МАОУ СОШ №67 г. Томска

Ягницина В.А. — учитель математики

МБОУ СОШ № 86 г. Северск

Ягницина Е.А. — учитель математики

**АВТОРСКИЙ ПОДХОД ИЗУЧЕНИЯ   
ЗНАЧЕНИЙ СИНУСА, КОСИНУСА, ТАНГЕНСА   
И КОТАНГЕНСА УГЛОВ   
ПО ЕДИНИЧНОЙ ОКРУЖНОСТИ**

г. Томск – 2013 г.

**ТЕХНОЛОГИЯ ПОСТРОЕНИЯ И ИЗУЧЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ ОКРУЖНОСТИ**

1. **ЧИСЛОВАЯ ОКРУЖНОСТЬ НА КООРДИНАТНОЙ ПЛОСКОСТИ**

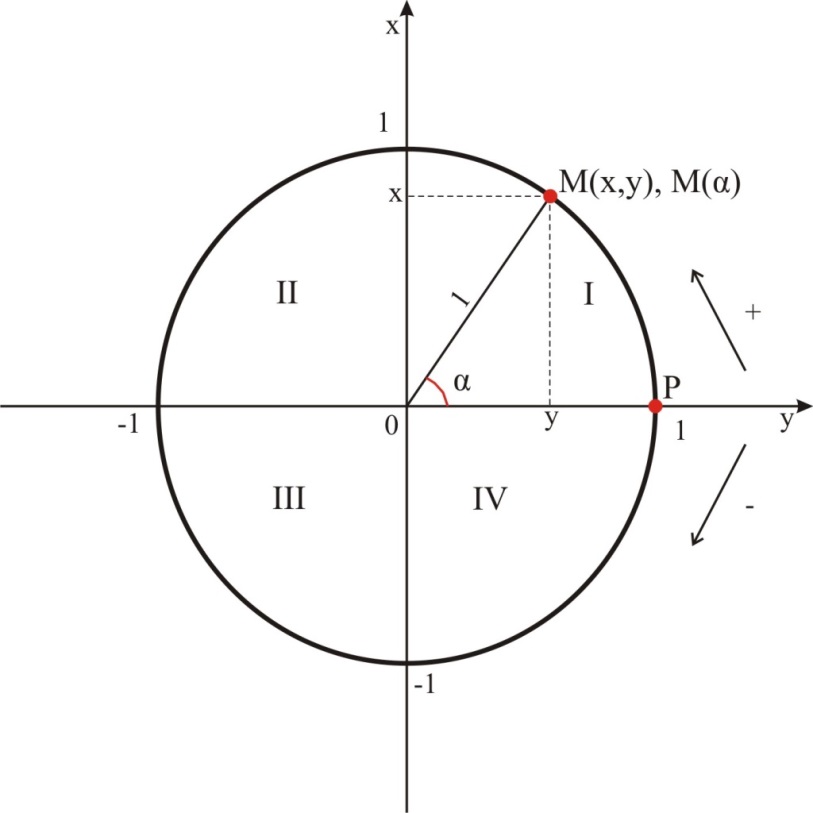


Рисунок 1.

Р(1;0); ОР – начальный радиус, R=1

1. Распределить градусную меру по окружности.

Для этого надо: Разделить радиусы окружности пополам и, приложив линейку к этим точкам параллельно осям, сделать засечки по окружности.

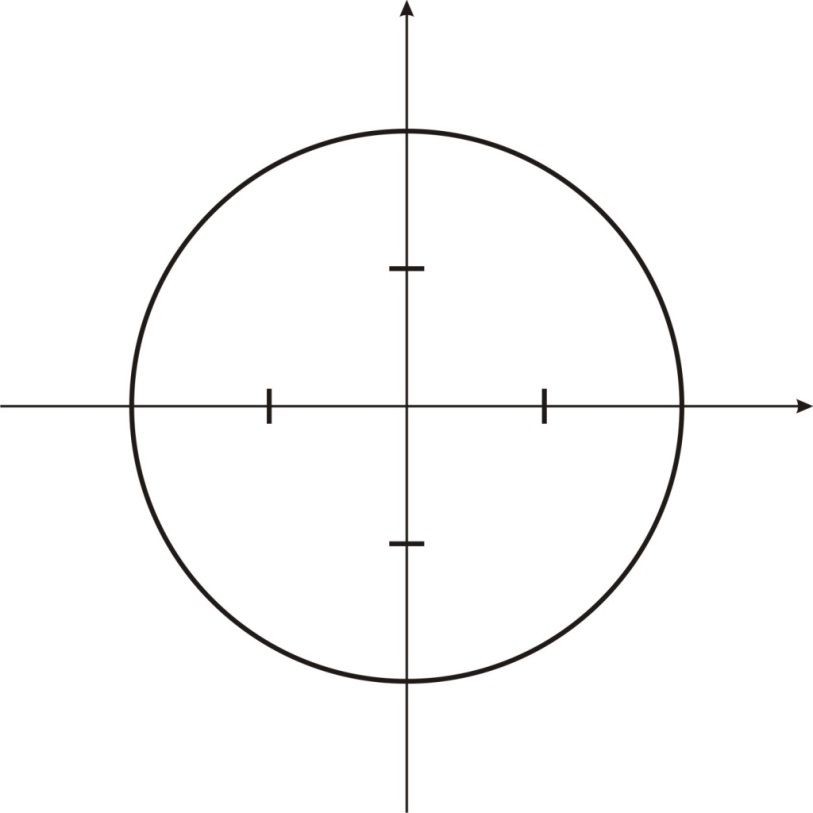


Рисунок 2а.

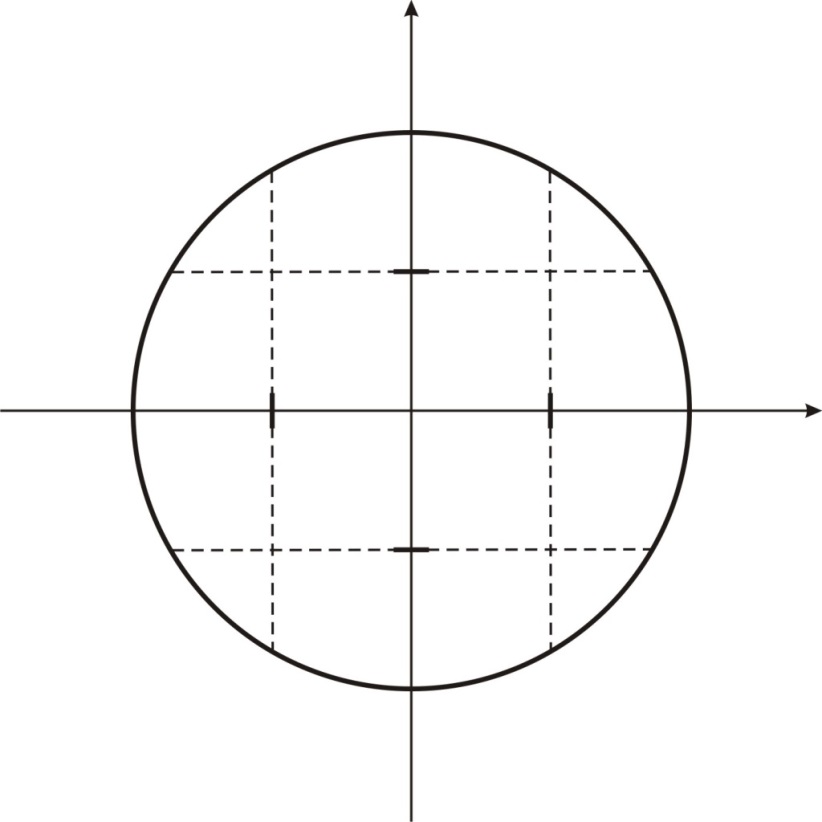


Рисунок 2б.

Далее среднюю дугу в каждой четверти разделить пополам (на глаз). Подписать градусы около получившихся точек (на внешней стороне круга).

