**Лекция: «Методы решения показательных уравнений».**

**1**. ***Показательные уравнения.***

Уравнения, содержащиенеизвестные в показателе степени, называются показательными уравнениями. Простейшим из них является уравнение аx = b, где а > 0, а ≠ 1.

1) При b < 0 и b = 0 это уравнение, согласно свойству 1 показательной функции, не имеет решения.

2) При b > 0 используя монотонность функции и теорему о корне, уравнение имеет единственный корень. Для того, чтобы его найти, надо b представить в виде b = aс, аx = bс ⬄ x = c или x = logab.

Показательные уравнения путем алгебраических преобразований приводят к стандартным уравнения, которые решаются, используя следующие методы:

1. метод приведения к одному основанию ;
2. метод оценки;
3. графический метод;
4. метод введения новых переменных;
5. метод разложения на множители;
6. показательно – степенные уравнения;
7. показательные с параметром.

***2****.* ***Метод приведения к одному основанию.***

Способ основан на следующем свойстве степеней: если равны две степени и равны их основания, то равны и их показатели, т.е. уравнение надо попытаться свести к виду



**Примеры.** Решить уравнение:

**1**. 3x = 81;

Представим правую часть уравнения в виде 81 = 34 и запишем уравнение, равносильное исходному 3 x = 34; x = 4. Ответ: 4.

 **2.** 

Представим правую часть уравнения в виде и перейдем к уравнению для показателей степеней 3x+1 = 3 – 5x; 8x = 4; x = 0,5. Ответ: 0,5.

**3.** 

Представим правую часть данного уравнения в виде 1 = 50 и перейдем к уравнению для показателей степеней x2-3x+2 = 0, откуда легко получить решения x = 1 и x=2.

Ответ: 1 и 2.

**4.** 

Заметим, что числа 0,2 , 0,04 , √5 и 25 представляют собой степени числа 5. Воспользуемся этим и преобразуем исходное уравнение следующим образом:

**,** откуда 5-x-1 = 5-2x-2 ⬄ - x – 1 = - 2x – 2, из которого находим решение x = -1. Ответ: -1.

1. 3x = 5. По определению логарифма x = log35. Ответ: log35.
2. 62x+4 = 33x. 2x+8.

Перепишем уравнение в виде 32x+4.22x+4 = 32x.2x+8, т.е. далее

22x+4-x-8 = 33x-2x-4, т.е. 2x-4 = 3x-4. (Уже ясно, что x = 4). Перепишем уравнение, разделив на 3x-4 ≠ 0.  Отсюда x – 4 =0, x = 4. Ответ: 4.

**7**. 2∙3x+1 - 6∙3x-2 - 3x = 9. Используя свойства степеней, запишем уравнение в виде 6∙3x - 2∙3x – 3x = 9 далее 3∙3x = 9, 3x+1 = 32 , т.е. x+1 = 2, x =1. Ответ: 1.



**Банк задач №1.**

Решить уравнение:



**Тест №1.** с выбором ответа.Минимальный уровень.

|  |  |
| --- | --- |
| А1  3-x+2 = | 1) 0 2) 4 3) -2 4) -4 |
| А2 32x-8 = √3. | 1)17/4 2) 17 3) 13/2 4) -17/4 |
| А3 | 1) 3;1 2) -3;-1 3) 0;2 4) корней нет |
| А4 | 1) 7;1 2) корней нет 3) -7;1 4) -1;-7 |
| А5 | 1) 0;2; 2) 0;2;3 3) 0 4) -2;-3;0 |
| А6 | 1) -1 2) 0 3) 2 4) 1 |

**Тест №2**  с выбором ответа. Общий уровень.

|  |  |
| --- | --- |
| А1 | 1) 3 2) -1;3 3) -1;-3 4) 3;-1 |
| А2 | 1) 14/3 2) -14/3 3) -17 4) 11 |
| А3 | 1) 2;-1 2) корней нет 3) 0 4) -2;1 |
| А4 | 1) -4 2) 2 3) -2 4) -4;2 |
| А5 | 1) 3 2) -3;1 3) -1 4) -1;3 |

* + 1. ***Метод оценки.***

Теорема о корне: если функция f(x) возрастает (убывает) на промежутке I, число а –любое значение принимаемое f на этом промежутке, тогда уравнение f(x) = а имеет единственный корень на промежутке I.

