**Методы решения уравнений высших степеней. Метод Горнера.**

Подобные задания, содержащие уравнения высших степеней, в последние годы стали появляться в ЕГЭ, олимпиадных заданиях по математике, при вступительных экзаменах в ВУЗы. Большинство учащихся с трудом справляются с решением уравнений со степенью выше 3, поскольку в школьном курсе алгебры при непрофильном обучении отводится этой теме малое количество времени, но умение решать такие уравнения необходимо при написании экзамена в форме ЕГЭ, при решении части С, причем математика является обязательным для сдачи предметом.

1. **Методы решения уравнений высших степеней различными способами.**
	1. **Метод замены переменной.**

**Пример 1.** Дано: (х2-9)2-8(х2-9) +7=0

*Решение.* Введем новую переменную, обозначив х2-9=t, тогда получаем:

t2-8t+7=0, D=b2-4ac=36, t1=7; t2=1.

Возвращаемся к “старой” переменной х2-9=1, х=±√10; х2-9=7, х=±4.

*Ответ:* х1=+√10; х2=-√10; х3=-4; х4=4.

**Пример 2.** Дано: х(х + 1)(x + 2)(x + 3) = 24

Решение. Перемножим первый и четвертый множители, второй и третий. Получим:

 (х2 + 3х)(x2 + 3x + 2) = 24

Вводим замену: x2 + 3x = t, тогда t(t + 2) = 24, t2 + 2t – 24 = 0, t1 = -6; t2 = 4. Возвращаемся к “старой” переменной, получим: x2 + 3x = -6, x2 + 3x + 6 = 0, D < 0, уравнение не имеет действительных корней.

Уравнение x2 + 3x = 4 имеет корни х1 = -4, х2 = 1.

Ответ: х1 = -4, х2 = 1.

**Пример 3.** Дано: (х – 4)(х2 + 15 + 50)(х – 2) = 18х2

Решение. Разложим на множители х2 + 15 + 50.

х2 + 15 + 50 = 0, х1 = -5, х2 = -10, тогда х2 + 15х + 50 = (х + 5)(х + 10).

Уравнение примет вид: (х – 4)(х + 5)(х + 10)(х – 2) = 18х2

Так как (-4)•5 = -20, 10•(-2) = -20, то перемножая первую скобку со второй, третью с четвертой, будем иметь: (х2 + х – 20)( х2 + 8х – 20) = 18х2

Поскольку х = 0 не корень, разделим обе части уравнения на х2 . Получим:

$\frac{(х^{2} + х – 20)}{х}$ $∙\frac{( х^{2} + 8х – 20)}{х}$=$\frac{18х^{2}}{х^{2}}$

$(х+1-\frac{20}{х})∙(х+8-\frac{20}{х}$)=18

Вводим замену: $х-\frac{20}{х}=t$, тогда (t+1)(t+8)=18, т.е. t2+9t-10=0, t1= -10, t2 = 1.

Вернемся к исходной переменной:

1. $х-\frac{20}{х}=-10$;
2. $х-\frac{20}{х}=1.$

Решим первое уравнение х2 + 10х – 20 = 0, D = 180, х1=$ \frac{-10+\sqrt{180}}{2}$; х2=$ \frac{-10-\sqrt{180}}{2}$

Решим второе уравнение х2 - х – 20 = 0, D =81, х3 = - 4, х4 = 5.

Ответ: х1=$ \frac{-10+\sqrt{180}}{2}$; х2=$ \frac{-10-\sqrt{180}}{2}$; х3 = - 4, х4 = 5.

**Пример 4.** Дано: $\frac{х^{4 }+324}{х^{2}+6х+18}=43-6х$

*Решение.* Произведем преобразования в числителе дроби: х4+324=х4+182,

(х2+18)2=х4+36х2+324, тогда х4+324= х4+36х2+324-36х2. Получим:

$$\frac{х^{4 }+36х^{2}+324-36х^{2}}{х^{2}+6х+18}=43-6х$$

Приведем левую и правую части к одному знаменателю:

$$\frac{х^{4 }+36х^{2}+324-36х^{2}}{х^{2}+6х+18}=\frac{43х^{2 }+258х+774-36х^{2 }-6х^{3}-108х}{х^{2}+6х+18}$$

