Авторская программа по математике для одаренных детей по теме

**избранные вопросы математики**

**“ Уравнения высших степеней”**

**9 класс**

**Выполнена: учителем математики**

**МБОУ СОШ №3 п.Редкино**

**Конаковского района**

**Тверской области**

**Алешиной М.В.**

2014 год.

Авторская программа по математике для одаренных детей по теме

**избранные вопросы математики**

**“ Уравнения высших степеней”**

**9 класс**

**Актуальность:**

Решение алгебраических уравнений высших степеней - одна из сложных тем в курсе математики. Знание способов решения различных уравнений высших степеней и умение применять их являются необходимым для успешной учебы в старших классах по профилю “Математика”.

**Цель:**

* + - * Расширение и углубление математических знаний
      * Создание целостного представления о теме “Уравнения высших степеней и расширение спектра задач, посильных для учащихся.
      * Осуществление единства уравнений и профильной дифференциации.

**Задачи:**

* + - * Познакомить учащихся с основными и нетрадиционными приемами и методами решения уравнений.
      * Содержание программы способствует интеллектуальному, творческому, эмоциональному развитию детей;
      * Формирование математического стиля мышления, развитие математической логики.
      * Предусматривает формирование устойчивого интереса к предмету;
      * Подготовить обучаемых к выбору профиля.
      * Повысить мотивацию обучения.

**Планируемые результаты:**

* Развитие познавательной активности и творческой самостоятельности обучаемых.
* Получение знаний, дающих им возможность осознанного выбора профиля дальнейшего обучения.

**Программа курса для учащихся 9-ого класса.**

**Уравнения высших степеней.**

**Пояснительная записка.**

Данная программа для учащихся 9-ого класса посвящен одной из важнейших тем алгебры - решению уравнений высших степеней.

В основной школе этой теме не уделяется достаточного внимания. Важные приемы, необходимые для решения уравнений, вообще отсутствуют, и в итоге все сводится к решению уравнений одного вида (биквадратные уравнения).

Предполагаемая программа является развитием системы ранее приобретенных знаний. Задания данного курса часто не просты в решении, что позволяет повысить учебную мотивацию учащихся. Ознакомление с методами и приемами решения уравнений высших степеней необходимо для успешного обучения в старшей школе, а также для сдачи ОГЭ.

Есть много уравнений, которые считаются для школьников задачами повышенной трудности. Для решения таких задач применяются нетрадиционные методы и приемы. При направляющей роли учителя школьники могут самостоятельно найти различные приемы решений уравнений, а также комбинируя данные.

**Содержание данной программы ориентировано на достижение следующих целей:**

- выработать навыки преобразования многочленов и решения различных алгебраических уравнений, - создать целостное представление о данной теме, значительно расширить спектр задач, посильных учащимся.

**Задачи:**

- познакомить школьников с различными методами решения, позволяющих расширить программу школьного курса.

- привить школьникам навыки использования нестандартных методов рассуждения при решении задач, способствующих развитию познавательного интереса и творческих наклонностей учащихся.

Освоение данного курса позволит развить интеллект, интерес к познавательной деятельности, будет способствовать приобретению опыта поиска информации, позволит осуществить сознательный выбор учащимися их будущего профиля. При изучении предполагается использование таких форм и методов работы, как семинарские занятия, самостоятельная работа, работа в парах и группах сменного состава, метод учебного проекта и озвучивание проектов решения уравнений. Применяемые формы и методы работы должны располагать к самостоятельному поиску решений.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Тема** | **Кол-во**  **часов** | **Формы контроля** |
| Многочлен. | 4ч. | Самостоятельная работа  Проверочная работа |
| Общие сведения об алгебраических уравнениях и многочленах. | 2ч. |
| Основные способы решения алгебраических уравнений | 8ч. |
| Проверка усвоенных знаний учащихся | 2ч. |
| Итого | 16ч |

**Планирование курса.**

**Содержание курса**

1.

* многочлен,
* деление многочлена на многочлен,
* теорема Безу,
* корни многочлена.

2.

* понятие алгебраического уравнения,
* равносильность уравнений, следствия уравнений,
* основная теорема высшей алгебры,
* из истории решения алгебраических уравнений,

3.