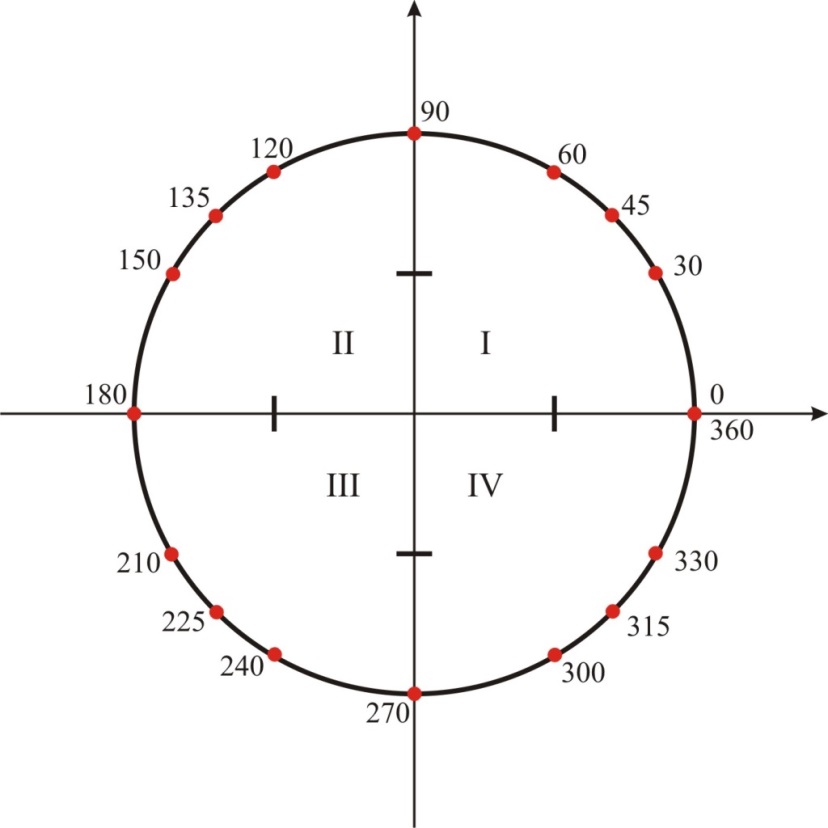


Рисунок 3.

Условимся называть точки в четвертях по уровню расположения:

* верхняя точка (в.т.)
* средняя точка (с.т.)
* нижняя точка (н.т.)

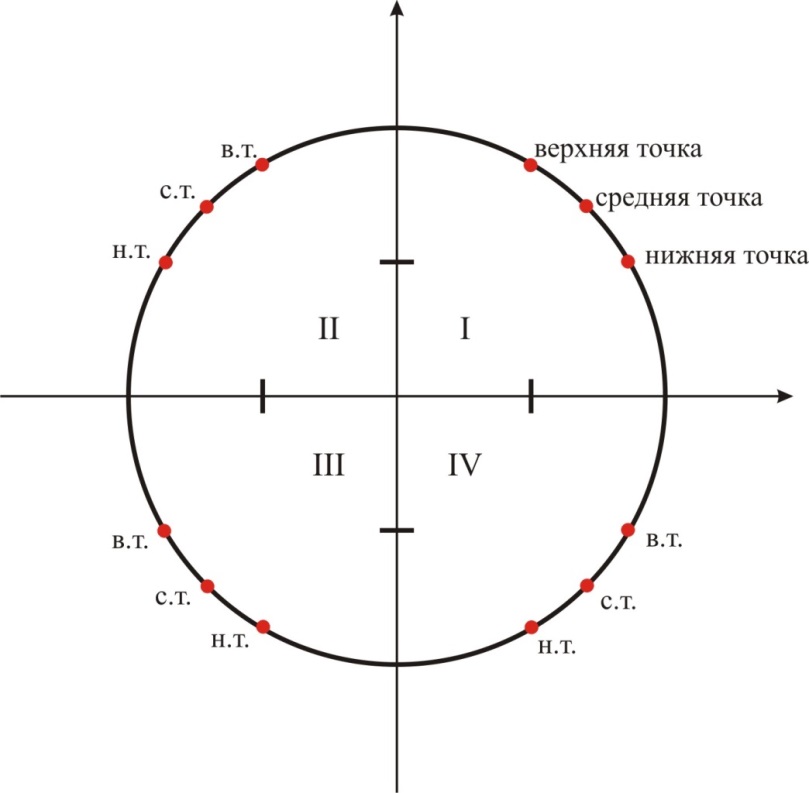


Рисунок 4.

Подобное название точек по четвертям облегчит нам работу в дальнейшем при закреплении.

1. Для закрепления можно задать вопросы:

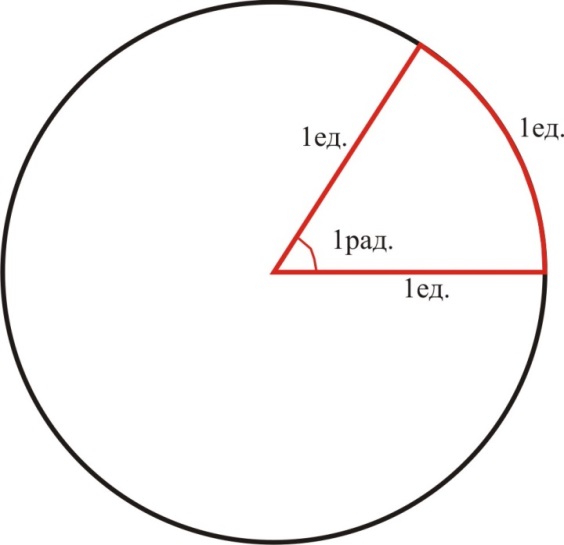
* Назовите градусную меру углов расположенных в III (I, II, IV) четверти.
* Вопрос – ответ:

II четверть, нижняя точка (ответ: 150°)

III четверть, средняя точка (ответ: 225°) и т.д.

* Назовите положение точки на окружности, соответствующий 120°; 315°; 240°; 180°; 45°; 270°и т.д.

1. **РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РАДИАННОЙ МЕРЫ УГЛОВЫХ ВЕЛИЧИН.**
2. Угол в 1 радиан есть центральный угол, опирающийся на такую дугу окружности, длина которой равна радиусу этой окружности.



Длина С окружности радиуса R вычисляется по формуле . Если R=1, то С=2. – это полный оборот точки Р. Тогда длина половины окружности равна , длина четверти окружности равна ; таким образом получим радианную меру углов в точках пересечения окружности с осями:

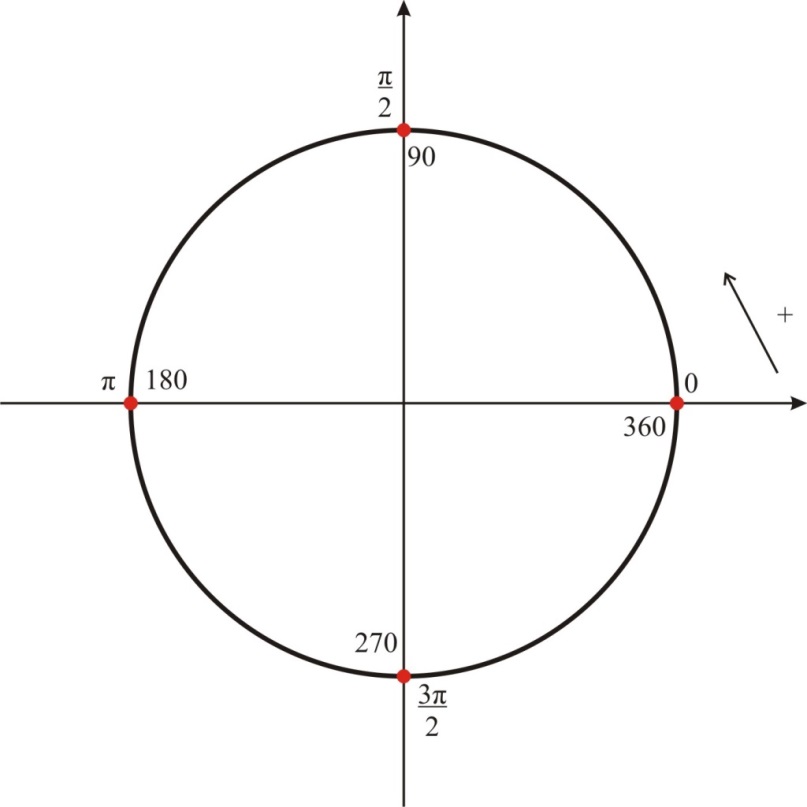


Рисунок 5.

