Конспект занятия на тему «Приращение аргумента и функции. Определение производной. Алгоритм вычисления производной по определению. Таблица производных. Правила вычисления производной»

Цели:

- ввести понятия приращение аргумента и приращение функции;
- научить находить приращение аргумента и приращение функции;
- ввести понятие производной;
- способствовать выработке навыка нахождения производной по определению;
- Учить находить производную по таблице;
- Учить использовать правила дифференцирования;

Дидактический материал: опорный конспект, карточки-задания для индивидуальной работы, памятки, учебник Колмогорова А.Н. «Алгебра и начала анализа. 10-11классы», обучающий видеокурс «Математика 7-11», Математика – учебное электронное издание 5-11.Математический дневник .

План урока

1. Организационный момент.
2. Актуализация знаний:
   - 2.1. Фронтальный опрос;
   - 2.2. Работа с карточками.
3. Изучение нового материала:
   - 3.1. Приращение аргумента и приращение функции;
   - 3.2. Понятие «Производная»;
   - 3.3. Схема вычисления производной по определению;
   - 3.4. Таблица производных;
   - 3.5. Правила дифференцирования.
4. Закрепление изученного.
5. Подведение итогов.
6. Домашнее задание.
7. Рефлексия.

Ход урока

1. **Организационный момент**

- доброжелательный настрой учителя и учащихся;
- быстрое включение класса в деловой ритм;
- организация внимания всех учащихся;
- сообщение темы и целей урока.

2. **Актуализация знаний**

(выявление факта выполнения (не выполнения) домашнего задания у всего класса, устранение типичных ошибок; работа организована параллельно: учащимся на выбор предлагается письменно ответить на вопросы или участвовать в фронтальном опросе. Учащиеся, работающие письменно, садятся на первые парты. Двое учащихся вызывается к доске для написания домашней работы.)

2.1. Фронтальный опрос

- Что такое последовательность?

- Какие виды последовательностей вы знаете?

- Как задаётся числовая последовательность?

- Что мы называем пределом последовательности?

- Как найти предел последовательности, при $x \to \infty$?

- Как найти предел при $x \to$ к конкретному числу?

2.2. Индивидуальные задания для учащихся

Карточка 1

Дайте определение понятию «Предел последовательности»	Вычислите **а)** $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x+1}{x-2}$; **б)** $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x-4}{2x+7}$;
Как найти предел последовательности, при $x \to \infty$	Если Вы не справились с заданием укажите причину вызвавшую у Вас затруднение.

Карточка 2

Дайте определение понятию «Предел последовательности»	Вычислите в) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x-4}{x+3}$; г) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{7x+9}{6x-1}$.
Как найти предел, при $x \to \infty$? При $x \to$ к конкретному числу	Если Вы не справились с заданием укажите причину вызвавшую у Вас затруднение.

3. Изучение нового материала

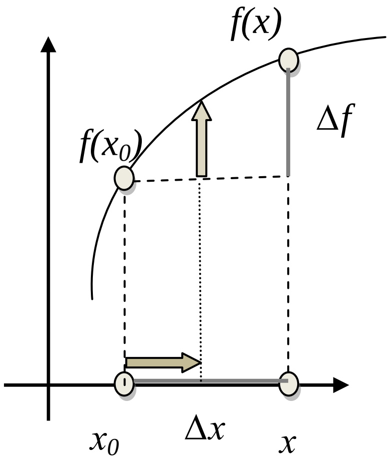
3.1. Приращение аргумента и приращение функции

Часто нас интересует не значение какой либо величины, а ее изменение. Например, сила упругости пружины пропорциональна удлинению пружины; работа есть изменение энергии; средняя скорость это отношение перемещения к промежутку времени, за который было совершено это перемещение, и т. д.

При сравнении значения функции f в некоторой фиксированной точке x_0 со значениями этой функции в различных точках x, лежащих в окрестности x_0, удобно выражать разность $f(x)-f(x_0)$ через разность $(x-x_0)$, пользуясь понятиями «приращение аргумента» и «приращение функции». Объясним их смысл. (Просмотр видеокурса «Математика 7-11» - Определение производной (приращение аргумента и приращение функции)).