При решении уравнений методом оценки используется эта теорема и свойства монотонности функции.

**Примеры.**  Решить уравнения: **1.** 4x = 5 – x.

Решение. Перепишем уравнение в виде 4x +x = 5.

1. если x = 1, то 41+1 = 5 , 5 = 5 верно, значит 1 – корень уравнения.

2. докажем, что он единственный.

Функция f(x) = 4x – возрастает на R, и g(x) = x –возрастает на R => h(x)= f(x)+g(x) возрастает на R, как сумма возрастающих функций, значит x = 1 – единственный корень уравнения 4x = 5 – x. Ответ: 1.

**2.** 

Решение. Перепишем уравнение в виде .

1. если x = -1, то , 3 = 3-верно, значит x = -1 – корень уравнения.
2. докажем, что он единственный.
3. Функция f(x) = - убывает на R, и g(x) = -x – убывает на R=> h(x) = f(x)+g(x) – убывает на R, как сумма убывающих функций. Значит по теореме о корне, x = -1 – единственный корень уравнения. Ответ: -1.

**Банк задач №2.**  Решить уравнение



а) 4x + 1 =6 – x;

б) 

в) 2x – 2 =1 – x;

***4. Метод введения новых переменных.***

Метод описан в п. 2.1. Введение новой переменной (подстановка) обычно производится после преобразований (упрощения) членов уравнения. Рассмотрим примеры.

**Примеры. Р**ешить уравнение: **1.** .

Перепишем уравнение иначе: 

Обозначим 5x = t > 0, тогда  т.е. 3t2 – 2t – 1 =0, отсюда t1 = 1, -не удовлетворяет условию t > 0. Итак, 5x = 1 = 50 <=> x = 0. Ответ: 0.

**2.** 

Решение. Перепишем уравнение иначе: 

Обозначим  тогда  - не подходит.

t = 4 =>  Отсюда  - иррациональное уравнение. Отмечаем, что 

Решением уравнения является x = 2,5 ≤ 4, значит 2,5 – корень уравнения. Ответ: 2,5.

**3. .**

Решение. Перепишем уравнение в виде  и разделим его обе части на 56x+6 ≠ 0. Получим уравнение



2x2-6x-7 = 2x2-6x-8 +1 = 2(x2-3x-4)+1, т.е 

Заменим



Корни квадратного уравнения – t1 = 1 и t2 <0, т.е. ,

x2-3x-4=0

x1 = -1, x2 = 4. Ответ: -1, 4.

**4. .**

Решение**.** Перепишем уравнение в виде 

и заметим, что оно является однородным уравнением второй степени.

Разделим уравнение на 42x, получим 

Заменим  2t2 – 5t +3 = 0 , где t1 = 1, t2 =  .



Ответ: 0; 0,5.

**Банк задач № 3.** Решить уравнение

а) 

б) 

в) 

г) 

**Тест № 3** с выбором ответа. Минимальный уровень.

|  |  |
| --- | --- |
| А1 | 1) -0,2;2 2) log52 3) –log52 4) 2 |
| А2 0,52x – 3 0,5x +2 = 0. | 1) 2;1 2) -1;0 3) корней нет 4) 0 |
| А3 | 1) 0 2) 1; -1/3 3) 1 4) 5 |
| А4 52x-5x- 600 = 0. | 1) -24;25 2) -24,5; 25,5 3) 25 4) 2 |
| А5 | 1) корней нет 2) 2;4 3) 3 4) -1;2 |

**Тест № 4** с выбором ответа. Общий уровень.

|  |  |
| --- | --- |
| А1 | 1) 2;1 2) ½;0 3)2;0 4) 0 |
| А2 2x – (0,5)2x – (0,5)x + 1 = 0 | 1) -1;1 2) 0 3) -1;0;1 4) 1 |
| А3 | 1) 64 2) -14 3) 3 4) 8 |
| А4 | 1)-1 2) 1 3) -1;1 4) 0 |
| А5 | 1) 0 2) 1 3) 0;1 4) корней нет |

***5. Метод разложения на множители.***

**1.** Решите уравнение: 5x+1 - 5x-1 = 24.

Решение. Перепишем уравнение в виде 

Теперь в левой части уравнения вынесем за скобки общий множитель 5x.