1. Далее распределим радианную меру углов для оставшихся точек окружности, сначала только для углов 1 четверти:

180°:30°=3 т.е. углу в 60° соответствует радиан.

180°:30°=6 т.е. углу в 30° соответствует радиан.

180°:45°=6 т.е. углу в 45° соответствует радиан.



Рисунок 6.

Чтобы получить радианную меру в остальных четвертях воспользуемся циркулем: измерим длину дуги соответствующей точке и не изменяя раствора циркуля «прошагаем» по окружности, отмечая получившиеся точки и подписывая их, проговаривая количество «шагов».

Один раз деленное на 3 — ,

Два раза деленное на 3 — ,

Три раза деленное на 3 — , сокращаем и получаем точку

Четыре раза деленное на 3 — ,

Пять раз деленное на 3 — ,

Шесть раз деленное на 3 — , сокращаем и получаем точку 2

Аналогично поступаем с точками и , обязательно проговаривая вслух количество пройденных шагов (дуг).

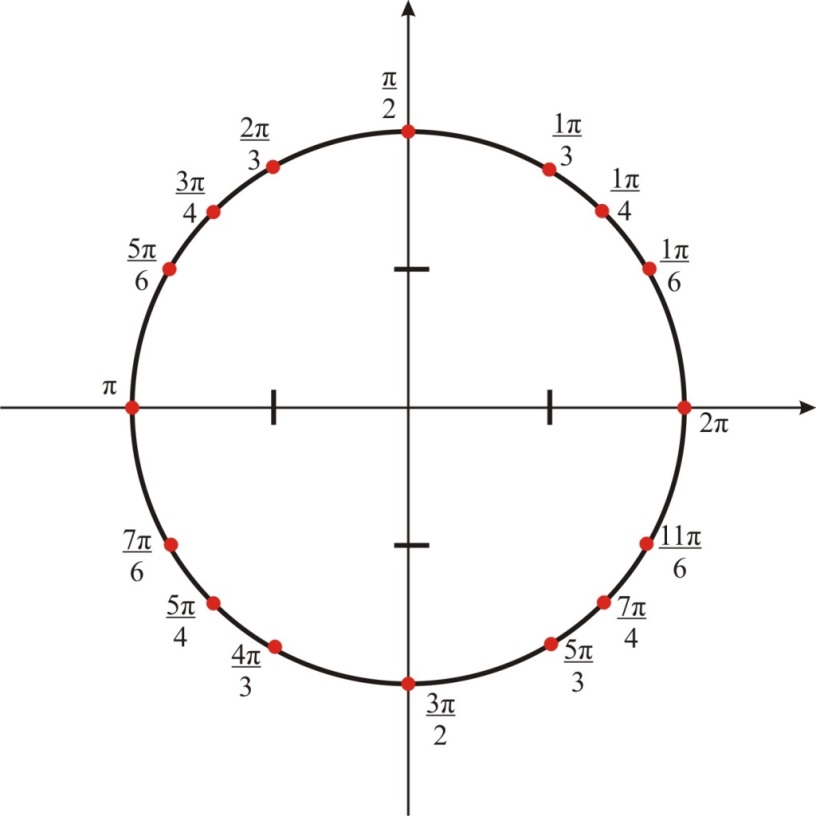


Рисунок 7.

Таким образом, без вычислений, наглядно и понятно мы распределим радианную меру углов на всей окружности.

Как бы легко и просто это не было, окружность получилась, загружена надписями.

1. Для облегчения запоминания радианной меры угла надо окружность «разъединить» на три окружности и показать «прием» запоминания.

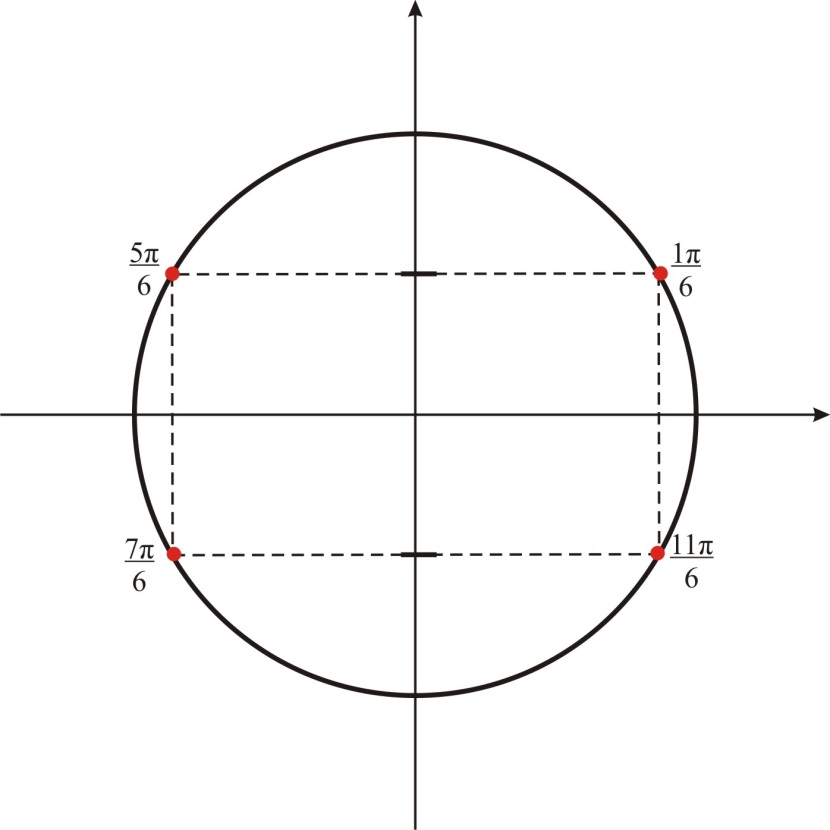


Рисунок 8а.

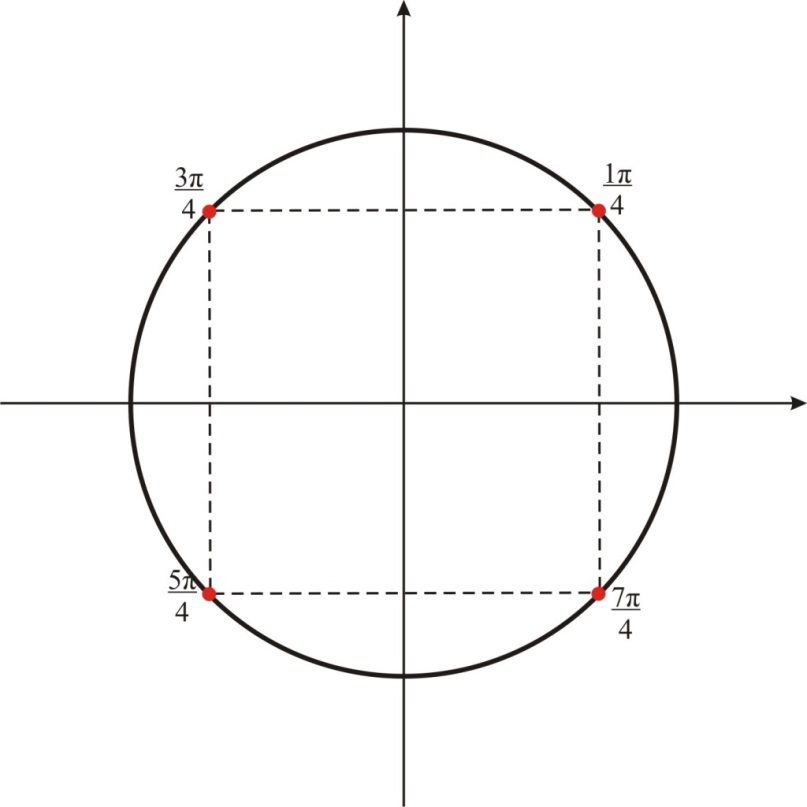


Рисунок 8б.

