции равна полусумме её оснований. Поэтому

MN = $\frac{DC + AB}{2}$. так как трапеция описанная, то суммы противоположных сторон равны:

DC + AB = BC + AD = 10, поэтому MN = 5.

Ответ: 5.

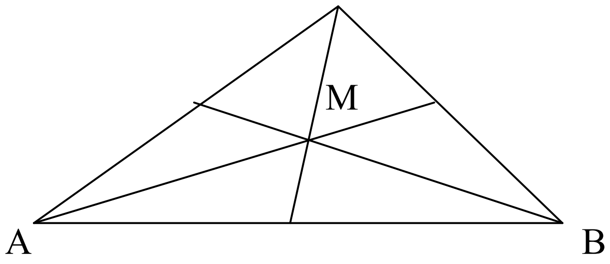
Задача № 10

Треугольник ABC, стороны которого13см, 14см и 15см, разбит на три треугольника отрезками, соединяющими точку пересечения медиан M с вершинами треугольника.

Найдите площадь треугольника BMC.

Решение.

C



Медианы разбивают треугольник на 6 равновеликих треугольников. Поэтому $S_{\Delta BMC} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC}$. По формуле Герона $S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-\alpha)(p-b)(p-c)}$, где p– полупериметр треугольника ABC, т.е. p = $\frac{13+14+15}{2}$ = 21см.

$S = \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)=84}$

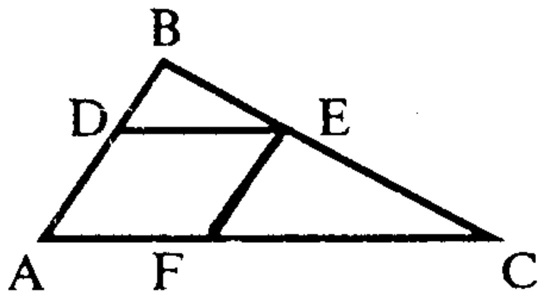
$S_{\Delta ИbC} = \frac{84}{3} = 28см^2$.

Задача №11

.В треугольник ABC вписан ромб ADEF так, что вершины D, E, A и лежат соответственно на сторонах AB, BC и AC. Определить отрезки BE и EC соответственно, если AB =14см, BC=12см, AC=10см.

Решение.

Диагональ ромба AE является биссектрисой угла BAC.



По свойству биссектрисы внутреннего угла треугольника $\frac{BE}{EC} = \frac{AB}{AC}$, т. е. $\frac{BE}{EC} = \frac{14}{10} = \frac{7}{5}$.

Тогда BE=$\frac{7}{12}$, BE=7см, EC=$\frac{5}{12}$, EC=5см.

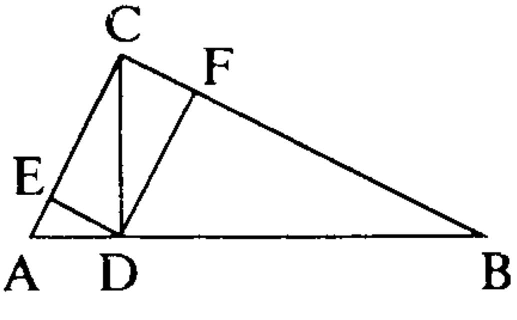
Ответ: 7см; 5см.

Задание № 12

В треугольнике ABC из вершины прямого угла проведена высота . В треугольниках и проведены высоты соответственно, длины которых 1см и 2см. Найти катеты треугольника ABC.

Решение.

Так как CEDF прямоугольник, то EC= DF =2см., CF= ED =1см.



$DE^2 = AE \cdot CE$, откуда $AE = \frac{DE^2}{EC} = \frac{1}{2}$.

AC=AE+EC=2,5см.

$DF^2 = CF \cdot FB, FB = \dfrac{DF^2}{CF} = 4$ см.

CB = CF + FB = 5см.

