

|  |
| --- |
| **Инварианты**  |
|  Сборник задач  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  Зуев Михаил Алексеевич |
|  Томск – 2012 |

 *Муниципальное автономное образовательное учреждение гимназия №29 г.Томска.Адрес гимназии: г.Томск, ул. Новосибирская, д.39тел./ факс директор(382 2) 67 86 91; заместители(382 2) 67 54 80;e-mail: gimnasium29@tomsk.netОКПО 36286650, ИНН/КПП 7020014830/701701001*

**Задачи**

**Задачи на чётность**

1. На листе бумаги написано число 11. Шестнадцать учеников передают листок друг другу, и каждый прибавляет к числу или отнимает от него единицу – как хочет. Может ли в результате получиться число 0?
2. На вешалке висят 20 платков. 17 девочек по очереди подходят к вешалке и либо снимают, либо вешают платок. Может ли после ухода девочек остаться ровно 10 платков?
3. В таблице, где имеются 15 чисел (-1), можно производить следующую операцию: одновременно изменить знак двух (не более, не меньше) чисел в таблице. Можно ли, применяя эту операцию конечное число раз, получить таблицу, состоящую из (+ 1)?
4. На доске написаны числа 1, 2, 3, …, 1998. За один ход разрешается стереть любые два числа и вместо них записать их разность. В результате многократного выполнения таких действий на доске окажется записанным одно число. Может ли оно быть нулем?
5. 0,1,2,3, …, 9 записаны по кругу. За один ход разрешается прибавить к двум соседним числам одно и то же целое число. Можно ли за несколько ходов получить десять нулей?
6. На доске написаны числа 0, 1, 0, 0. За один шаг разрешается прибавлять единицу к любым двум из них. Можно ли, повторяя эту операцию, добиться, чтобы все числа стали равными?
7. На бесконечной шахматной доске на двух соседних по диагонали чёрных полях стоят две чёрные шашки. Можно ли дополнительно поставить на эту доску некоторое число чёрных шашек и одну белую таким образом, чтобы белая одним ходом взяла все чёрные шашки, включая две первоначально стоявшие?
8. На столе стоят 16 стаканов. Из них 15 стаканов стоят правильно, а один перевернут донышком вверх. Разрешается одновременно переворачивать любые четыре стакана. Можно ли, повторяя эту операцию, поставить все стаканы правильно?
9. На числовой оси отмечены все точки с целыми координатами. Разрешается прыгать на 1 и на 4 клетки вправо или влево. Можно ли за 2010 таких прыжков попасть из точки 1 в точку 2, ни разу не попав в точки, координат которых кратны 4?

**Задачи на делимость**

1. Из цифр 2, 3, 4,… 9 составили два натуральных числа. Каждая цифра использовалась один раз. Могло ли одно из этих чисел оказаться вдвое больше другого?
2. На доске написаны числа 1, 2, …, 1998. За один ход разрешается стереть любое количество чисел и вместо них записать остаток от деления их суммы на 11. Через несколько ходов на доске остались два числа, одно из которых – 1000. Чему равно второе число?
3. В некотором государстве было 10 банков. С момента перестройки общества все захотели стать банкирами. Но по закону открыть банк можно только путем деления уже существующего банка на 4 новых. Через некоторое время министр финансов сообщил президенту, что в стране действует 2007 банков, после чего был немедленно уволен за некомпетентность. Что не понравилось президенту?
4. На доске написаны числа 2, 6, -5, 3. Разрешается проделывать 2 операции:
	* + 1. За раз увеличить любое из этих чисел на 2 и уменьшить любое другое на 6;
			2. За раз увеличить любое из этих чисел на 3, увеличить любое другое на 1 и увеличить любое третье на 4.

Можно ли проделывания эти 2 операции уравнять числа?

1. Сумасшедший кассир меняет любые две монеты на любые три по вашему выбору, а любые три — на любые две. Сможете ли вы обменять у него 100 монет достоинством 1 рубль на 100 монет достоинством 1 форинт, отдав ему при обмене ровно 2012 монет?