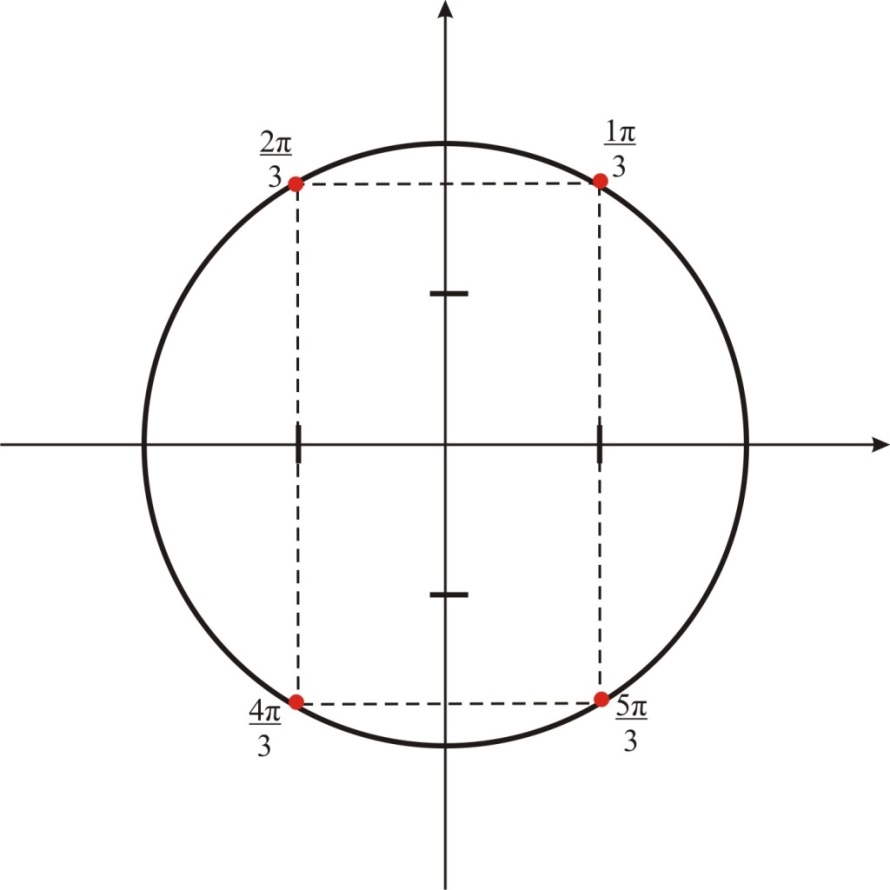


Рисунок 8в.

В первых четвертях выделить и подписать радианную меру угла для трех точек, отталкиваясь от этой точки построить прямоугольники ,проводя стороны параллельно осям в каждой окружности. Получим три прямоугольника:

Рисунок 8а — узкий горизонтальный (лежачий)

Рисунок 8б — квадрат

Рисунок 8в — узкий вертикальный (стоячий)

И из окружности на рисунке 7 выписать радианные меры углов около вершин четырехугольников. По рисункам видно: каков знаменатель дроби в первой четверти, такие же знаменатели и по вершинам соответствующего четырехугольника.

Под каждой окружностью построим систему координат и выпишем только числители дробей и придумаем как их запоминать.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
| числители для знаменателя 6  числа 1, 5, 7, 11 | числители для знаменателя 4  числа 1, 3, 5, 7 — нечетные числа | числители для знаменателя 3  числа 1, 2 — «плохие оценки»,  4, 5— «хорошие оценки» |

1. Вопросы на закрепление:
2. Вопрос—ответ

II четверть, «нижняя точка» (ответ: )

IV четверть, «верхняя точка» (ответ: )

III четверть, «нижняя точка» (ответ: ) и т.д.

1. Во II четверти назвать «верхнюю точку» («нижнюю точку» или «среднюю точку»).

Этой работе уделять особое внимание.

1. Предложить учащимся в тетрадях самостоятельно построить окружность, отметить на ней все точки и подписать градусную и радианную меры при движении точки Р(1;0) в отрицательном направлении.

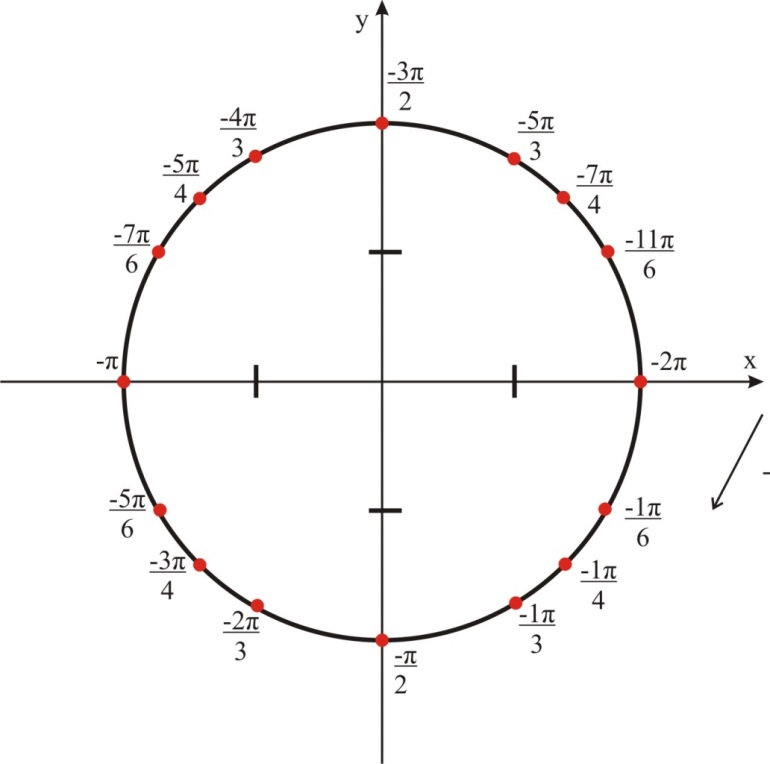


Рисунок 9.

1. «Разместим» на единичной окружности числовую прямую, (единичный отрезок должен быть равен радиусу окружности) для этого «наматываем» числовую прямую на окружности подписываем числа (Рисунки 10а и 10б).

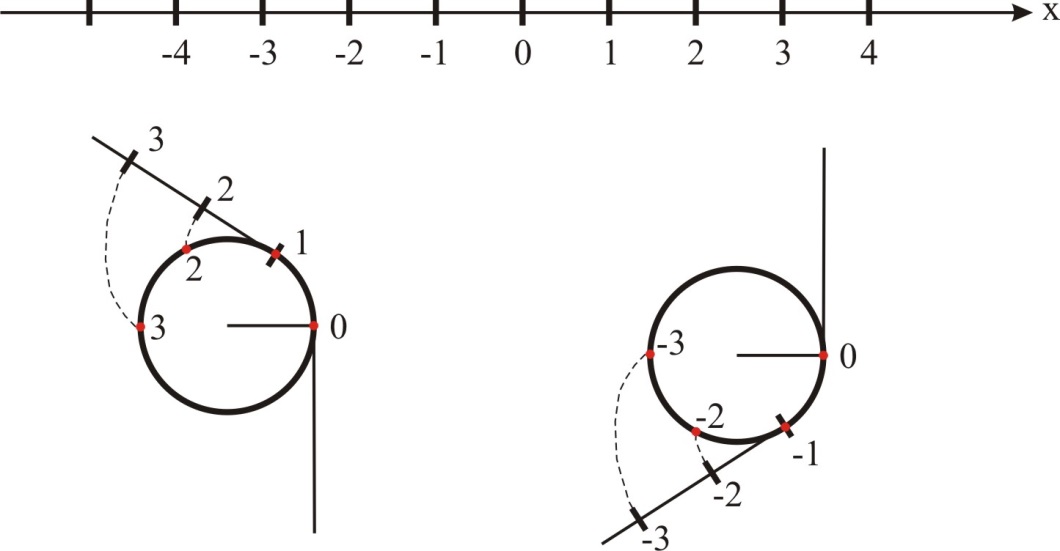


Рисунок 10а.

