Методы решения уравнений высших степеней. Метод Горнера.

Подобные задания, содержащие уравнения высших степеней, в последние годы стали появляться в ЕГЭ, олимпиадных заданиях по математике, при вступительных экзаменах в ВУЗы. Большинство учащихся с трудом справляются с решением уравнений со степенью выше 3, поскольку в школьном курсе алгебры при непрофильном обучении отводится этой теме малое количество времени, но умение решать такие уравнения необходимо при написании экзамена в форме ЕГЭ, при решении части С, причем математика является обязательным для сдачи предметом.

1. Методы решения уравнений высших степеней различными способами.

1.1. <u>Метод замены переменной.</u>

Пример 1. Дано: $(x^2-9)^2-8(x^2-9)+7=0$

Решение. Введем новую переменную, обозначив $x^2-9=t$, тогда получаем:

$t^2-8t+7=0$, $D=b^2-4ac=36$, $t_1=7$; $t_2=1$.

Возвращаемся к “старой” переменной $x^2-9=1$, $x=\pm\sqrt{10}$; $x^2-9=7$, $x=\pm4$.

Ответ: $x_1=+\sqrt{10}$; $x_2=-\sqrt{10}$; $x_3=-4$; $x_4=4$.

Пример 2. Дано: $x(x+1)(x+2)(x+3)=24$

Решение. Перемножим первый и четвертый множители, второй и третий. Получим:

$(x^2+3x)(x^2+3x+2)=24$

Вводим замену: $x^2+3x=t$, тогда $t(t+2)=24$, $t^2+2t-24=0$, $t_1=-6$; $t_2=4$. Возвращаемся к “старой” переменной, получим: $x^2+3x=-6$, $x^2+3x+6=0$, $D<0$, уравнение не имеет действительных корней.

Уравнение $x^2+3x=4$ имеет корни $x_1=-4$, $x_2=1$.

Ответ: $x_1=-4$, $x_2=1$.

Пример 3. Дано: $(x-4)(x^2+15+50)(x-2)=18x^2$

Решение. Разложим на множители $x^2+15+50$.

$x^2+15+50=0$, $x_1=-5$, $x_2=-10$, тогда $x^2+15x+50=(x+5)(x+10)$.

Уравнение примет вид: $(x-4)(x+5)(x+10)(x-2)=18x^2$

Так как $(-4)\cdot5=-20$, $10\cdot(-2)=-20$, то перемножая первую скобку со второй, третью с четвертой, будем иметь: $(x^2+x-20)(x^2+8x-20)=18x^2$

Поскольку $x=0$ не корень, разделим обе части уравнения на x^2. Получим:

– – =

$- — \qquad —) = 18$

Вводим замену: — , тогда $(t+1)(t+8)=18$, т.е. $t^2+9t-10=0$, $t_1= -10$, $t_2 = 1$.

Вернемся к исходной переменной:

1) — ;
2) —

Решим первое уравнение $x^2 + 10x - 20 = 0$, $D = 180$, $x_1=$; $x_2=$

Решим второе уравнение $x^2 - x - 20 = 0$, $D = 81$, $x_3 = - 4$, $x_4 = 5$.

Ответ: $x_1=$; $x_2=$; $x_3 = - 4$, $x_4 = 5$.

Пример 4. Дано:

<u>*Решение.*</u> Произведем преобразования в числителе дроби: $x^4+324=x^4+18^2$,

$(x^2+18)^2=x^4+36x^2+324$, тогда $x^4+324= x^4+36x^2+324-36x^2$. Получим:

Приведем левую и правую части к одному знаменателю:

Приравняем к нулю. Получим:

Решим уравнение в числителе методом группировки:

Разложим на множители , приравняв к нулю:

, введем новую переменную: $x^2=t$, получаем:

D=

$x_{1,2}$ = —— = —— . Тогда:

x^2-25=0, или x^2+6x+18=0

x= D=36-72=-36, D<0 – решений нет, т.е. вся парабола полностью лежит выше Ox и не пересекает ее.