**Задачи с полуинвариантами**

1. В десяти сосудах содержится 1, 2, 3,…, 10 литров воды. Разрешается перелить из сосуда А в сосуд В столько воды, сколько имеется в В. Можно ли добиться, чтобы после нескольких переливаний в 5 сосудах оказалось 3 литра, а в остальных 6, 7, 8, 9, 10?

**Задачи с неклассифицированными инвариантами**

1. На доске в лаборатории написаны два числа. Каждый день старший научный сотрудник Петя стирает с доски оба числа и пишет вместо них их среднее арифметическое и среднее гармоническое. Утром первого дня на доске были написаны числа 1 и 2.
Найдите произведение чисел, записанных на доске вечером 1999-го дня. (Средним арифметическим двух чисел a и b называется число $\frac{a+b}{2}$, а средним гармоническим – число ).

1. На [шахматной доске](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A8%D0%B0%D1%85%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D0%B4%D0%BE%D1%81%D0%BA%D0%B0) стоит черный [слон](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D0%BB%D0%BE%D0%BD) и белая [ладья](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9B%D0%B0%D0%B4%D1%8C%D1%8F). Белые, как водится, ходят первыми. Могут ли чёрные выиграть и, если да, при какой тактике (оба игрока стараются выиграть)?
2. Имеется шахматная доска, из которой вырезали два противоположных угловых поля. Можно ли покрыть ее целиком фигурами домино размером 2 × 1 таким образом, чтобы каждое поле было полностью покрыто одной и только одной фигурой домино?

**Решения:**

**Задачи на чётность**

* 1. После каждого хода характер четности меняется: после первого ученика число становится четным, после второго нечетным; после третьего - четным; после четвертого – нечетным. **Инвариант:** чётность числа противоположна чётности ученика. Тогда после шестнадцатого число будет нечетным. Поэтому нуль в конце получиться не может. **Ответ:** нет.
	2. После подхода первой девочки количество оставшихся платков либо 19, либо 21 (нечетное количество); после подхода второй девочки – либо 18, либо 20, либо 22 (четное количество); после подхода третьей девочки – либо 17, либо 21, либо 23, либо 19 (нечетное количество). **Инвариант:** чётность кол-ва платков та же, что и чётность подхода. После подхода 17 девочки остается нечетное количество платков. Получается противоречие. Значит, 10 платков остаться не может. **Ответ:** нет.
	3. Количество отрицательных чисел вначале 15. Рассмотрим различные варианты операций: замена знака у двух отрицательных чисел (-2 отрицательных числа), замена знака у двух положительных чисел (+2 отрицательных числа), замена знака у 1 отрицательного и у 1 положительного чисел (+1-1=0). **Инвариант:** чётность кол-ва отрицательных чисел не изменяется. В таблице из 15 чисел +1, 0 отрицательных чисел (чётное число), а вначале 15 (нечётное число). По инварианту получается противоречие. **Ответ:** нельзя.
	4. Не может. Так как вначале на доске 999 нечетных чисел. Рассмотрим различные варианты разности: 2х-2у =2(х-у) — чётное число, 2х-(2у+1)=2(х-у)-1— нечётное число, 2х+1-2у=2(х-у)+1— нечётное число, 2х+1-(2у+1)=2(х-у)— чётное число. **Инвариант:** На каждом шаге их количество не меняется, если среди выбранных чисел не более одного нечетного числа. А если выбранные числа оба нечетны, то количество нечетных чисел уменьшается на два. Таким образом, инвариант преобразования: количество нечетных чисел нечетно. Поэтому в конце должно остаться нечетное число. А нуль – четное число. **Ответ:** нет.
	5. Рассмотрим различные варианты сочетания чисел, которые увеличивают и чисел, на которые увеличивают:
1. К 2-м чётным числам прибавляем чётное число:
	1. 2х+2z=2(x+z) (чётное число);
	2. 2у+2z=2(y+z) (чётное число).