Пусть x- произвольная точка, лежащая в некоторой окрестности фиксированной точки x_0. Разность $(x-x_0)$ называется приращением независимой переменной x (или приращением аргумента) в точке x_0 и обозначается Δx. $\Delta x = x - x_0$
Приращение функции f в точке x_0, соответствующее приращению Δx, обозначается Δf, и находится по формуле $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

Графически это можно изобразить так: x, x_0- это точки, $f(x)$, $f(x_0)$-значения функции в этих точек. Тогда Δf– это разность $(f(x) - f(x_0))$ - (отрезок Δf), а Δx- разность $(x-x_0)$ - отрезок Δx. На графике хорошо видно, что приращение функции Δf зависит от приращения аргумента Δx. Если мы уменьшим значение Δx , то значение Δf тоже уменьшится.(в процессе обсуждения преподаватель чертит график на доске)



Составьте опорный конспект.

Для лучшего понимания давайте рассмотрим несколько примеров по данной формуле

***№ 178** –Найдите приращение функции f в точке x_0*

а) решает учитель с объяснением у доски

$$\text{а)} f(x) = -\frac{2}{x}, \quad x_0 = -2, \quad \Delta x = 0.1$$

Решение: $x = x_0 + \Delta x = -2 + 0.1 = -1.9$

$$\Delta f = f(x) - f(x_0) = \left(\frac{-2}{-1.9}\right) - \left(\frac{-2}{-2}\right) = \frac{1}{19}$$

Ученик у доски. б) $f(x) = 2x^2 - 3$, $x_0 = 3$, $\Delta x = -0.2$

Самостоятельно: *Найдите приращение функции f в точке x_0*

$$\text{в)} f(x) = 3x + 1, \qquad x_0 = 5, \quad \Delta x = 0.01$$

$$\text{г)} f(x) = \frac{x^2}{2}, \; x_0 = 2, \quad \Delta x = 0.1$$

*Выполнить на компьютерах «*Математика – учебное электронное издание 5-11*» задания «Приращение аргумента и приращение функции - № 1-4». Результаты выполнения заносятся в журнал программы. Правильность решения проверяется всей группой сверяя свои результаты с результатом программы.*

3.2. Понятие «Производная»

- Мы усвоили понятие приращение функции и приращение аргумента, что позволяет нам перейти к рассмотрению понятия «Производная». Формулировка определения производной основано на понятии предела.

Производной функции f в точке x_0 называется число, к которому стремится разностное отношение $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ *при* Δx*, стремящемся к нулю.*

Производная функции f в точке хо обозначается f′ (x_0) (читается: «эф штрих от x_0»).

3.3.Схема вычисления производной по определению

1. *С помощью формулы, задающей функцию f , находим ее приращение в точке x_0:* $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$
2. *Находим выражение для разностного отношения* $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$*, которое затем преобразуем – упрощаем, сокращаем на* Δx *и т.д.*
3. *Выясняем, к какому числу стремится* $\frac{\Delta f}{\Delta x}$*, если считать что* Δx *стремится к нулю.*

(дежурный раздает памятки «Вычисление производной по пределению»)

- Рассмотрим вычисление производной по данной схеме на конкретном примере:

Пример 1. Найдем производную функции $f(x)=x^3$ в точке x_0.

Будем действовать используя памятку.

1. $\Delta f = (x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3 = 3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$
2. $\frac{\Delta f}{\Delta x} = 3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x)^2\ (\Delta x \neq 0)$
3. Заметим, что $3x_0^2$ постоянно, а при $\Delta x \to 0$ очевидно, что $3x_0\Delta x \to 0$ и $(\Delta x)^2 \to 0$, а значит $3x_0\Delta x + (\Delta x)^2 \to 0$. Получаем $\frac{\Delta f}{\Delta x} \to 3x_0^2$ при $\Delta x \to 0$.
4. Следовательно $f'(x_0)=3x_0^2$.

Пример 2. Найдем производную функции $f(x)=kx+b$ *(k, b - постоянны)* в точке x_0.