Числитель равен нулю при x=5; -5, а знаменатель никогда не будет равен нулю.

Ответ: x=±5.

Пример 5. Дано: $(x-1)^4-x^2+2x-73$

Решение. Преобразуем:

$(x-1)^4-(x^2-2x+1)-72$, $(x-1)^4-(x-1)^2-72$.

Введем новую переменную: $(x-1)^2=t$, $t^2-t-72=0$, D=1+288=289

$t_{1,2}$= —— .

Возвращаемся к «старой» переменной:

1) $(x-1)^2=9$, 2) $(x-1)^2=-8$

$x^2-2x+1-9=0$, $x^2-2x+1+8=0$,

$x^2-2x-8=0$ $x^2-2x+9=0$

D=4+32=36 D=4 - 36= -32, D<0 – решений нет.

$x_{1,2}$= ——

Ответ: x=4;-2.

Пример 6. Дано: $(x^2-2x-1)^2+3x^2-6x-13=0$

Решение. Выполним преобразования: $(x^2-2x-1)^2+3(x^2-2x-1)-10=0$.

Введем новую переменную: $x^2-2x-1=t$

$T^2+3T-10=0$

$D=49$ $\qquad x_{1,2}=$ ——

Возвращаемся к «старой» переменной:

1) $x^2-2x-1=-5$, $\qquad$ 2) $x^2-2x-1=2$

$x^2-2x-1+5=0$, $\qquad$ $x^2-2x-1-2=0$,

$x^2-2x+4=0$ $\qquad$ $x^2-2x-3=0$

$D=4-16=-12$, $D<0$ – решений нет. $\quad D=16$

$x_{1,2}=$ ——

Ответ: x=3;-1.

Пример 7. Дано: $2(x^2+x+1)^2-7(x-1)^2=13(x^3-1)$

$x=1$ - не является корнем уравнения $(x-1)^2\neq 0$

Разделим обе части уравнения на $(x-1)^2$, получим

$$2\left(\frac{x^2+x+1}{x-1}\right)-7-13\frac{x^2+x+1}{x-1}=0$$

Введем замену.

Пусть $\frac{x^2+x+1}{x-1}=y$, тогда

$2y^2-13y-7=0$

$y_1=7$; $y_2=-\frac{1}{2}$

$\frac{x^2+x+1}{x-1}=7$ $\qquad$ или $\qquad$ $\frac{x^2+x+1}{x-1}=-\frac{1}{2}$

$x^2-6x+8=0$ $\qquad$ $2x^2+3x+1=0$

$x_1=4$; $x_2=2$ $\qquad$ $x_3=-1$; $x_4=-\frac{1}{2}$

Ответ: $x_1=4$; $x_2=2$; $x_3=-1$; $x_4=-1/2$

Пример 8. Дано:

$$x^2 + \frac{81x^2}{(9+x)^2} = 40$$

Решение. В левой части выделим полный квадрат разности:

$$(x)^2 + (\frac{9x}{9+x})^2 + 2x \cdot \frac{9x}{9+x} - 2x \cdot \frac{9x}{9+x} = 40$$

Сгруппируем первый, второй и четвертый члены:

$$(x - \frac{9x}{9+x})^2 + \frac{18x^2}{9+x} = 40;$$

$$(\frac{x^2}{9+x})^2 + \frac{18x^2}{9+x} = 40;$$

Вводим замену: $\frac{x^2}{9+x} = t;$ $t^2 + 18t - 40 = 0$; $t_1 = -20$, $t_2 = 2$.

Вернемся к "старой" переменной, получим:

$$\left[\begin{array}{l} \frac{x^2}{9+x} = -20 \\ \frac{x^2}{9+x} = 2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \frac{x^2}{9+x} = -20 \\ \frac{x^2}{9+x} = 2 \end{array}\right. \\ x \neq -9 \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x_1 = 1 + \sqrt{19} \\ x_2 = 1 - \sqrt{19} \end{array}\right.$$

Ответ: $x_1 = 1 + \sqrt{19}$, $x_2 = 1 - \sqrt{19}$.