Получим  , откуда

Ответ: 1.

**2.** 6x + 6x+1 = 2x + 2x+1 + 2x+2.

Решение. Вынесем за скобки в левой части уравнения 6x, а в правой части – 2x. Получим уравнение 6x(1+6) = 2x(1+2+4) ⬄ 6x = 2x.

Так как 2x >0 при всех x, можно обе части этого уравнения разделить на 2x, не опасаясь при этом потери решений. Получим 3x = 1⬄ x = 0.

Ответ: 0.

**3. **

Решение. Решим уравнение методом разложения на множители.

Выделим квадрат двучлена ****

Ответ: 2.

**4.** 

Решение. Преобразуем члены уравнения и перегруппируем слагаемые



x = -2 – корень уравнения.

Уравнение x + 1 = можно решить либо методом оценки, либо графически.

x = 1 – второй корень исходного уравнения.

Ответ: 1; -2.

**Банк задач №4.** Решить уравнение

а) 48x – 42x+1 – 3x+1 + 12 = 0.

б) 52x-1 + 22x – 52x +22x+2 = 0.

в) 3x – 2x+2 = 3x-1 – 2x-1 – 2x-3.

г) 4x – 5 2x+ 4 = 0.

**Тест №5** Минимальный уровень.

|  |  |
| --- | --- |
| А1 5x-1 +5x -5x+1 =-19. | 1) 1 2) 95/4 3) 0 4) -1 |
| А2 3x+1 +3x-1 =270. | 1) 2 2) -4 3) 0 4) 4 |
| А3 32x + 32x+1 -108 = 0. x=1,5 | 1) 0,2 2) 1,5 3) -1,5 4) 3 |
| А4  x=1 | 1) 1 2) -3 3) -1 4) 0 |
| А5  2x -2x-4 = 15. x=4 | 1) -4 2) 4 3) -4;4 4) 2 |

**Тест № 6** Общий уровень.

|  |  |
| --- | --- |
| А1 (22x-1)(24x+22x+1)=7. | 1) ½ 2) 2 3) -1;3 4) 0,2 |
| А2 | 1) 2,5 2) 3;4 3) log43/2 4) 0 |
| А3 2x-1-3x=3x-1-2x+2. | 1) 2 2) -1 3) 3 4) -3 |
| А4 | 1) 1,5 2) 3 3) 1 4) -4 |
| А5 | 1) 2 2) -2 3) 5 4) 0 |

***6. Показательно – степенные уравнения.***

К показательным уравнениям примыкают так называемые показательно – степенные уравнения, т.е. уравнения вида (f(x))g(x) = (f(x))h(x).

Если известно, что f(x)>0 и f(x) ≠ 1, то уравнение, как и показательное, решается приравниванием показателей g(x) = f(x).

Если условием не исключается возможность f(x)=0 и f(x)=1, то приходится рассматривать и эти случаи при решении показательно – степенного уравнения.

1. Решить уравнение 

Решение. Для нахождения корней уравнения следует рассмотреть четыре случая:

1. x + 1=x2 – 1 ( показатели равны);
2. x = 1(основание равно единице);
3. x = 0 (основание равно нулю);
4. x = -1(основание равно -1).

Решим первое уравнение: x2 – x – 2 = 0, x = 2, x = -1.

Проверка:

x1 = 2 => 23 = 23 – верно;

x2 = -1 => (-1)0 =(-1)0 – верно;

x3 = 1 => 12 = 10 – верно;

x4 = 0 => 01 = 0(-1) – не имеет смысла.

Ответ: -1; 1; 2.

Уравнение вида f(x)g(x) = 1 равносильно совокупности двух систем

f(x)g(x) = 1 

2. 

Решение. x2 +2x-8 – имеет смысл при любых x , т.к. многочлен, значит уравнение равносильно совокупности

Ответ: -2; 2.

**Банк задач №5.** Решить уравнение

а) 

б) 

# *7. Показательные уравнения с параметрами.*

1. При каких значениях параметра p уравнение 4 (5 – 3)2 +4p2–3p = 0 (1)   имеет единственное решение?