Разность между кол-вом чётных и нечётных чисел не изменилась.

1. К 2-м чётным числам прибавляем нечётное число:
	1. 2x+2z+1=2(x+z)+1 (нечётное число);
	2. 2y+2z+1=2(y+z)+1 (нечётное число).

Разность между кол-вом чётных и нечётных чисел изменилась на чётное число.

1. К 2-м нечётным числам прибавляем нечётное число:
	1. 2x+1+2z+1=2z+2x+2=2(x+z+1) (чётное число);
	2. 2y+1+2z+1=2y+2z+2=2(x+z+1) (чётное число).

Разность между кол-вом чётных и нечётных чисел изменилась на чётное число.

1. К 2-м нечётным числам прибавляем чётное число:
	1. 2x+1+2z=2(x+z)+1 (нечётное число);
	2. 2y+1+2z=2(y+z)+1 (нечётное число).

Разность между кол-вом чётных и нечётных чисел не изменилась.

1. К чётному и нечётному числам прибавляем чётное число:
	1. 2x+2z=2(x+z) (чётное число);
	2. 2y+1+2z=2(y+z)+1 (нечётное число).

Разность между кол-вом чётных и нечётных чисел не изменилась.

1. К чётному и нечётному числа прибавляем нечётное число:
	1. 2x+2z+1=2(x+z)+1 (нечётное число);
	2. 2y+1+2z+1=2y+2z+2=2(x+z+1) (чётное число).

Разность между кол-вом чётных и нечётных чисел не изменилась.

 Разность между кол-во чётным и нечётных чисел изменяется только на чётное число. **Инвариант:** Чётность суммы чисел не изменяется. Сумма всех чисел вначале 0+1+2+3+4+5+6+7+8+9=45 – нечётное число. Сумма 10-и нулей – чётное число. Значит, 10 нулей получить нельзя. **Ответ:** нельзя.

* 1. После каждого хода сумма всех чисел увеличивается на 2, а значит, чётность суммы всех чисел не изменяется. **Инвариант:** На каждом ходе чётность суммы чисел не изменяется. Вначале сумма чисел – 1 – число нечётное. Сумма 4-х одинаковых чисел – 4х – число чётное. Значит, равными числа стать не могут. **Ответ:** нельзя
	2. Представим эту доску как плоскость с декартовой системой координат, и точки с целыми координатами будут являться клетками. Пусть (x;y) – координаты белой шашки. Тогда, когда она будет рубить чёрную, её координата по оси абсцисс будет x±2.

**Инвариант:** координата по оси абсцисс не меняет чётность. Координата по оси абсцисс у чёрной шашки, которую рубит белая, всегда имеет другую чётность, нежели белая. А т.к. начальные шашки по условию имеют координату х разной чётности, то по инварианту срубить их обе не получится. **Ответ:** нельзя

* 1. Обозначим правильно стоящий стакан за 1, а неправильно за 0. Рассмотрим различные ситуации, при которых переворачивают стаканы:
		1. 4 стакана стоят правильно (1, 1, 1, 1). После переворачиваний получаем 4 неправильно стоящих стакана (0, 0, 0, 0). 4-0=4.Сумма уменьшилась на 4.
		2. 3 стакана стоят правильно, 1 неправильно (1, 1, 1, 0). После переворота получаем 3 неправильно стоящих и 1 правильно стоящий стаканы (0, 0, 0, 1). 3-1=2. Сумма уменьшилась на 2.
		3. 2 стакана стоят правильно, 2 неправильно (1, 1, 0, 0). После переворота получаем 2 неправильно и 2 правильно стоящих стакана (0, 0, 1, 1). 2-2=0. Сумма не изменилась
		4. 1 стакан стоит правильно, 3 неправильно (1, 0, 0, 0). После переворота получаем 1 неправильно и 3 правильно стоящие стаканы (0, 1, 1, 1). 1-3=-2. Сумма увеличилась на 2.
		5. 4 стакана стоят неправильно (0, 0, 0, 0). После переворота получаем 4 правильно стоящих стакана (1, 1, 1, 1). 0-4=-4. Сумма увеличилась на 4.