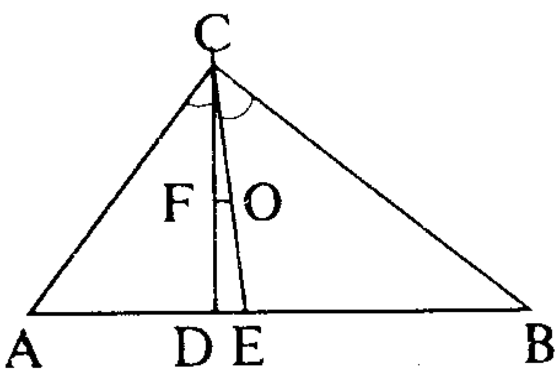
Ответ: 2,5см;   5см.

Задание №13.

Катеты прямоугольного треугольника равны 15см и 20см. Определить расстояние от центра вписанного круга до высоты, опущенной на гипотенузу.

Решение.

Центр вписанного круга O лежит на биссектрисе CE.



Расстояние от точки O до высоты CD равно длине OF перпендикуляра из точки O на CD. Длину OF найдём из подобия треугольников CFO и CDE: $\dfrac{OF}{DE} = \dfrac{CF}{CD}$.

Из этой пропорции видим, что для определения длины OF надо найти CD, CA, DE.

По теореме Пифагора $AB = \sqrt{AC^2 + CB^2}$, $AB = 25$ см.

Так как каждый катет есть среднее пропорциональное между гипотенузой и его проекцией на гипотенузу, то $AC^2 = AB \cdot AD$, откуда $AD = \dfrac{AC^2}{AB,}$ $AD = 9$ см.

Тогда $DB = 16$ см.

Определив отрезки, на которые высота CD делит гипотенузу, найдём высоту CD.

Известно, что высота, проведённая из вершины прямого угла на гипотенузу, есть среднее пропорциональное между проекциями катетов на гипотенузу. Поэтому $CD = \sqrt{AD \cdot DB} = 12$ см.

Так как FD равно расстоянию от точки O до стороны AB, то FD равно радиусу вписанного круга.

$$FD = r = \frac{S}{p} = \frac{\frac{1}{2} AC \cdot CB}{p}, \quad FD = 5 \text{ см.}$$

$CF = CD - FD = 7$ см.

Так как CE - биссектриса $\angle ACB$, то $\dfrac{AE}{BE} = \dfrac{AC}{CB}$, т. е. $\dfrac{AE}{BE} = \dfrac{3}{4}$.

$AE = \dfrac{3}{7} AB = \dfrac{7}{75}$ см. $DE = AE - AD = \dfrac{12}{7}$ см.

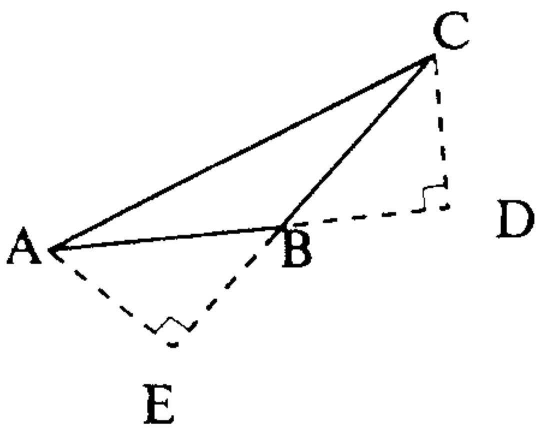
Теперь найдём: $OF = DE \cdot \dfrac{CF}{CD} = 1$ см.

Ответ: 1см.

Задание № 14.

В тупоугольном треугольнике большая сторона равна 16см, а высоты, проведённые из обоих её концов, отстоят от вершины тупого угла на 2см и 3см. Определить две другие стороны треугольника.

Решение.



Пусть $BD = 2$ см, а $BE = 3$ см. Обозначим длину стороны AB через x, а длину стороны CB через y. Тогда $\cos ABC = -\cos CBD = -\frac{2}{y}$,

или $\cos ABC = -\cos CBD = -\frac{3}{x}$.

Таким образом, получаем уравнение: $-\frac{2}{y} = -\frac{3}{x}$.