Приравняем к нулю. Получим:

$$\frac{х^{4 }+6х^{3}-7х^{2}-150х-450}{х^{2}+6х+18}=0$$

$$\left\{\begin{array}{c}х^{4}+6х^{3}-7х^{2}-150х-450=0,\\х^{2}+6х+18\ne 0;\end{array}\right.$$

Решим уравнение в числителе методом группировки:
$$(х^{4}-7х^{2}-450)+(6х^{3}-150х)=0$$

Разложим на множители $х^{4}-7х^{2}-450$, приравняв к нулю:

$х^{4}-7х^{2}-450=0$, введем новую переменную: х2=t, получаем:

$$t^{2}-7t-450=0$$

D=$b^{2}-4ac=49+4∙450=1849$

х1,2 =$ \frac{-b\pm \sqrt{b^{2}-4ac}}{2a}$ = $\frac{7\pm 43}{2}=25;-18$. Тогда:

$$х^{4}-7х^{2}-450=\left(х^{2}-25\right)(х^{2}+18)$$

$$\left(х^{2}-25\right)(х^{2}+18)+6х(х^{2}-25)=0,$$

$$\left(х^{2}-25\right)∙\left(х^{2}+6х+18\right)=0,$$

х2-25=0, или х2+6х+18=0

х=$\pm 5.$ D=36-72=-36, D<0 – решений нет, т.е. вся парабола полностью лежит выше Ох и не пересекает ее.

Числитель равен нулю при х=5; -5, а знаменатель никогда не будет равен нулю.

*Ответ:* х=±5.

**Пример 5.** Дано: (х-1)4-х2+2х-73

*Решение.* Преобразуем:

(х-1)4-(х2-2х+1)-72, (х-1)4-(х-1)2-72.

Введем новую переменную: (х-1)2=t, t2-t-72=0, D=1+288=289

t1,2=$ \frac{1\pm 17}{2}=9;-8$.

Возвращаемся к «старой» переменной:

1. (х-1)2=9, 2) (х-1)2=-8

х2-2х+1-9=0, х2-2х+1+8=0 ,

х2-2х-8=0 х2-2х+9=0

D=4+32=36 D=4 - 36= -32, D<0 – решений нет.

х1,2=$ \frac{2\pm 6}{2}=4;-2.$

*Ответ:* х=4;-2.

**Пример 6.** Дано: (х2-2х-1)2+3х2-6х-13=0

Решение. Выполним преобразования: (х2-2х-1)2+3(х2-2х-1)-10=0.

Введем новую переменную: х2-2х-1=t

T2+3T-10=0

D=49 х1,2=$ \frac{-3\pm 7}{2}=-5;2.$

Возвращаемся к «старой» переменной:

1. х2-2х-1=-5, 2) х2-2х-1=2

 х2-2х-1+5=0, х2-2х-1-2=0 ,

х2-2х+4=0 х2-2х-3=0

D=4-16=-12, D<0 – решений нет. D=16

 х1,2=$ \frac{2\pm 4}{2}=3;-1.$

*Ответ:* х=3;-1.

**Пример 7.** Дано:

 - не является корнем уравнения

Разделим обе части уравнения на (х-1)2, получим



Введем замену.

Пусть , тогда



; 

 или 

 

;  ; 

Ответ: ; ; ; 

**Пример 8.**Дано:

****

Решение. В левой части выделим полный квадрат разности:

****

Сгруппируем первый, второй и четвертый члены:

****

****

Вводим замену: ****t2 + 18t – 40 = 0; t1 = -20, t2 = 2.

Вернемся к “старой” переменной, получим:



Ответ: , .

**Пример 9.** Дано:



Решение. х = 0 не является корнем уравнения, поэтому числитель и знаменатель каждой дроби делим на х:

 ,

вводим замену:

 , тогда 

Решим это уравнение:



Вернемся к “старой” переменной:



Решаем первое уравнение х2 – 14х + 15 = 0

; .

Второе уравнение не имеет действительных корней.

Ответ: ;.

**Пример 10.** Дано:$(х-1)^{4}+9(х+1)^{4}=10(х^{2}-1)^{2}$

*Решение.* Раскроем скобки в правой части уравнения. Получим:

$$(х-1)^{4}+9(х+1)^{4}=10\left(х-1\right)^{2}(х+1)^{2}$$

Введем новые переменные: (х-1)2=а; (х+1)2=b, получаем:

а2+9b2-10аb=0, поделим на а2, 1+9($\frac{b}{а})$2-10($\frac{b}{a}$), вводим новую переменную и решаем квадратное уравнение: $\frac{b}{a}=t$

9t2-10t+1=0, D=100-36=64, t1,2=$ \frac{10\pm 8}{18}=1; \frac{1}{9}.$

Возвращаемся к «старым» переменным: 1) (х+1)2=(х-1)2; 2) (х-1)2=9(х+1)2.