* способ разложения на множители (способ группировки и метод проб)
* способ введения новой переменной

а) решение симметричных и обобщенных возвратных уравнений,

б) решение однородных уравнений,

в) решение уравнений вида

(х + а)(х + b)(х + с)(х + d) = А, если а+d = с+b.

4.

* проверку усвоения знаний учащихся можно провести в форме контрольной работы с учетом возможностей учащихся.

**Содержание программы:**

1. **Многочлен. Корни многочлена. Деление многочлена на многочлен.**
2. Многочлен. Корни многочлена.

**Рn(х) = •+ • + • + ... +•x+ - многочлен с одной переменной, n N**

**N (если ≠ 0 - степень многочлена (старшая степень Х).**

Замечание:

а) любое действительное число, отличное от нуля - многочлен нулевой степени

б) 0 - многочлен, степень которого не определена (нулевой многочлен)

х0 - корень многочлена <=> Р (х0) = 0.

**Контрольные задания:**

**№1**

Какова степень многочлена:

а) Рn (х) = х б) Р n (х) = (х2- З)3 +1 в) Р n (х) = -2

n=1 n=6 n = 0

**№2**

1**)** Проверить, что х0 - корень многочлена Рn(х), если

а) Р4 (х) = 2х4 + 7х3 - 2х2 -13х + 6, х0 = 1

Р4(х) = 2•1 + 7•1 -2•1 - 13•1 + 6 = 2 + 7- 2 - 13 + 6= 15-15 =0

Т.к. Р4(1) = 0, то х0 = 1 - корень данного многочлена.

б) Р4(х)= (х2 + х)2 + 4(х2 + 1) - 12, х0 = -2

Р4(-2) = (4 - 2)2 + 4(4 + 1) -12 = 22 + 4-5 - 12 = 4 + 20 -12 = 24-12 = 12

Т.к. Р4 (-2) *≠* 0, то х0 = -2 - не является корнем данного многочлена.

1. Деление многочлена на многочлен.
2. Деление углом.

Правило деления многочлена на многочлен аналогично правилу деления чисел углом.

**Разделить многочлен Рп(х) на Gm(х) - это значит найти многочлен Qk(х) и Rр(х) такие, что имеет место равенство:**

**Рn(х) = Gm(х) • Qk(х) + Rр(х), где Рп(х) - делимое**

**Gm(х) - делитель**

**Qk(х) - частное**

**Rр(х) - остаток**

**n ≥ m > 0,** **k + m= n, р < m**, **рN,mN,kN.**

**Пример 1.**

Разделить многочлен Р4 (х) = + +1 на многочлен (х) = - + 1

+ +1 - + 1

-

+ +

+ + 1

+

-

- +

- + 1

-

- + 1

0

Rр (х) = 0 + +1 = + + 1) ( - + 1) + 0

Замечание:

В данном примере остаток от деления равен нулю.

В этом случае говорят, что многочлен Рn(х) делится на многочлен Оm(х).

**Пример 2**

Разделить многочлен (х) = Зх5 - 2х4 + х3 - 4х2 + 2х - 1

на многочлен (х) = х3 - х2 + 2х + 3.

Зх5 - 2х4 + х3 - 4х2 + 2х – 1 х3 - х2 + 2х + 3

- Зх5 - Зх4 + 6х3 + 9х2

+ - 4

х4- 5х3 - 13х2 + 2х -1

-

х4- х3 + 2х2 + Зх

- 4х3 - 15х2 - х - 1

- 4х3 + 4х2 - 8х - 12

\_ 19х2 + 7х +11

Зх5 - 2х4 + х3 - 4х2 + 2х - 1 = (Зх2 + х - 4)( х3 - х2 + 2х + 3) - 19х2 + 7х2 + 11

(х) = Зх2 + х - 4

R2(х) = - 19х2 +7х2+ 11

**Контрольное задание:**

Разделить многочлен (х) = х5 - 6х4 + 16х3 - 32х2 + 48х - 32 на (х) = х3 - 6х4 + 12х - 8