Откуда $2x = 3y, x = \frac{3}{2}y.$

Из прямоугольного треугольника $ACE : AE^2 = AC^2 - EC^2$.

Из прямоугольного треугольника $ABE; AE^2 = AB^2 - BE^2$.

В двух последних равенствах левые части равны, следовательно, равны и правые части.

Подставим: $AC = 16, EC = 3 + y, AB = \frac{3}{2}y, BE = 3$ и получим следующее уравнение:

$256 - (3 + y)^2 = \frac{9}{4}y^2 - 9$, или $13y^2 + 24y - 1024 = 0$. Решая это уравнение, получаем два корня, из которых годится только положительный корень $y = 8$.

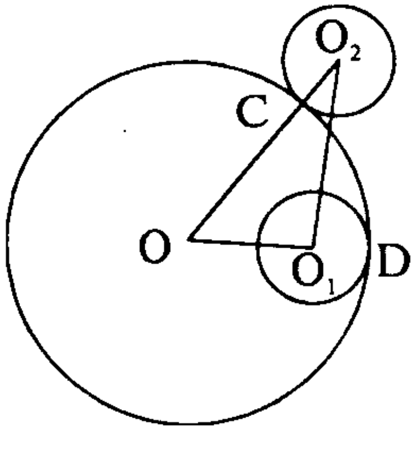
Тогда $x = \frac{3}{2}y = 12$.

Ответ: 8см и 12см.

Задание № 15

Круга радиуса R касаются два равных меньших круга радиуса r: один изнутри, другой извне, причём дуга между точками касания содержит 60˚. Определить расстояние между центрами меньших кругов.

Решение.



Рассмотрим треугольник OO_1O_2.

$OO_2 = R + r, OO_1 = R - r$. $\angle O_2OO_1 = 60°$ как центральный угол, опирающийся на дугу $CD = 60°$.

По теореме косинусов $O_1O_2^{\,2} = (OO_2)^2 + (OO_1)^2 - 2OO_2 \cdot OO_1 \cdot \cos\angle O_2OO_1$ или

$$(O_1O_2)^2 = (R+r)^2 + (R-r)^2 - 2(R-r)\cdot\frac{R+r}{2}.$$ Откуда $O_1O_2 = \sqrt{R^2+3r^2}$.

Ответ: $\sqrt{R^2+3r^2}$.

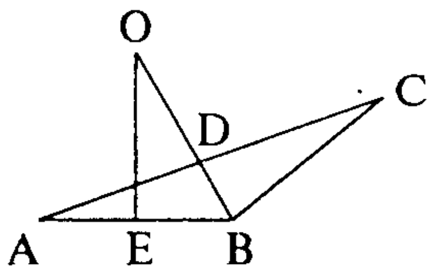
Задание №16.

Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 2см; угол при вершине равен 120°. Определить диаметр описанной окружности.

Решение

Радиус описанного круга можно найти по формуле $R = \dfrac{abc}{4S}$.

Можно решить задачу по-другому. Центр описанной окружности - точка О-лежит на пересечении перпендикуляров *OE* и *OB,* проведенных через середины сторон *AB* и *AC.*



В равнобедренном треугольнике *ABC* высота *BD* к его основанию *AC* является биссектрисой $\angle ABC$, поэтому $\angle ABD = \angle DBC$. Прямоугольные треугольники *BEO* и *BDC* подобны, так как имеют равные острые углы *EBD* и *DBC.*

Из подобия этих треугольников

$\dfrac{OB}{BE} = \dfrac{BC}{BD}$, откуда $R = OB = BE\cdot\dfrac{BC}{BD}$.

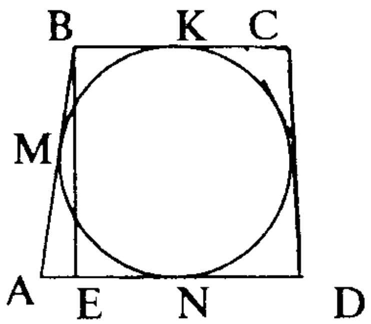
BE=1см, $BD = \dfrac{1}{2}$, $BC =$ 1 см, как катет, лежащий против $\angle BCD = 30°$.