1. $\Delta f=(k(x_0+\Delta x)+b)-(kx_0+b)=k\Delta x$
2. $\frac{\Delta f}{\Delta x} = k$
3. Поскольку k- постоянная, $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ - постоянное число при любом Δx, и, значит, $\frac{\Delta f}{\Delta x} \to k$при $\Delta x \to 0$.
4. Итак, $(kx+b)'=k$

- Для закрепления решим у доски №194

(задания решаются параллельно: слабых учащихся вызывают к доске, а более сильные пробуют решить самостоятельно в тетрадях. После решения обязательно сверить результаты с доской)

Учащиеся получают карточки-консультанты.

***194**. Пользуясь карточкой-консультантом, найдите значения производной функции f, если:*

а) $f(x) = x^2 - 3x$ в точках -1; 2;

б) $f(x) = 2x^3$ в точках 0; 1;

в) $f(x) = \frac{1}{x}$ в точках -2; 1;

г) $f(x) = 4 - x^2$ в точках 3; о.

3.4.Таблица производных

-Часто встречаются задания, в которых неудобно, долго вычислять производную по определению. Поэтому существует таблица производных, которая помогает и облегчает работу по нахождению производной. Данной таблицей пользоваться очень просто. В ней представлена функция и найдена ее производная. Вам нужно найти необходимую функцию и посмотреть, чему равна ее производная. Давайте вместе прочитаем данную таблицу (дежурный раздает всем учащимся таблицы производных).

Функция	***Производная***
$y=C$	$y'=0$
$y=x$	$y'=1$
$y=kx$	$y'=k$
$y=kx+m$	$y'=k$
$y=x^m$	$y'=mx^{m-1}$
$y=k\,x^m$	$y'=kmx^{m-1}$
$y=\frac{1}{x}$	$y'=-\frac{1}{x^2}$
$y=\sqrt{x}$	$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$y=\sin x$	$y'=\cos x$
$y=\cos x$	$y'=-\sin x$
$y=tg\,x$	$y'=\frac{1}{\cos^2 x}$
$y=ctg\,x$	$y'=-\frac{1}{\sin^2 x}$

- Давайте вычислим производную функции используя таблицу:

(При работе с заданиемучащиеся по цепочке выходят к доске, называют функцию, показывают в таблице соответствующую формулу, при необходимости называют постоянный множитель и под руководством преподавателя записывают решение на доске)

а) $y=2.5$

б) $y=-3.2$

в) $y=7.5x$

г) $y=-10x$

д) $y=x^2$

и) $y=2x^{-2}$

к) $y=3\sqrt{x}$

л) $y=\sin x$

м) $y=2\cos x$

н) $y=3\sin x$

е) $y=2x^5$ *о)* $y=\frac{2}{x}$

ж) $y=2.4x^4$ *п)* $y=\frac{2}{3x}$

з) $y=x^{-2}$ *р)* $y=-\frac{2}{3}x$

3.5.Правила дифференцирования

Мы рассматривали с вами простые задания, в которых дана одна функция и с этой функцией не выполняют ни каких операций. Но если мы рассмотрим такой пример : $y = \frac{1+2x}{3-5x}$. Как найти производную?

Для вычисления производных используют ***правила дифференцирования***

Пр 1*. Если функции u и v дифференцируемы в точке хо, то их сумма дифференцируема в этой точке и* ***(u + v)' = u'+ v '***

Пример:

$$f(x) = x^2 + x^3 \quad , \qquad u = x^2, \qquad v = x^3, \quad f^{'}(x) = (x^2)' + (x^3)' = \ 2x + 3x^2$$

Лемма*. Если функция f дифференцируема в точке* x_0*, то она непрерывна в этой точке:*$\Delta f\ \rightarrow 0$ *при* $x \rightarrow x_0$*, т.е.* $f(x_0 + \Delta x) \rightarrow f(x_0)$ *при* $\Delta x \rightarrow 0$.