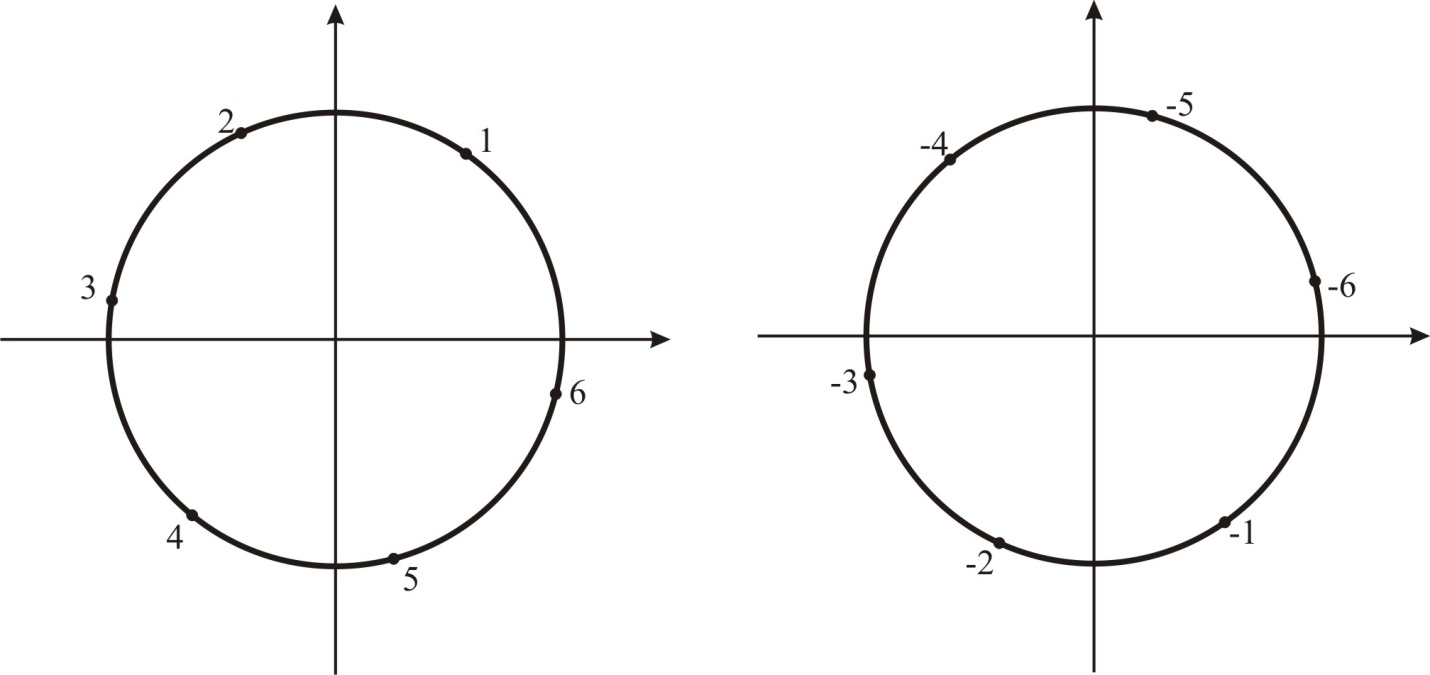


Рисунок 10б.

1. **ОПРЕДЕЛЕНИЕ СИНУСА И КОСИНУСА.**
2. Если точка М числовой окружности соответствует числу t,то абсциссу точки М называют косинусом числа t и обозначают cos t, а ординату точки М называют синусом числа t и обозначают sin t.

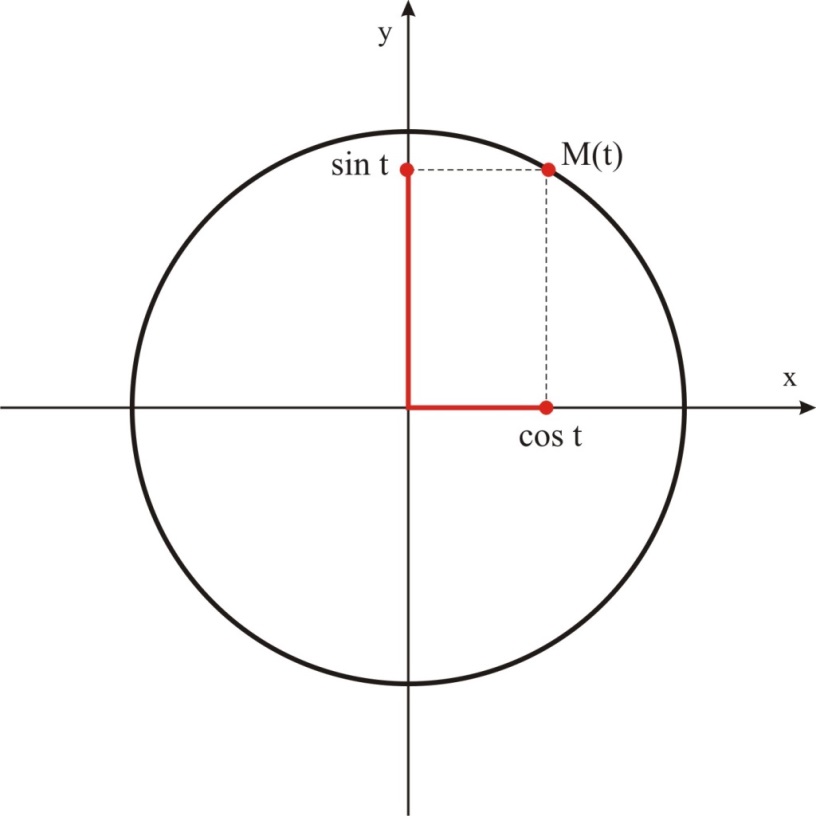


Рисунок 11.

если M(t) = M(x,y)

x = cos t

y = sin t

1. Следовательно, для нахождения синуса и косинуса всех точек окружности надо опустить перпендикуляры из каждой точки окружности на оси *y* и *x* (соответственно).

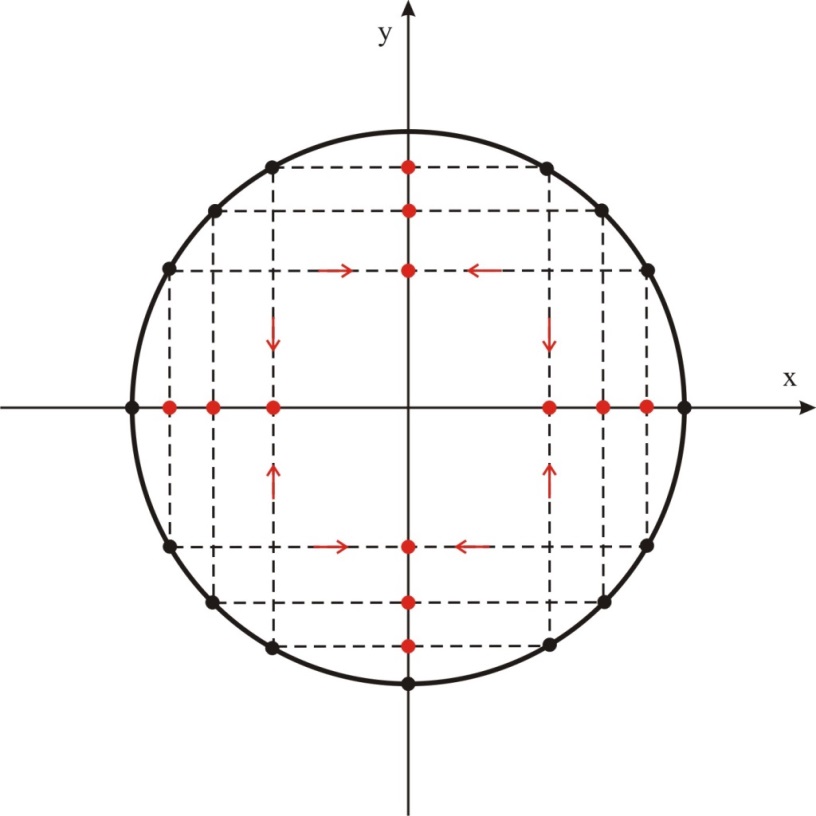


Рисунок 12.

и поярче выделим точки пересечения с осями координат.

1. Отступим от строгой математики и вспомним детскую считалочку «до трех»:

Мы по городу идем

Раз, два, три,

Дружно песенку поем

Раз, два, три. и т.д.