Решение. Введем замену 2x = t, t > 0, тогда уравнение (1) примет вид t2 – (5p – 3)t + 4p2 – 3p = 0.  (2)

Дискриминант уравнения (2)  D = (5p – 3)2 – 4(4p2 – 3p) = 9(p – 1)2.

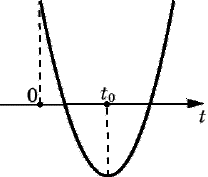
Уравнение (1) имеет единственное решение, если уравнение (2) имеет один положительный корень. Это возможно в следующих случаях.

1. Если D = 0, то есть p = 1, тогда уравнение (2) примет вид t2 – 2t + 1 = 0, отсюда t = 1, следовательно, уравнение (1) имеет единственное решение x = 0.

2. Если p1, то 9(p – 1)2 > 0, тогда уравнение (2) имеет два различных корня t1 = p, t2 = 4p – 3. Условию задачи удовлетворяет совокупность систем

no35_08

Подставляя t1 и t2 в системы, имеем

no35_09

или

no35_10

Ответ: p = 1, 0 < p 0,75.

Рассмотрим более общую задачу.

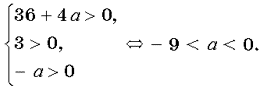
Задача 2. Сколько корней имеет уравнение no35_11 в зависимости от параметра a?

Решение. Пусть  no35_12тогда уравнение (3) примет вид t2 – 6t – a = 0.       (4)

Найдем значения параметра a, при которых хотя бы один корень уравнения (4) удовлетворяет условию t > 0.

Введем функцию f(t) = t2 – 6t – a. Возможны следующие случаи.

Случай 1. Уравнение (4) имеет два различных положительных корня, если выполнятся условия

где t0 — абсцисса вершины параболы и D — дискриминант квадратного трехчлена f(t);

http://1september.ru/ru/mat/2002/35/no35_15.gifТаким образом,

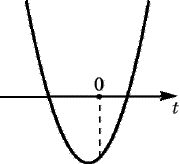
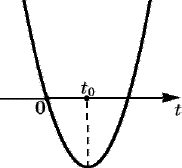
при – 9 < a < 0 уравнение (3) имеет два корня

http://1september.ru/ru/mat/2002/35/no35_16.gif

Случай 2. Уравнение (4) имеет единственное положительное решение, если

D = 0, если a = – 9, тогда уравнение (4) примет вид  (t – 3)2 = 0, t = 3, x = – 1.

Случай 3. Уравнение (4) имеет два корня, но один из них не удовлетворяет неравенству t > 0. Это возможно, если

no35_17

Таким образом, при a 0 уравнение (4) имеет единственный положительный корень no35_18. Тогда уравнение (3) имеет единственное решение  no35_19

При a < – 9 уравнение (3) корней не имеет.

Ответ:

http://1september.ru/ru/mat/2002/35/no35_21.gifесли a < – 9, то корней нет; если – 9 < a < 0, то  
если a = – 9, то x = – 1;

если a  0, то

http://1september.ru/ru/mat/2002/35/no35_20.gif

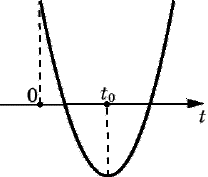
Сравним способы решения уравнений (1) и (3). Отметим, что при решении уравнение (1) было сведено к квадратному уравнению, дискриминант которого — полный квадрат; тем самым корни уравнения (2) сразу были вычислены по формуле корней квадратного уравнения, а далее относительно этих корней были сделаны выводы. Уравнение (3) было сведено к квадратному уравнению (4), дискриминант которого не является полным квадратом, поэтому при решении уравнения (3) целесообразно использовать теоремы о расположении корней квадратного трехчлена и графическую модель. Заметим, что уравнение (4) можно решить, используя теорему Виета.

Решим более сложные уравнения.

Задача 3. Решите уравнение no35_22

Решение. ОДЗ: x1, x2.