Решаем уравнения:

1. х2+2х+1=х2-2х+1, 2) х2-2х+1=9х2+18х+9,

4х=0, -8х2-20х-8=0

х=0. D=400-64∙4=144

 х1,2=$ \frac{20\pm 12}{-16}=-2;- \frac{1}{2}.$

Ответ: х=0; -2; -$ \frac{1}{2}.$

* 1. **Метод группировки.**

**Пример 1.** Дано: $\frac{1}{х}+\frac{1}{х+1}+\frac{1}{х+3}+\frac{1}{х+4}$

Решение. Сгруппируем слагаемые в левой части, но следует заметить, что х=0; х=-1; х=-3; х=-4 не могут быть решениями. Получим:

$\left(\frac{1}{х}+\frac{1}{х+4}\right)+\left(\frac{1}{х+3}+\frac{1}{х+1}\right)=0$,

Проводим преобразования и получаем:

$\frac{2\left(х+2\right)}{х^{2}+4х}$+$\frac{2\left(х+2\right)}{х^{2}+4х+3}=0,$

2(х+2)($\frac{1}{х^{2}+4х}+\frac{1}{х^{2}+4х+3})=0$,

2(х+2)=0, или $\frac{1}{х^{2}+4х}+\frac{1}{х^{2}+4х+3}=0$

х1=-2. Введем замену: х2+4х=t, тогда $\frac{1}{t}+\frac{1}{t+3}=0$

 Решая уравнения, получаем:

 $\left\{\begin{array}{c}2t+3=0,\\t^{2}+3t\ne 0;\end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{c}t=-\frac{3}{2},\\t\ne 0, t\ne -3.\end{array}\right.$

Подставляем значение t, получаем уравнение:

х2+4х=$-\frac{3}{2}$,

х2+4х+1,5=0,

D=16-6=10,

х2,3=$\frac{-4\pm \sqrt{10}}{2}$ Ответ: х1=-2; х2=-2+$\frac{\sqrt{10}}{2}$; х3= -2-$\frac{\sqrt{10}}{2}$.

Пример 2. Дано: х4+2х3+2х+1=0

Решение. Поделим на уравнение на х2, получим:

х2+2х+$\frac{2}{х}+\frac{1}{х^{2}}=0,$ перегруппируем слагаемые таким образом:

(х2+$\frac{1}{х^{2}})+2\left(х+\frac{1}{х}\right)=0,$

(х+$\frac{1}{х})$2-2+2($х+\frac{1}{х})=0,$

вводим новую переменную: t= х+$\frac{1}{х}$, t2+2t-2=0, D=4+8=12,

t1,2=$\frac{-2\pm \sqrt{12}}{2}$=$\frac{-2\pm 2\sqrt{3}}{2}=-1-\sqrt{3}; -1+\sqrt{3}.$

Подставляем обратно:

1. х+$\frac{1}{х}=-1-\sqrt{3}$

x2 + (1− $\sqrt{3}$)x +1 = 0, D=-1-2$\sqrt{3}+3-4=-2\sqrt{3}$ <0 – решений нет.

1. х+$\frac{1}{х}$=$-1+\sqrt{3}$,

x2 + (1+ $\sqrt{3}$)x +1 = 0, D=$2\sqrt{3}$,

х1,2=$\frac{-1-\sqrt{3}\pm \sqrt{2\sqrt{3}}}{2}$.

Ответ. х1,2=$ \frac{-1-\sqrt{3}\pm \sqrt{2\sqrt{3}}}{2}$

**Пример 3.** Дано: х4+х3-72х2+9х+81=0

Решение. Поделим уравнение на х2 и сгруппируем:

х2+х-72+$\frac{9}{х}+\frac{81}{х^{2}}$=0,

(х2+$\frac{81}{х^{2}})$+(х+$\frac{9}{х})-72=0,$ проведем некоторые преобразования до полного квадрата в одной из скобок, получим:

(х2+18+$\frac{81}{х^{2}})$+(х+$\frac{9}{х})-72-18=0$,

(х+$\frac{9}{х}$)2+( х+$\frac{9}{х}$)-90=0, вводим новую переменную: t= х+$\frac{9}{х}$, решаем уравнение:

t2+t-90=0, D=1+360=361,

t1,2=$\frac{-1\pm 19}{2}=-10;9.$ Решаем уравнения, подставляя значения t:

1. х+$\frac{9}{х}$=-10, х$\ne $0

х2+10х+9=0, D=100-36=64

х1,2=$\frac{-10\pm 8}{2}=-9; -1.$

1. х+$\frac{9}{х}$=9, х$\ne $0

х2-9х+9=0, D=81-36=45

х3,4=$\frac{9\pm 3\sqrt{5}}{2}$.