Пример 9. Дано:

$$\frac{x^2 - 10x + 15}{x^2 - 6x + 15} = \frac{3x}{x^2 - 8x + 15}$$

Решение. x = 0 не является корнем уравнения, поэтому числитель и знаменатель каждой дроби делим на x:

$$\frac{x - 10 + \frac{15}{x}}{x - 6 + \frac{15}{x}} = \frac{3}{x - 8 + \frac{15}{x}},$$

вводим замену:

$x - 8 + \frac{15}{x} = t$, тогда $\frac{t-2}{t+2} = \frac{3}{t}$

Решим это уравнение:

$$\frac{t-2}{t+2} = \frac{3}{t} \iff \begin{cases} t^2 - 5t - 6 = 0 \\ t + 2 \neq 0 \\ t \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} t_1 = 6 \\ t_2 = -1 \end{cases}$$

Вернемся к “старой” переменной:

$$\left[\begin{array}{l} x - 8 + \frac{15}{x} = 6 \\ x - 8 + \frac{15}{x} = -1 \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x^2 - 14x + 15 = 0 \\ x^2 - 7x + 15 = 0 \end{array}\right.$$

Решаем первое уравнение $x^2 - 14x + 15 = 0$

$$x_1 = 7 + \sqrt{34}; \; x_2 = 7 - \sqrt{34}.$$

Второе уравнение не имеет действительных корней.

Ответ: $x_1 = 7 + \sqrt{34}$; $x_2 = 7 - \sqrt{34}$.

Пример 10. Дано:

<u>*Решение.*</u> Раскроем скобки в правой части уравнения. Получим:

Введем новые переменные: $(x-1)^2=a$; $(x+1)^2=b$, получаем:

$a^2+9b^2-10ab=0$, поделим на a^2, 1+9(− ^{2}-10(−), вводим новую переменную и решаем квадратное уравнение: −

$9t^2-10t+1=0$, $D=100-36=64$, $t_{1,2}=$ —— −

Возвращаемся к «старым» переменным: 1) $(x+1)^2=(x-1)^2$; 2) $(x-1)^2=9(x+1)^2$.

Решаем уравнения:

1) $x^2+2x+1=x^2-2x+1$, 2) $x^2-2x+1=9x^2+18x+9$,

$4x=0,$ $-8x^2-20x-8=0$

$x=0.$ $D=400-64\cdot4=144$

$x_{1,2}=$ —— –

Ответ: x=0; -2; - –

1.2.Метод группировки.

Пример 1. Дано: – — — —

Решение. Сгруппируем слагаемые в левой части, но следует заметить, что x=0; x=-1; x=-3; x=-4 не могут быть решениями. Получим:

– — — — ,

Проводим преобразования и получаем:

——+———

2(x+2)(—— ——— ,

2(x+2)=0, или —— ———

$x_1=-2.$ Введем замену: $x^2+4x=t$, тогда – —

Решая уравнения, получаем:

–

Подставляем значение t, получаем уравнение:

$x^2+4x=$ –,

$x^2+4x+1,5=0,$

D=16-6=10,

$x_{2,3}=$———

Ответ: $x_1=-2$; $x_2=-2+$—; $x_3= -2-$—.

Пример 2. Дано: $x^4+2x^3+2x+1=0$

Решение. Поделим на уравнение на x^2, получим:

x^2+2x+– — перегруппируем слагаемые таким образом:

$(x^2+$— –

$(x+$– $^2-2+2($ –

вводим новую переменную: $t= x+$–, $t^2+2t-2=0$, $D=4+8=12$,

$t_{1,2}=$——=—— – –

Подставляем обратно:

1) $x+$– –

   $x^2 + (1-$ –$)x +1 = 0$, $D=-1-2$ – – <0 – решений нет.