Подсчитав, получим R = 2 см.

Ответ: 4 см.

Задание № 17.

Около круга описана равнобедренная трапеция с углом 30˚. Средняя линия её равна 1м. Определить площадь трапеции.



Решение.

Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту трапеции или произведению средней линии на высоту. Поэтому $S = \dfrac{BC+AD}{2}\cdot BE$.

По свойству касательных, проведённых к окружности из точки, лежащей вне окружности, $AN = AM, BK = BM$.

$$AB = AM + MB = AN + BK = \frac{1}{2}AD + \frac{1}{2}BC = 1\text{м}.$$

Так как по условию $\angle BAN = 30°$, то $BE = \frac{1}{2}AB = 0{,}5$м.

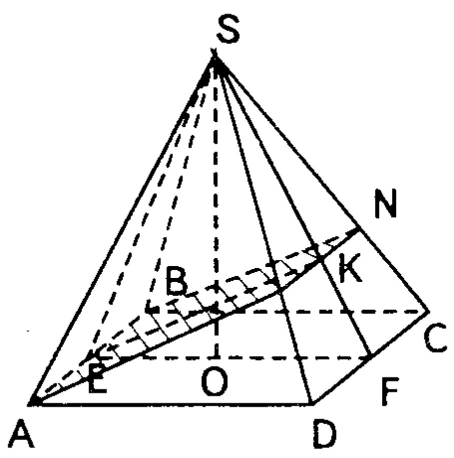
$S = 1 \cdot 0{,}5 = 0{,}5 м^2$.

Ответ: 0,5м^2.

Задание № 18.

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ проведена плоскость через сторону основания AB перпендикулярно к противолежащей боковой грани. Сторона основания равна 30см, а высота пирамиды равна 20см. Определить площадь полученного сечения.

Решение.



Плоскость *ESF* перпендикулярна грани SDC, так как грань SDC проходит через перпендикуляр *CD* к плоскости *ESF* (*CD* $\perp$плоскости *ESF*, так как $CD \perp EF$ $CD \perp SF$).

Из точки *E* плоскости *ESF* опустим перпендикуляр на плоскость *SDC*. В силу перпендикулярности плоскостей *ESF* и *SDC* этот перпендикуляр весь лежит в плоскости *ESF*.

В треугольнике *ESF* проведём $EK \perp SF$. Это и будет перпендикуляр из *E* к плоскости SDC.

Плоскость, которая проходит через перпендикуляр *EK* к грани SDC, будет перпендикулярна к этой грани. Поэтому плоскость сечения – это плоскость, которая проходит через *AB* и *EK*.

Плоскость SDC пересечёт плоскость сечения по прямой, параллельной *CD*, так как *CD* параллельна *AB*, а значит, и плоскости сечения.

Проводим через точку *K* прямую $MN \parallel CD$. Трапеция $ABMN$ есть сечение, проведённое через AB перпендикулярно грани *SDC*.

Площадь этого сечения

$$S_{ABMN} = \frac{1}{2}(AB + MN) \cdot EK.$$

EK найдём из подобия треугольников *SOF* и *EKF*.

$\frac{EF}{SF} = \frac{EK}{SO} \Rightarrow EK = SO \cdot \frac{EF}{SF} = 20 \cdot \frac{30}{25} = 24$ см, так как из треугольника *SOF*

$SF = \sqrt{SO^2 + OF^2} = \sqrt{400 + 225} = 25$ см.

Из треугольника *SEK:*

$SK = \sqrt{SE^2 - EK^2} = \sqrt{25^2 - 24^2} = 7$ см.