Во всех случаях сумма изменялась на чётное число. **Инвариант:** кол-во неправильно стоящих стаканов может изменяться только на чётное число или чётность кол-ва неправильно стоящих стаканов не изменяется. Вначале у нас 1 неправильно стоящий стакан (нечётное число). После серии переворачиваний кол-во неправильно стоящих стаканов должно стать 0 (чётное число).

Но по инварианту это невозможно. **Ответ:** нельзя.

* 1. Т.к. нам нельзя попадать на клетки формата 4n, то вся ось разбивается на интервалы с длиной 4. Между этими интервалами можно перемещаться только прыжками на 4. Т.к. 1 и 2 находятся в одном интервале, то количество прыжком на 4 влево, равно кол-ву прыжков на 4 вправо.

Пусть а – кол-во прыжков на 4 влево, тогда а – кол-во прыжков на 4 впаво, b­­ – кол-во прыжков на 1 вправо, с – кол-во прыжков на 1 влево. Получаем, что совокупность всех прыжков можно представить в виде такого многочлена:

х+b+4а-4а+с=у

b=с+(у-х)

Отсюда кол-во прыжков на 1 равно: с+с+(у-х)=2с+(у-х), а кол-во всех прыжков: 2а+2с+(у-х). Значит, инвариант формулируется следующим образом: чётность разности начальной и конечность точи равна чётности количества прыжков. В нашем случаи у=2, х=1, 2-1=1, а значит число прыжков должно быть нечётным числом. А 2010 – чётное число. Значит, за 2010 прыжков нельзя попасть из 1 в 2. **Ответ:** нельзя.

**Задачи на делимость**

1. Пусть а – первое число, тогда 2а – второе. По признаку делимости на 3 сумма цифр имеет тот же остаток от деления на 3, что и само число. **Инвариант:** сумма чисел имеет тот же остаток от деления, что и сумма всех их цифр. Сумма чисел а+2а=3а делится на 3, значит, сумма цифр 1-го и 2-го числе делится на 3. 2+3+4+5+6+7+8+9=44 не делится на 44, а значит составить такие числа нельзя. **Ответ:** нет
2. Так как в конечном итоге на доске оказались записанными два числа, то хотя бы одно из них является остатком от деления некоторого числа на 11, т.е. не превосходит 10.Число 1000 не может являться остатком от деления какого-то числа на 11, поэтому искомое число не больше 10. Заметим, что в результате выполнения указанных операций остаток от деления суммы всех написанных чисел не изменится, так как для любых чисел а и в (а + в)(mod p)  (a(mod p) + b(mod p))(mod p), где р – произвольное простое число. Первоначально 1 + 2 + … +1998 = 1997001  6 (mod 11)  1000 (mod p) + второе число. Так как 1000  10 (mod 11), то второе число 7. **Ответ:** 7.
3. При делении число банков увеличивается на 3 (1 был, 4 стало. 4-1=3). **Инвариант:** в любой момент времени число банков можно представить в виде 10 + 3а, где а – целое число. 2007-10=1997. 1997/3=665,(6). Значит, 2007 банков получиться не могло.
4. Рассмотрим каждую из операций:
	* + 1. Пусть a+b+c+d – сумма 4-х чисел. Тогда после операции она будет равна:

a+b+c+d+2-6=a+b+c+d-4

* + - 1. Пусть a+b+c+d – сумма 4-х чисел. Тогда после операции она будет равна:

a+b+c+d+3+1+4=a+b+c+d+8

В обоих случаях сумма чисел изменяется на число кратное 4-м, а значит **инвариант:** Остаток от деления суммы чисел на 4 не изменяется.

(2+6-5+3) mod (4)= 6 mod (4) = 2 – остаток от деления на 4 суммы начальных чисел.

Сумма 4-х равных чисел имеет вид 4х.

4x mod (4) = 0.

2≠0.