так мы пронумеруем на каждой оси точки, двигаясь от центра к концам радиуса: 1, 2, 3:

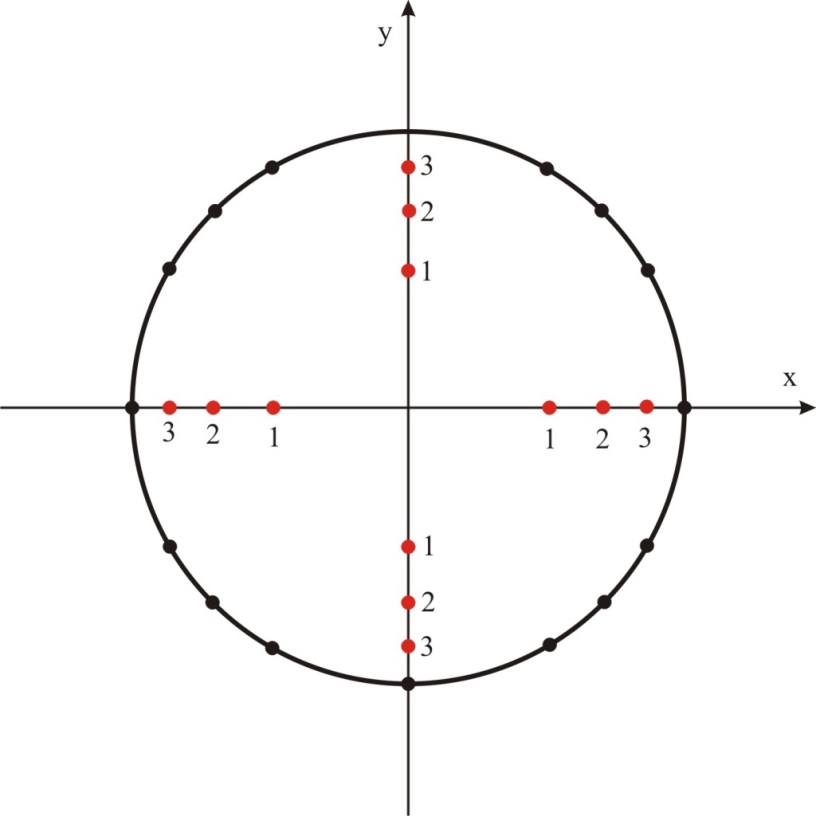


Рисунок 13.

**Важно!** разобрать с классом под каким номером 1, 2 или 3 проектируются на оси Х или Y каждая точка окружности. В этом заключен залог успеха в будущих ответах для значений синуса и косинуса углов.

Вопрос: под каким номером спроектирована на оси Х (или Y) ; ; ; ; …?

Далее продолжим «игру» и каждый номер точки «спрячем» под знак , , , т.к. =1, то над номером 1 можно не писать знак корня.

Для получения ответов синуса и косинуса, осталось только подписать знаменатель «2» к данным корням, получим: , , , для x<0 и y<0 перед дробями поставить знак минус «-».

Итак, в полученных дробях меняется только числитель, а это и есть номер точки под которым данный угол спроектирован на оси х (или y).

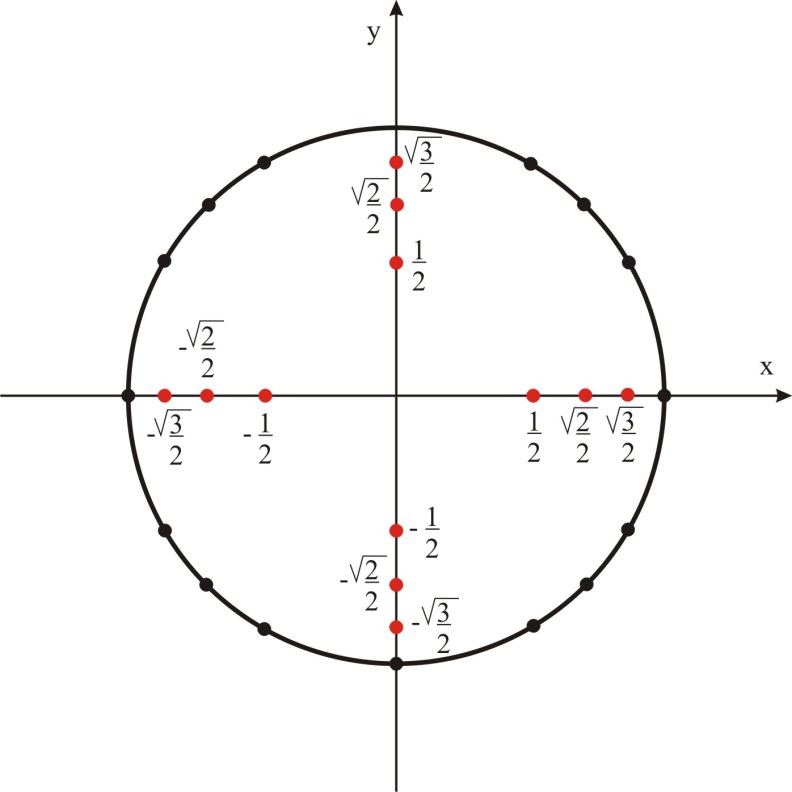


Рисунок 14.

Необходимо провести тренинг:

Не глядя на окружность назвать значения sin 30; sin 150; sin 240 …, cos 210, cos 33 и т.д.

Уделить особое внимание углам 90°, 180°, 270°, 360°

1. **ЗНАЧЕНИЕ ТАНГЕНСА И КОТАНГЕНСА.**
2. Строим на окружности ось тангенсов; проведем через точку Р(1;0) прямую параллельную оси ординат. В окружности проведем радиус-векторы и продолжаем их до пересечения с осью тангенсов.

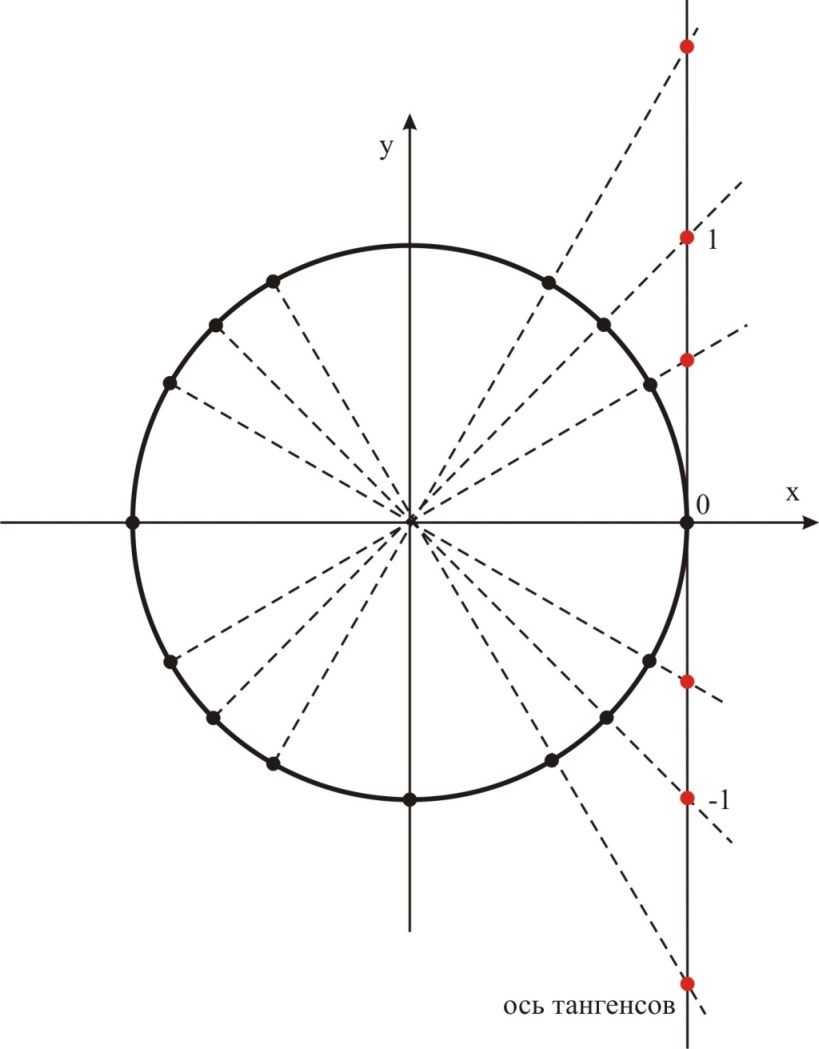


Рисунок 15.