MN найдём из подобия треугольников *SDC* и *SMN*:

$$\frac{MN}{DC} = \frac{SK}{SF} \Rightarrow MN = DC \cdot \frac{SK}{SF} = 30 \cdot \frac{7}{25} = \frac{42}{5} = 8{,}4 \text{ см}.$$

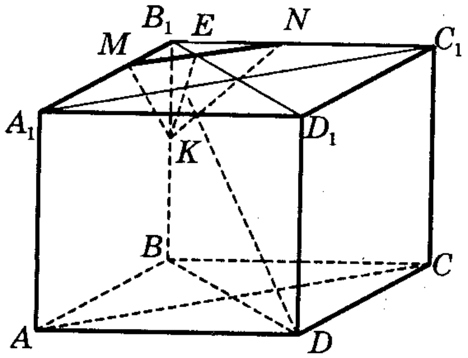
Тогда $S_{ABMN} = \frac{1}{2}(30 + 8{,}4) \cdot 24 = 460{,}8$ см^2.

Ответ: 460,8см^2.

Задание № 19.

Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно $2\sqrt{3}$. Найдите расстояние от вершины D до плоскости, проходящей через середины рёбер $A_1B_2, B_1C_1, BB_{1.}$

Решение.



Пусть M, N и K – середины рёбер A_1B_1, B_1C_1 и BB_1 соответственно. Так как $MN \parallel A_1C_1$, а прямая A_1C_1 перпендикулярна плоскости B_1BD, значит, плоскости MKN и B_1BD перпендикулярны. Следовательно, расстояние от точки D до плоскости MKN равно расстоянию h от точки D до прямой EK, где E – точка пересечения прямых MN и B_1D_1.

$$S_{DKE} = S_{BB_1D_1D} - S_{BKD} - S_{KB_1E} - S_{ED_1D} = \frac{15\sqrt{2}}{4}.$$

Из треугольника KB_1E найдём: $KE = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, тогда

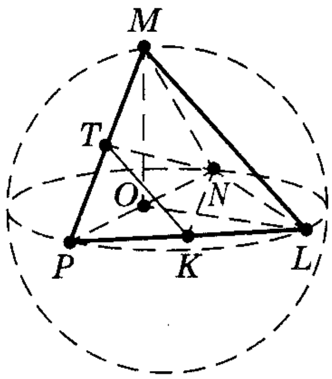
$\frac{15\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot h$, откуда искомое расстояние равно 5.

Ответ: 5.

Задание № 20.

Отрезок PN - диаметр сферы, $PN = 4\sqrt{3}$. Точки M и L лежат на сфере так, что объём пирамиды $PNML$ наибольший. Найдите площадь треугольника TNK, где T и K – середины рёбер PM и PL соответственно.

Решение.



1) Пусть R – радиус сферы и O – её центр.

Поскольку диаметр $PN = 2R = 4\sqrt{3}$, то $R = 2\sqrt{3}$. Точки M и N лежат на сфере, поэтому $OP = PL = ON = OM = 2\sqrt{3}$. и сечения сферы плоскостями PLN и PMN - окружности радиуса $R = 2\sqrt{3}$, описанные вокруг треугольников PLN и PMN. Значит, $\angle PLN = \angle PMN = 90°$, как вписанные углы, опирающиеся на диаметр PN.

2)Объём пирамиды $PNML$ равен: $V_{PNML} = \frac{1}{3} S_{PNL} \cdot H$, где S_{PNL} - площадь треугольника PLN, а H – высота пирамиды, равная расстоянию от точки M до плоскости PLN. Обозначим через h высоту треугольника PLN. Так как точка M лежит на сфере, а плоскость PLN содержит центр сферы, то высота пирамиды $H \leq R$, причём $H=R$, если $MO \perp PN$. Аналогично, так как точка L лежит на сфере, и $h=R$, если $LO \perp PN$. Рассмотрим объём пирамиды:

$$V_{PNML}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot PN\cdot h\cdot H\le\frac{1}{6}\cdot 2R\cdot R\cdot R=\frac{R^3}{3}.$$

Таким образом, пирамида *PNML* имеет наибольший объём, если треугольники *PLN* и *PMN* - прямоугольные и равнобедренные.