**Ответ:** нельзя.

1. Когда мы меняем 2 монеты на 3, то общее кол-во монет увеличивается на 1. Пусть всего мы произвели n таких обменов. Тогда при обменах мы отдали 2n монет.

Для сохранения общего кол-ва монет нам нужно обменивать 3 монеты на 2. Т.к. общее кол-во монет будет уменьшаться на 1, то таких обменов будет тоже n. Тогда при обмене мы отдадим 3n монет.

Всего при обмене мы отдадим 2n+3n=5n монет. **Инвариант:** Число монет, которых мы отдадим при обмене, кратно 5 или x mod (5)=0, где x – число монет, которых нужно отдать при обмене. 2012 mod (5) = 2.

2≠0/

**Ответ:** не сможем.

**Задачи с полуинвариантами:**

1. Рассмотрим различные варианты переливания:
2. В сосуде А чётное число литров (2х). В сосуде В чётное число литров (2у). После переливания в сосуде А 2х-2у=2(х-у) литров (чётное число). В сосуде В 2у+2у=4у литров (чётное число). Количество чётных и нечётных чисел не изменилось.
3. В сосуде А нечётное число литров 2х+1. В сосуде В чётное число литров 2у. После переливания в сосуде А 2х+1-2у=2(х-у)+1 литров (нечётное число). В сосуде В 2у+2у=4у литров. (чётное число). Количество чётных и нечётных чисел не изменилось.
4. В сосуде А чётное число литров 2х. В сосуде В нечётное число литров 2у+1. После переливания в сосуде А 2х-(2у+1)=2х-2у-1=2(х-у)-1 литров (нечётное число). В сосуде В 2у+1+2у+1=4у+2=2(2у+1) литров (чётное число). Количество чётных и нечётных чисел не изменилось.
5. В сосуде А нечётное число литров 2х+1. В сосуде В нечётное число литров 2у+1. После переливания в сосуде А 2х+1-(2у+1)=2х+1-2у-1=2(х+у) литров (чётное число). В сосуде В 2у+1+2у+1=4у+2=2(2у+1) литров (чётное число). Число чётных литров увеличилось на 2, а нечётных уменьшилось на 2.

**Полуинвариант:** Кол-во нечётных чисел может уменьшаться только на чётное число. Соответственно кол-во чётных чисел может увеличиваться только чётное число. Т.е. число нечётных чисел не может увеличиваться, а число чётных не может уменьшаться.

Т.к. вначале кол-во чётных чисел равно кол-ву нечётных чисел и они равны по 5, а после переливание число чётных должно уменьшиться до 3, а число нечётных увеличиться до 7, то по обоим вариантам полуинварианта добиться таких чисел нельзя. **Ответ:** нельзя.

**Задачи с неклассифицированными инвариантами**

1. Избавимся от суммы обыкновенных дробей в знаменателе среднего гармонического чисел a и b:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab}$$

$$2:\frac{a+b}{ab}=\frac{2ab}{a+b}$$

Произведение среднего арифметического и среднего гармонического чисел a и b равно:

$$\frac{2ab}{a+b}∙\frac{a+b}{2}=\frac{2ab(a+b)}{2(a+b)}=ab$$

Значит, произведение 2-х чисел равно произведению среднего арифметического и среднего гармонического. **Инвариант:** произведение чисел написанных на доске не изменяется. Вначале произведение чисел на доске равно 1\*2=2. **Ответ:** 2.

1. **Инвариант:** слон ходит по клеткам одного цвета. И, поэтому, если ладья будет ходить только на клетки другого цвета, чёрные не смогут выиграть. **Ответ:** нет.
2. Т.к. размер доминошки 2х1, то 1 доминошка будет всегда будет покрывать 1 чёрное и 1 белое поле. Поэтому инвариантом здесь будет равенство чёрных и белых полей на шахматной доске или Б-Ч=0, где Ч – кол-во чёрный полей, а Б – кол-во белых полей. Т.к. противоположные поля одного цвета, то инвариант не будет выполнятся, а значит решений нет.