1. Получим 7 точек, три из которых подписываем сразу же, это: ±1, 0

Тем самым мы получили значения для tg 45 = tg 225 = 1 и tg 135 = tg 315 = -1, tg 0 = tg 180 = 0.

1. Для получения остальных значений воспользуемся формулой

tg α =

tg 30 = = : =

tg 60 = = : =

tg 120 = = : = -

tg 150 = = : = -

Таким образом, мы подписали все значения на оси тангенсов.

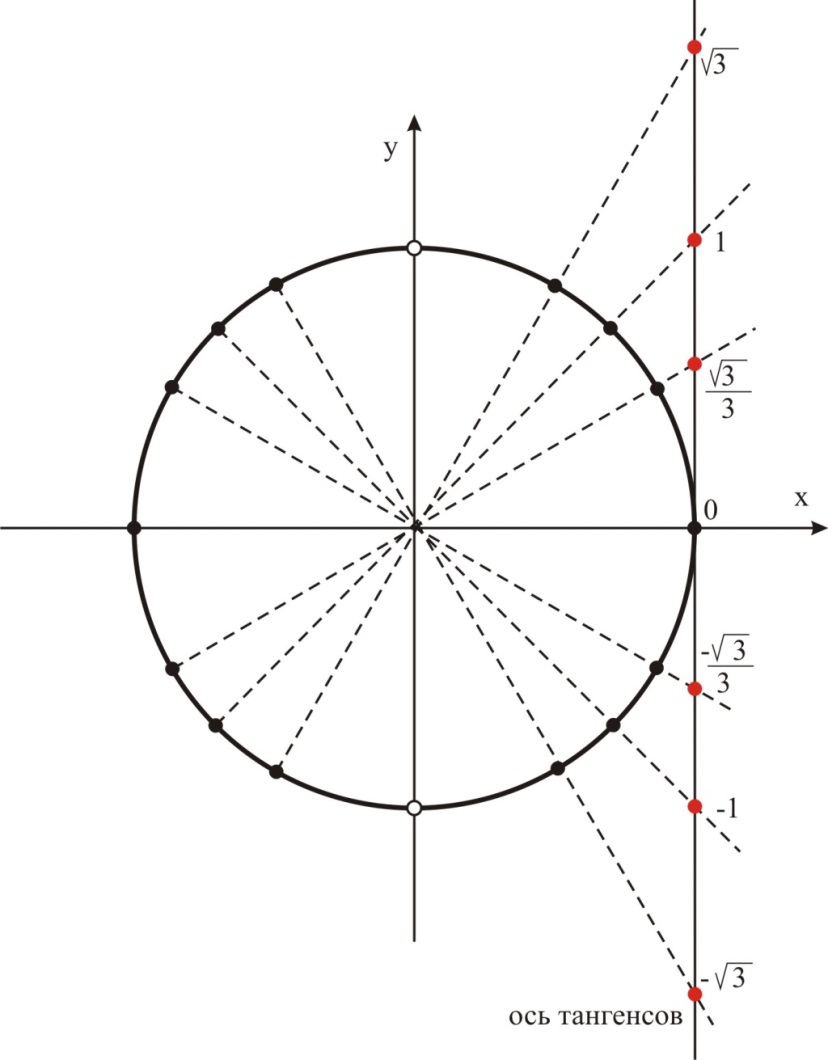


Рисунок 16.

1. Через точку окружности (1;0) проводим прямую параллельную оси абсцисс и продолжаем все радиус-векторы до пересечения с ней. Мы получили ось котангенсов. Аналогично расставляем на ней значения котангенса для всех углов от 0° до 360°, считая по формуле ctg α =

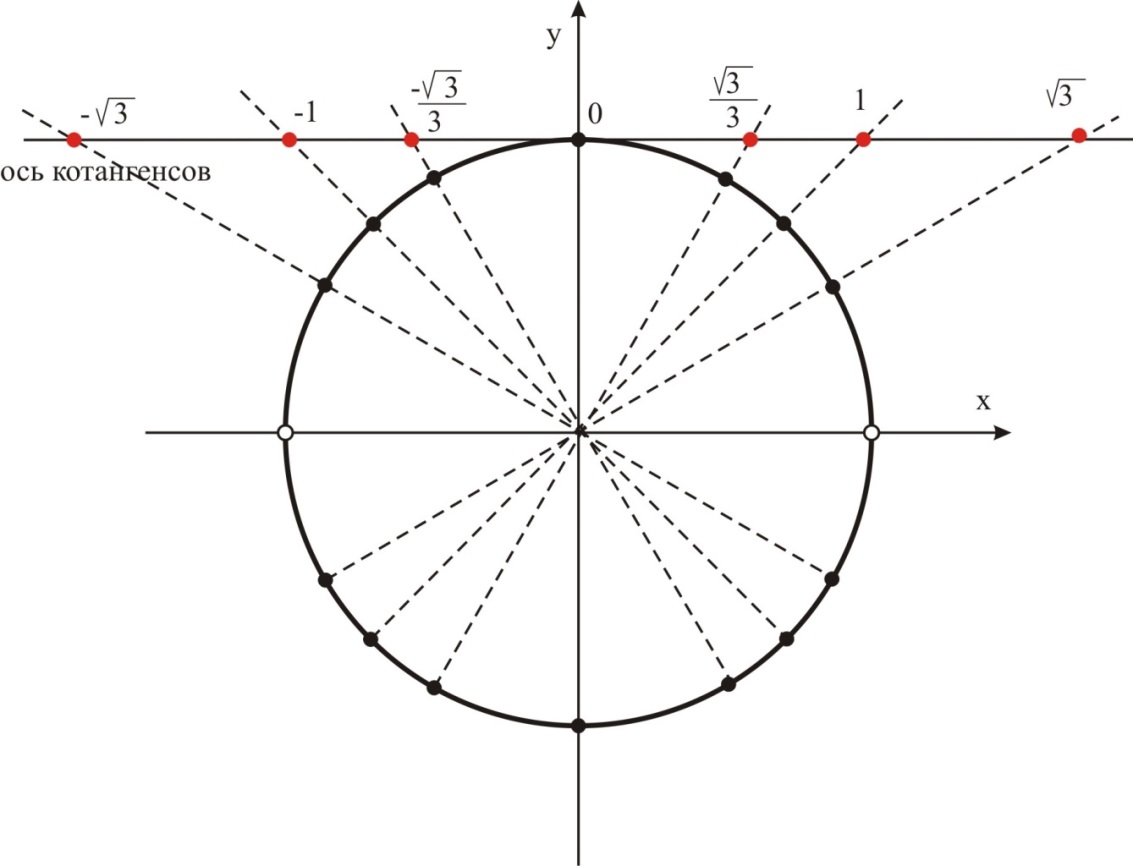


Рисунок 17.

1. После построения оси тангенсов и оси котангенсов обязательно провести тренинг по нахождению соответствующих значений углов.
2. В результате проделанной работы мы получили числовую окружность (см. рисунок 18.) Она получилась очень загруженной, но так как каждая точка и каждое число были построены и подписаны самим учеником, то окружность не вызывает страха.