2) $x+$–= –,

   $x^2 + (1+$ –$)x +1 = 0$, $D=$ –,

   $x_{1,2}=$——.

   Ответ. $x_{1,2}=$ ——

Пример 3. Дано: $x^4+x^3-72x^2+9x+81=0$

Решение. Поделим уравнение на x^2 и сгруппируем:

$x^2+x-72+$– —$=0$,

$(x^2+$— $+(x+$– проведем некоторые преобразования до полного квадрата в одной из скобок, получим:

$(x^2+18+$— $+(x+$– ,

$(x+-)^2+(x+-)-90=0$, вводим новую переменную: $t= x+-$, решаем уравнение:

$t^2+t-90=0$, $D=1+360=361$,

$t_{1,2}=$——   Решаем уравнения, подставляя значения t:

1) $x+-=-10$, x 0

   $x^2+10x+9=0$, $D=100-36=64$

   $x_{1,2}=$——

2) $x+-=9$, x 0

   $x^2-9x+9=0$, $D=81-36=45$

   $x_{3,4}=$——.

Ответ: x_1 $x_2=-1$; $x_{3,4}=$——

1.3. «Схема Горнера»

Определение. Уравнение $p_0x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\ldots+p_{n-1}x+p_n=0$, где n – натуральное число, а - произвольные постоянные коэффициенты, называется **целым рациональным уравнением n – й степени**.

Теорема. Если целое рациональное уравнение с целыми коэффициентами имеет целые корни, то они являются делителями свободного члена.

Теорема Безу. Остаток от деления многочлена $p_0x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\ldots+p_{n-1}x+p_n$ на двучлен x-a равен P(a).
Рассмотрим решение уравнений высших степеней, используя метод деления с помощью схемы Горнера:
Если $p_0x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\ldots+p_{n-1}x+p_n=(b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\ldots+b_{n-2}x+b_{n-1})(x-a)$

	P_0	P_1	P_2	P_3	…	P_{n-1}	P_n
a	$b_0=p_0$	$b_1=p_1+b_0$	$b_2=p_2+b_1$	$b_3=p_3+b_2$		$b_{n-1}=p_{n-1}+b_{n-2}$ a	$b_n=p_n+b_{n-1}$ a

Пример 1. Дано: $x^5-5x^4-9x^3+41x^2+32x-60=0$. Делители свободного числа:
, но это очень большое количество делителей, поэтому можно воспользоваться тем, что если сумма коэффициентов равна 0, то один из корней 1.

$1-5-9+41+32-60=0 \Rightarrow 1$ – корень.

	1	-5	-9	41	32	-60
1	1	-4	-13	28	60	0
2	1	-2	-17	-6	20	-
3	1	-1	-16	-20	0	
4	1	3	-4	0		
5	1	4	4	0		

$(x-1)(x-3)(x-5)(x+4x+4)=0$

$(x-1)(x-3)(x-5)(x+2)^2=0$

x-1=0, или x-3=0, или x-5=0, или $(x+2)^2=0$,
x=1. x=3. x=5. x=-2.

Ответ: 1; 3; 5; -2.

Пример 2. $x^6-x^5-8x^4+14x^3+x^2-13x+6=0$. Делители свободного числа:

	1	-1	-8	14	1	-13	6
1	1	0	-8	6	7	-6	0
1	1	1	-7	-1	6	0	
1	1	2	-5	-6	0		
-1	1	1	-6	0			

$(x-1)^3(x+1)(x^2+x-6)=0$

$(x-1)^3(x+1)(x+3)(x-2)=0$

$(x-1)^3=0$, или x+1=0, или x+3=0, x-2=0,
x=1. x=-1. x=-3. x=2.

Ответ: 1; -1; -3; 2.