1) Треугольники *PLN* и *PMN* - прямоугольные, равнобедренные и имеют общую гипотенузу. Значит, они равны и их медианы *NT* и *NK* тоже равны. Треугольники LOP, LOM, POM равны по двум катетам. Поэтому треугольник LMP - правильный со стороной $PL=OP\sqrt{2}=2\sqrt{6}$. Отрезок TK – средняя линия треугольника LMP. Поэтому :

$$TK=0{,}5LM=\frac{R\sqrt{2}}{2},\qquad NK=NT=\sqrt{NL^2+KL^2}=R\sqrt{\frac{5}{2}}.$$

4) Треугольник TNK – равнобедренный , его высоту h из вершины N найдём по теореме Пифагора: $h=\sqrt{NK^2-(0{,}5TK)^2}=R\sqrt{2}$.

Искомую площадь треугольника TNK вычислим по формуле:

$$S=0{,}5h\cdot TK=\frac{R^2}{2}=6.$$

Ответ: 6.

<u>Следующие задачи решите самостоятельно.</u>

1. В прямоугольной трапеции основания равны 17см и 25см, а большая боковая сторона равна 10см. Из середины этой стороны проведён перпендикуляр к ней до пересечения с продолжением другой боковой стороны. Определить длину этого перпендикуляра. Ответ: 35см.
2. В треугольнике ABC известны его углы A, B, C. Определить угол между медианой и высотой, проведёнными из вершины угла B.Ответ: $\cos\gamma=\dfrac{2\sin A\cdot\sin C}{\sqrt{2\sin^2 A+2\sin^2 C-\sin^2 B}}$.
3. Основания AB и CD трапеции ABCD равны соответственно 5 и 10 , AD = 3, BC = 7. Биссектрисы углов A и D пересекаются в точке K, биссектрисы углов B и C – в точке M. Найдите KM. Ответ: 2,5.
4. Окружность с центром O касается сторон угла B в точках A и C. Отрезок BO пересекает окружность в точке K. Найдите периметр четырёхугольника AKCO, если $\angle B=60°$, BK = 12. Ответ: 48.
5. Окружность с центром O, вписанная в равнобедренный треугольник ABC, касается его боковой стороны AB в точке T, OT= 10, AT : BT = 8 : 5. Найдите основание BC треугольника. Ответ: 30.
6. В ромб вписана окружность. Точка касания окружности и стороны ромба делит сторону в отношении 1:5. Площадь ромба равна $60\sqrt{5}$. Найдите радиус окружности. Ответ: 5.
7. Основание равнобедренного остроугольного треугольника равно 48, а радиус описанной около него окружности равен 25. Найдите расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей. Ответ: 5.
8. В правильной четырёхугольной усечённой пирамиде стороны оснований равны 6см и 8см, а боковое ребро – 10см . Провести сечение через конец диагонали

меньшего основания перпендикулярно к этой диагонали и определить его площадь. Ответ: $14см^2$.

9. Каждое ребро четырёхугольной пирамиды MABCD равно $\sqrt{11}$. Найдите расстояние между прямой AD и прямой, проходящей через середину ребра BM параллельно прямой BC. Ответ: 2,75.
10. В шар радиуса 5см вписана правильная четырёхугольная пирамида, при этом её основание оказалось вписанным в круг радиуса 3см. Высота пирамиды больше радиуса шара. Определите объём пирамиды. Ответ: $54см^3$.

Список литературы.

1. С. М. Никольский. Алгебра и начала анализа. 10 и 11 классы. Москва, «Просвещение», 2001г.
2. М. Л. Галицкий и др. Углублённое изучение курса алгебры и математического анализа. Москва, «Просвещение» 1990г.
3. А. Н. Рурукин. Пособие для интенсивной подготовки к экзамену по математике.
4. М. А. Галицкий, М. М. Мошкович. Углублённое изучение курса алгебры и математического анализа. Москва «Просвещение» 1990г.
5. Ю. А. Глазков, И. К. Варшавский. Сборник заданий и методических рекомендаций. Математика. Москва «Экзамен» 2007г.
6. Л. О, Денищева и др. Единый государственный экзамен 2007. «Интеллект-центр» 2007.
7. А. Г. Клово. Математика ЕГЭ -2007. Москва.