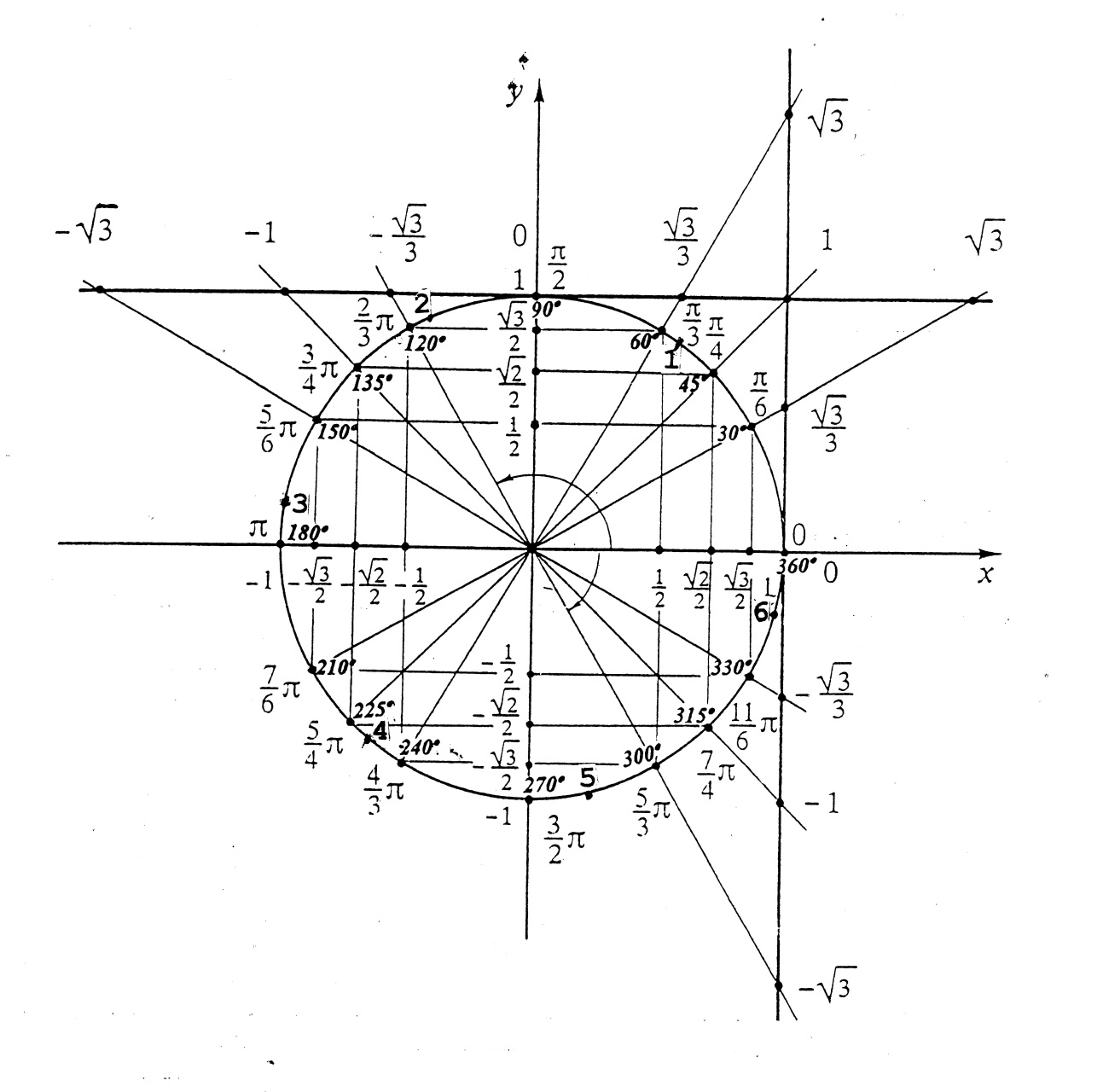


Рисунок 18.

1. **ЧТО ДАЕТ ПОДОБНАЯ ТЕХНОЛОГИЯ ПОСТРОЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ ОКРУЖНОСТИ?**
2. Не надо заучивать таблицу значений тригонометрической функции от 0° до 360°, это сложная работа все равно забудется.
3. Используя подобный подход для изучения тригонометрической окружности, ученик на любой контрольной работе или экзамене сможет быстро нарисовать её, не подписывая никаких чисел, воображение и память помогут вспомнить значение каждой точки на осях и окружности.

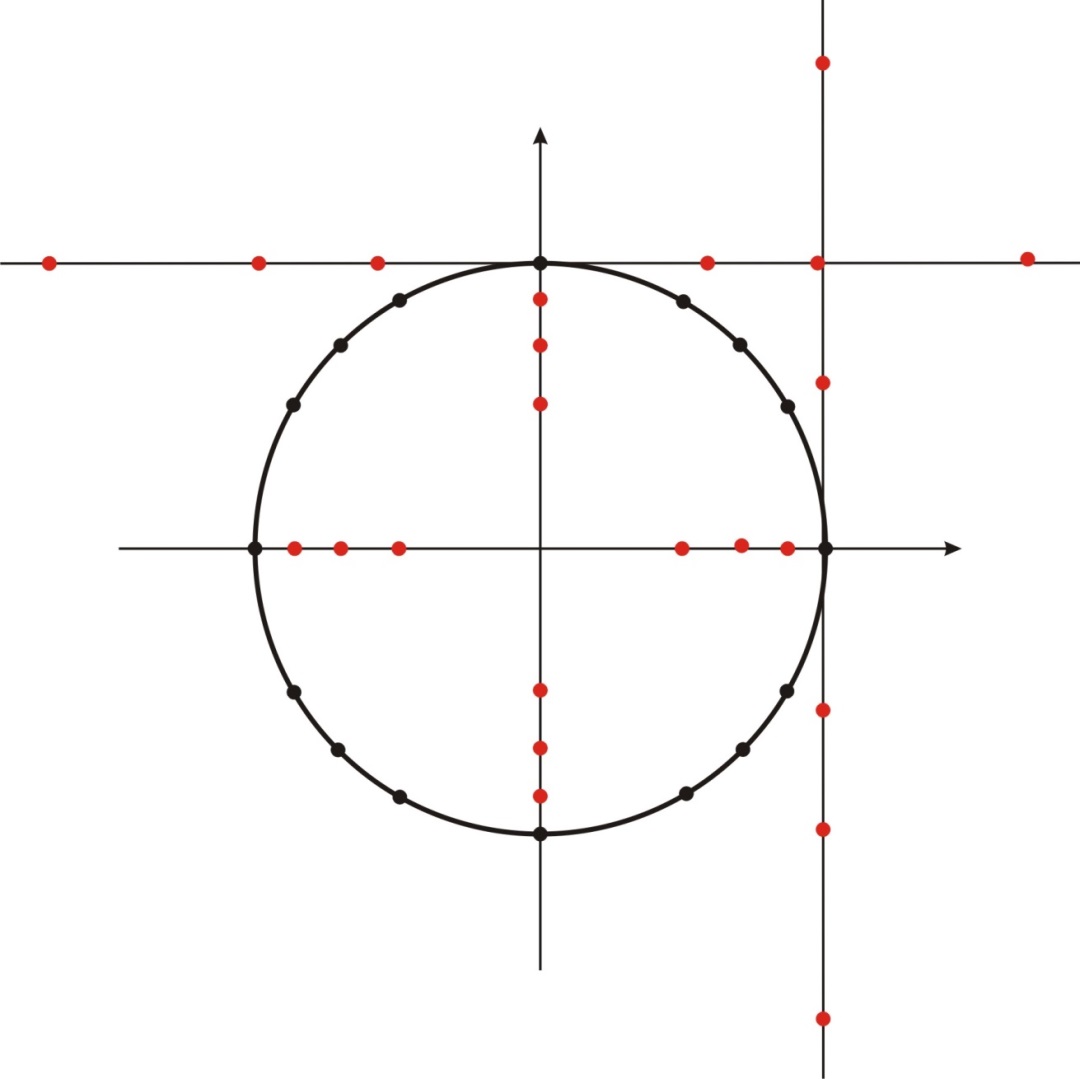


Рисунок 19.

Ученик не будет переживать, что он не может вспомнить какие-то значения, а будет «действовать», чтобы найти нужный ответ.

1. Учащийся, хорошо овладевший понятием «числовая окружность», свободно и непринужденно работающий с ней, достаточно уверенно обращается и с тригонометрическими функциями.
2. **ДЛЯ ЗАКРЕПЛЕНИЯ ДАННОЙ ТЕМЫ**

В качестве домашней работы задаю построить такую же окружность, но аккуратно и в цвете. Мотивируя это тем, что на уроке мы торопились и не всё получилось красиво, понятно. Обещаю поставить оценку «5» при наличии двух рисунков: классного и домашнего.

Желательно принять устный зачет по значениям тригонометрических функций от 0° до 360° у каждого ученика, это закрепит знания и обеспечит ученику успех.

Хорошие знания окружности поможет и при решении тригонометрических неравенств и уравнений.

**ЛИТЕРАТУРА:**

1. Мордкович А. Г. «Алгебра и начала анализа», учебник, часть 1, 10-11 классы
2. Солодухин В.Я. «Сборник упражнений по тригонометрии», 9-11 классы. Якутск, издание «Бимик» 1996 г.