Пример 3. Решить уравнение: $x^3-5x+4=0$

Определим корни многочлена третьей степени

$\frac{p}{q}: \pm 1; \pm 2; \pm 4$

$f(1)=1-5+4=0$

Одним из корней является $x=1$

	1	*0*	*– 5*	*4*
1	*1*	*1*	*– 4*	*0*

$x^3-5x+4=0$

$(x-1)(x^2+x-4)=0$

$x-1=0,$ *или* $x^2+x-4=0$

$x=1.$ $D=1+16=17$

$$x_1=\frac{-1-\sqrt{17}}{2};\quad x_2=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$$

Ответ: $1;\ \frac{-1-\sqrt{17}}{2};\ \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$.

Пример 4. Дано: $6x^4-29x^3-89x^2-19x+35=0$

Решение. Делители свободного числа: .

Находим по схеме Горнера целочисленные решения уравнения:

	6	-29	-89	-19	35
1	6	-23	-112	-131	
-1	6	-35	-54	35	0
5	6	1	-84	-439	
7	6	13	2	-5	0

Итак, $6x^4-29x^3-89x^2-19x+35=(x+1)(x-7)(6x^2+7x-5)=0$,

$x+1=0$ или $x-7=0$ или $6x^2+7x-5=0$

$x_1=-1$, $x_2=7$, $x_{3,4}=$ – –.

Ответ: – –

Пример 5. Решить уравнение: $x^5+5x-42=0$

Решение. Делители свободного числа:

Находим по схеме Горнера целочисленные решения уравнений:

	1	0	0	0	5	-42	
-1	1	-1	1	-1	6		
1	1	1	1	1	6		
-2	1	-2	4	-8	21		
2	1	2	4	8	21	0	Корень

$x^4+2x^3+4x^2+8x+21=0$

Делители свободного числа:

	1	2	4	8	21
-1	1	1	3	5	6
1	1	3	7	15	36
-21	1	-19	403	-8455	177576
21	1	23	487	10235	214956

Ответ: $x=2$.

Пример 6. Дано: $x^4-8x+63=0$

Решение. Делители свободного числа:

Решаем по схеме Горнера:

	1	0	0	-8	63
-1	-1	1	-1	-7	70
1	1	1	1	-7	70
-63	1	63	-3969	Не корень	
63	1	63	3969	Не корень	

Ответ: решений нет.

Пример 7. Решить уравнение: $x^4-4x^3-13x^2+28x+12=0$

Решение. Делители свободного числа**:**

По схеме Горнера находим целочисленные решения уравнения:

	1	-4	-13	28	12	
1	1	-3	-16	12	24	
2	1	-2	-17	-6	0	Корень
3	1	-1	-16	-20		
-3	1	-7	8	4	0	Корень

Уравнение принимает вид**:** $(x-2)(x+3)(x^2-5x-2)=0$

$x-2=0$ или $x+3=0$ или $x^2-5x-2=0$

$x_1=2$, $x_2=-3$, $x_{3,4}=$

Ответ: $x_1=2$, $x_2=-3$, $x_{3,4}=$

Список литературы:

1. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. В 2 ч. Ч.1 Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень). А.Г. Мордкович. Изд. «Мнемозина», 2010.
2. Профильное обучение математике старшеклассников. Учебно-дидактический комплекс. – Новосибирск. Сиб. унив. изд-во, 2003.
3. Математика. Интенсивный курс подготовки к экзамену. О. Ю. Черкасов, А. Г. Якушев. Москва, изд. “Айрис”, 1997.
4. Звавич Л. И., Шляпочник Л. Я., Чинкина М. В., Алгебра и начала анализа 8–11. Дидактические материалы, М: Дрофа, 1999.
5. Ивлев Б. М., Задачи повышенной трудности по алгебре и началам анализа: учебное пособие для 10–11 классов средней школы, М: Просвещение, 1990.

6. М. И. Шабунин. Алгебра и начала анализа. Дидактические материалы для 10-11 классов.
7. Тумаркин Л.А. «История математики», Москва, 1975 г.
8. Иванов К. Б., Сборник задач для старшеклассников, Волгоград, 2000.