Пр 2*. Если функции u и v дифференцируемы в точке хо, то их произведение дифференцируемо в этой точке и* ***(uv)' = u'v + uv'***

Пример: $f(x) = x^3(4 + x^2)$, $u = x^3$, $v = 4 + x^2$,

$$f^{'}(x) = (x^3)^{'}(4 + x^2) + x^3(4 + x^2)^{'} = \ 3x^2(4 + x^2) + x^3(2x) =$$

$$= 12x^2 + 3x^4 + 2x^4 = 12x^2 + 5x^4$$

Следствие*. Если функция u дифференцируема в* x_o*, а С постоянная, то функция Cu дифференцируема в этой точке и (Cu)' = Cu'.*

Пр 3*. Если функции u и v дифференцируемы в точке* x_o *и функция v не равна нулю в этой точке, то частное* $\frac{u}{v}$ *также дифференцируемо в* x_o *и* $\left(\frac{\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{v}}\right)^{/} =$

$\frac{\boldsymbol{u}^{/}\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^{/}}{\boldsymbol{v}^{2}}$

Пример: $f(x) = \frac{1+2x}{3-5x}$, $u = 1 + 2x,\quad v = 3 - 5x,$

$$f'(x) = \frac{(1+2x)'(3-5x) - (1+2x)(3-5x)'}{(3-5x)^2} = \frac{2(3-5x) + (1+2x)5}{(3-5x)^2} =$$

$$= \frac{6 - 10x + 5 + 10x}{(3-5x)^2} = \frac{11}{(3-5x)^2}$$

Для закрепления правил дифференцирования просмотр видеокурса «Математика 7- 11» (правила дифференцирования).

Составьте математическую карту темы.

4. Закрепление изученного

- На конкретных примерах рассмотрим, как пользоваться данными правилами (задания решаются под руководством учителя. Задания стоящие под буквой а) учитель решает на доске с четким объяснением. При работе с заданиями следует постоянно обращаться к правилам дифференцирования. Учащимся предлагается, по желанию, решить задания самостоятельно или у доски. Учащиеся, которые выполняли задания самостоятельно,могут пользоваться карточкой-консультантом, обязательно сверяют свои решения с доской. Первые учащиеся, справившиеся с заданиями,подносят тетради на проверку преподавателю.)

Найдите производные функций (208—211).

1. — а) $f(x) = x^2 + x^3$; б) $f(x) = \frac{1}{x} + 5x - 2$;

в) $f(x) = x^2 + 3x - 1$; г) $f(x) = x^3 + \sqrt{x}$.

2. — а) $f(x) = x^3(4 + 2x - x^2)$; б) $f(x) = \sqrt{x}(2x^2 - x)$;

в) $f(x) = x^2(3x + x^3)$; г) $f(x) = (2x - 3)(1 - x^3)$.

3. — а) $y = \frac{1+2x}{3-5x}$; б) $y = \frac{x^2}{2x-1}$; в) $y = \frac{3x-2}{5x+8}$; г) $y = \frac{3-4x}{x^2}$.

4. — а) $y = x^8 - 3x^4 - x + 5$; б) $y = \frac{x}{3} - \frac{4}{x^2} + \sqrt{x}$;

в) $y = x^7 - 4x^5 + 2x - 1$; г) $y = \frac{x^2}{2} + \frac{3}{x^3} + 1$.

5. Подведение итогов

- С какими новыми понятиями вы познакомились на сегодняшнем занятии

- что такое приращение функции и приращение аргумента и как они вычисляются

- дайте определение производной

- как вычислить производную с помощью определения?

-как еще можно вычислить производную?

-какие правила дифференцирования мы узнали?

-какие новые правила необходимо занести в математический дневник?

6. Задание на дом

- занести необходимые правила в математический дневник (из учебника «Алгебра и начала анализа 10-11 кл» Колмогоров А.Н.)

- подготовить доклады на тему «Из истории «Производной»»

- выучить основные понятия, правила, и таблицу производных

- начать выполнение домашней самостоятельной работы

7. Рефлексия

Откройте и заполните свои математические дневники.

Заполните колонку «Рекомендации себе» ответами на следующие вопросы:

1. Что Вам понравилось на уроке?
2. Довольны ли Вы своей работай на уроке?
3. Устали ли Вы за урок?
4. Был ли материал урока, для Вас, понятен, полезен, интересен?
5. Какой материал необходимо повторить?