Введем замену. Пусть 2x = t, t > 0, тогда в результате преобразований уравнение примет вид t2 + 2t – 13 – a = 0.         (\*)Найдем значения a, при которых хотя бы один корень уравнения (\*) удовлетворяет условию t > 0.

Рассмотрим функцию f(t) = t2 + 2t – 13 – a. Возможны случаи.

Случай 1. Для того чтобы оба корня уравнения (\*) удовлетворяли неравенству t > 0, должны выполняться условия

где t0 — абсцисса вершины f(t) = t2 + 2t – 13 – a, D — дискриминант квадратного трехчлена f(t).

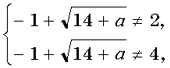


Система решений не имеет.

Случай 2. Для того чтобы только один корень уравнения (\*) удовлетворял неравенству t > 0, должно быть выполнено условие f(0) < 0, то есть a > – 13.

http://1september.ru/ru/mat/2002/35/no35_25.gif

Тогда



Случай 3. Найдем значения a, когда t  2, t  4.

откуда a  11, a  – 5.

http://1september.ru/ru/mat/2002/35/no35_27.gif

Ответ: если a > – 13, a  11, a  5, то  если a – 13,

a = 11, a = 5, то корней нет.

**Список используемой литературы.**

1. Гузеев В.В. Системные основания образовательной технологии.

М. 1995 г.

2. Гузеев В.В. Образовательная технология: от приема до философии.

М. «Директор школы»№4, 1996 г.

3. Гузеев В.В. Методы и организационные формы обучения.

М. «Народное образование», 2001 г.

4. Гузеев В.В. Теория и практика интегральной образовательной технологии.

М. «Народное образование», 2001 г.

5. Гузеев В.В. Одна из форм урока – семинара.

Математика в школе №2, 1987 г. с .9 – 11.

6. Селевко Г.К. Современные образовательные технологии.

М. «Народное образование», 1998 г.

7. Епишева О.Б. Крупич В.И. Учить школьников учиться математике.

М. «Просвещение», 1990 г.

8. Иванова Т.А. Как подготовить уроки – практикумы.

Математика в школе №6, 1990 г. с. 37 – 40.

9. Смирнова Н.М. Профильная модель обучения математике.

Математика в школе №1, 1997 г. с. 32 – 36.

10. Тарасенко Н.А. Некоторые способы организации практической работы.

Математика в школе №1, 1993 г. с. 27 – 28.

11. Утеева Р.А. Об одном из видов индивидуальной работы.

Математика в школе №2, 1994 г. с .63 – 64.

12. Хазанкин Р.Г. Развивать творческие способности школьников.

Математика в школе №2, 1989 г. с. 10.

13. Сканави М.И. Математика. Издатель В.М.Скакун, 1997 г.

14. Шабунин М.И. и др. Алгебра и начала анализа. Дидактические материалы для

10 – 11 классов. М. Мнемозина, 2000 г.

15. Кривоногов В.В. Нестандартные задания по математике.

М. «Первое сентября», 2002 г.

16. Черкасов О.Ю. Якушев А.Г. Математика. Справочник для старшеклассников и

поступающих в вузы. «А С Т -пресс школа», 2002 г.

17. Жевняк Р.М. Карпук А.А. Математика для поступающих в вузы.

Минск И РФ «Обозрение», 1996 г.

18. Письменный Д. Готовимся к экзамену по математике. М. Рольф, 1999 г.

19. Денищева Л.О. и др. Учимся решать уравнения и неравенства.

М. «Интеллект – Центр», 2003 г.

20. Денищева Л.О. и др. Учебно – тренировочные материалы для подготовки к Е Г Э.

М. «Интеллект – центр», 2003 г. и 2004 г.

21 Денищева Л.О. и др. Варианты КИМ. Центр тестирования МО РФ, 2002 г., 2003г.

22. Гольдберг В.В. Показательные уравнения. «Квант» №3, 1971 г.

23. Волович М. Как успешно обучать математике.

Математика, 1997 г. №3.

24 Окунев А.А. Спасибо за урок, дети! М. Просвещение, 1988 г.

25. Якиманская И.С. Личностно – ориентированное обучение в школе.

«Директор школы», 1996 г. сентябрь.

26. Лийметс Х. Й. Групповая работа на уроке. М. Знание, 1975 г.