Ответ: х1$=-9;$ х2=-1; х3,4=$\frac{9\pm 3\sqrt{5}}{2}$

* 1. **«Схема Горнера»**

 *Определение.* Уравнение р0хn+p1xn-1+p2xn-2+…+pn-1x+pn=0, где n – натуральное число, а - произвольные постоянные коэффициенты, называется **целым рациональным уравнением n – й степени**.

*Теорема.* Если целое рациональное уравнение с целыми коэффициентами имеет целые корни, то они являются делителями свободного члена.

*Теорема Безу.* Остаток от деления многочлена р0хn+p1xn-1+p2xn-2+…+pn-1x+pn на двучлен х-а равен Р(а).

Рассмотрим решение уравнений высших степеней, используя метод деления с помощью схемы Горнера:

Если р0хn+p1xn-1+p2xn-2+…+pn-1x+pn=(b0xn-1+b1xn-2+…+bn-2x+bn-1)(x-a)

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | P0 | P1 | P2 | P3 | … | Pn-1 | Pn |
| a | b0=p0 | b1=p1+b0$∙a$ | b2 =p2+b1$∙a$ | b3=p3+b2$∙a$ |  | bn-1=pn-1+bn-2$∙$a | bn=pn+bn-1$∙$a |

**Пример 1.** Дано: . Делители свободного числа: $\pm 1;\pm 2;\pm 3;\pm 4;\pm 5;\pm 6;\pm 10;\pm 12;\pm 15;20;\pm 30;\pm 60$, но это очень большое количество делителей, поэтому можно воспользоваться тем, что если сумма коэффициентов равна 0, то один из корней 1.

1-5-9+41+32-60=0 1 – корень.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|   | 1 | -5 | -9 | 41 | 32 | -60 |
| 1 | 1 | -4 | -13 | 28 | 60 | 0 |
| 2 | 1 | -2 | -17 | -6 | 20 |  - |
| 3 | 1 | -1 | -16 | -20 | 0 |   |
| 4 | 1 | 3 | -4 | 0 |   |   |
| 5 | 1 | 4 | 4 | 0 |   |   |



х-1=0, или х-3=0, или х-5=0, или (х+2)2=0,

х=1. х=3. х=5. х=-2.

*Ответ:* 1; 3; 5; -2.

**Пример 2.** . Делители свободного числа: $\pm 1;\pm 2;\pm 3;\pm 6.$

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|   | 1 | -1 | -8 | 14 | 1 | -13 | 6 |
| 1 | 1 | 0 | -8 | 6 | 7 | -6 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | -7 | -1 | 6 | 0 |   |
| 1 | 1 | 2 | -5 | -6 | 0 |   |   |
| -1 | 1 | 1 | -6 | 0 |   |   |   |



(х-1)3=0, или х+1=0, или х+3=0, х-2=0,

х=1. х=-1. х=-3. х=2.

*Ответ:* 1; -1; -3; 2.

**Пример 3.** Решить уравнение: *х3 – 5х + 4 = 0*

Определим корни многочлена третьей степени

*:± 1; ± 2; ± 4*

*f(1) = 1 – 5 + 4 = 0*

Одним из корней является *х = 1*

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *1* | *0* | *– 5* | *4* |
| *1* | *1* | *1* | *– 4* | *0* |

*х3 – 5х + 4 = 0*

*(х – 1) (х2 + х – 4) = 0*

*х-1=0, или х2 + х – 4=0*

*х=1. D = 1 + 16 = 17*

 *х1 = ; х2 = *

Ответ: *1; ; .*

**Пример 4**. Дано: 6х4-29х3-89х2-19х+35=0

Решение. Делители свободного числа: $\pm 1;\pm 5;\pm 7;\pm 35$.

Находим по схеме Горнера целочисленные решения уравнения:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 6 | -29 | -89 | -19 | 35 |
| 1 | 6 | -23 | -112 | -131 | $$\ne 0$$ |
| -1 | 6 | -35 | -54 | 35 | 0 |
| 5 | 6 | 1 | -84 | -439 | $$\ne 0$$ |
| 7 | 6 | 13 | 2 | -5 | 0 |

Итак, 6х4-29х3-89х2-19х+35=(х+1)(х-7)(6х2+7х-5)=0,

х+1=0 или х-7=0 или 6х2+7х-5=0

х1=-1, х2=7, х3,4=$ \frac{-7\pm \sqrt{169}}{12}=-\frac{5}{3}; \frac{1}{2}$.

Ответ: $\left\{-1;7;-\frac{5}{3}; \frac{1}{2}\right\}$

**Пример 5.** Решить уравнение: х5+5х-42=0

Решение. Делители свободного числа: $\pm 1;\pm 2;\pm 3;\pm 6;\pm 7;\pm 14;\pm 21;$

Находим по схеме Горнера целочисленные решения уравнений:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 0 | 0 | 0 | 5 | -42 |  |
| -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 6 | $$\ne 0$$ |  |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 | $$\ne 0$$ |  |
| -2 | 1 | -2 | 4 | -8 | 21 | $$\ne 0$$ |  |
| 2 | 1 | 2 | 4 | 8 | 21 | 0 | Корень |
|  х4+2х3+4х2+8х+21=0Делители свободного числа: $\pm 1;\pm 21$

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 4 | 8 | 21 |
| -1 | 1 | 1 | 3 | 5 | 6 |
| 1 | 1 | 3 | 7 | 15 | 36 |
| -21 | 1 | -19 | 403 | -8455 | 177576 |
| 21 | 1 | 23 | 487 | 10235 | 214956 |

 |  |  |
|
|  |  |

Ответ: х=2.

**Пример 6.** Дано: х4-8х+63=0

Решение. Делители свободного числа: $\pm 1;\pm 63$

Решаем по схеме Горнера:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 0 | 0 | -8 | 63 |
| -1 | -1 | 1 | -1 | -7 | 70 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | -7 | 70 |
| -63 | 1 | 63 | -3969 | Не корень |  |
| 63 | 1 | 63 | 3969 | Не корень |  |

Ответ: решений нет.

**Пример 7.** Решить уравнение: х4-4х3-13х2+28х+12=0

**Решение.** Делители свободного числа**:** $\pm 1;\pm 2;\pm 3;\pm 4;\pm 6;\pm 12;$

По схеме Горнера находим целочисленные решения уравнения:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | -4 | -13 | 28 | 12 |  |
| 1 | 1 | -3 | -16 | 12 | 24 | $$\ne 0$$ |
| 2 | 1 | -2 | -17 | -6 | 0 | Корень |
| 3 | 1 | -1 | -16 | -20 | $$\ne 0$$ |  |
| -3 | 1 | -7 | 8 | 4 | 0 | Корень |

Уравнение принимает вид**:** (х-2)(х+3)(х2 -5х-2)=0

х-2=0 или х+3=0 или х2 -5х-2=0

х1=2, х2=-3, х3,4=$\frac{5\pm \sqrt{33}}{2}$

Ответ: х1=2, х2=-3, х3,4=$\frac{5\pm \sqrt{33}}{2}$

**Список литературы:**

1. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. В 2 ч. Ч.1 Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень). А.Г. Мордкович. Изд. «Мнемозина», 2010.
2. Профильное обучение математике старшеклассников. Учебно-дидактический комплекс. – Новосибирск. Сиб. унив. изд-во, 2003.
3. Математика. Интенсивный курс подготовки к экзамену. О. Ю. Черкасов, А. Г. Якушев. Москва, изд. “Айрис”, 1997.
4. Звавич Л. И., Шляпочник Л. Я., Чинкина М. В., Алгебра и начала анализа 8–11. Дидактические материалы, М: Дрофа, 1999.
5. Ивлев Б. М., Задачи повышенной трудности по алгебре и началам анализа: учебное пособие для 10–11 классов средней школы, М: Просвещение, 1990.
6. М. И. Шабунин. Алгебра и начала анализа. Дидактические материалы для 10-11 классов.
7. Тумаркин Л.А. «История математики», Москва, 1975 г.
8. Иванов К. Б., Сборник задач для старшеклассников, Волгоград, 2000.