х5 - 6х4+ 16х3 - 32х2 + 48х – 32 х3 - 6х4 + 12х - 8

-

х5- 6х4 + 12х3 - 8х2 х2 + 4

4х3 - 24х2 + 48х – 32

-

4х3 - 24х2 + 48х - 32

0

Rр(х) = 0

(х) = х2 + 4

**II. Схема Горнера деления Рn (х) на (х - хо)**

а) Р4 (х) = х4 + х3 + х2 + х +

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *Коэффициент*  *при* | *Коэффициент*  *при* | *Коэффициент*  *при* | *Коэффициент*  *при* | *Свободный член* |
| *=*  *Коэффициент при* | *= + Коэффициент*  *при* | *= + Коэффициент*  *при* | *= +*  *Свободный член* | *= +* |

Делимое == делитель • частное + остаток

x4 + х3 + х2 + х +  **=** (- )( +  **+**  + ) +

многочлен 4-ой степени многочлен 3-ей степени

**Пример 1**

Р4(х) = х4 - 4х2 + 4х + 8, разделить на (х + 2).

Решение:

1. Р4(х) = 1\*х4 + 0\*х3 – 4\*х2 + 4\*х + 8,
2. х + 2 = 0, => = - 2

3.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| -2 | 1 | 0 | -4 | 4 | 8 |
| 1 | -2 | 0 | 4 | 0 |

при х3 при х2 при х свободный член остаток

б ) Р n (х) = хn + хn-1 + хn-2 + ... + х + ,

двучлен: х -

х4 - 4х2 + 4х + 8 = (х + 2)(х3 - 2х2 + 4)

частное: хn-1 + хn-2 + ... +х + ,

остаток:R

= ,

= + ,

=х0

-----------------------------

+

R= х0

=–

*------------------------------*

= - ,

+

= R -

хn + хn-1 + хn-2 + ... + х + =хn + (- ) хn-1 + ( - ) хn-2 + хn-2 + ...

+ ( +R -,

**Пример 2**

(х) = х5 + 2х3 - х + 3 разделить на (х + 2).

* + - 1. (х) = 1\*х5 + 0\*х4 + 2\*х3 + 0\*х2 - 1 \*х + 3,

2. х + 2 = 0, => = -2.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 2 | 1 | 0 | 2 | 0 | -1 | 3 |
| 1 | -2 | 6 | -12 | 23 | -43 |

Частное: х4- 2х3 + 6х2 - 12х + 23

Остаток: -43.

**Контрольное задание:**

1. Р б (х) = х6 + 9х3 + 32х + 16, разделить на (х +1)

Решение:

1. Рб(х) = 1 \*х6 + 0\*х5 + 0\*х4 + 9\*х3 + 0\*х2 + 32\*х + 16,
2. х + 1 = 0,=> = -1.

3.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| -1 | 1 | 0 | 0 | 9 | 0 | 32 | 16 |
| 1 | -1 | 1 | 8 | -8 | 40 | -24 |

Частное: х5 - х4 + х3 +8х2 - 8х + 40

Остаток: -24

**Пример 3**

Применяя схему Горнера, убедиться, что многочлен Р5(х) = х5 - 6х4 + 16 х3 - 32х2 + 48х - 32, делится на (х - 2)

Решение:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 2 | 1 | -6 | 16 | -32 | 48 | -32 |
| 1 | -4 | 8 | -16 | 16 | 0 |

Частное: х4 - 4х3 + 8х2 - 16х + 16

Остаток: 0

х5 - 6х4 + 16 х3 - 32х2 + 48х - 32 = (х4 - 4х3 + 8х2 - 16х + 16)(х - 2)

**III.Теорема Безу / французский ученый математик 18 в. /**

**Пример 1**

Найти остаток от деления многочлена Рз(х) = х3 + 5х2 - 6х - 6 на двучлен (х - 2)

х3 + 5х2 - 6х - 6 х – 2 х-2

-

х3- 2х2 х2 +7х + 8

7х2- 6х

-

7х2 -14х

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

8х- 6

-

8х- 16

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

10

10 - остаток

Р3(2)= 23 + 5\*22 – 6\*2 - 6 =8+20-12-6=28-18=10

R= Р3(2)=10

***Теорема***

***При делении многочлена на двучлен (х - а) остаток равен значению делимого при х = а****.*

Доказательство:

Пусть Рn(х) - произвольный многочлен n - ой степени относительно переменной х.

q k (х) - частное, R - остаток.

Рn(х) = (х - а)- q k (х) + **R,**

При х = а.

Рn (а) = (а - а) \* q k (а) +R, ((а - а) \* q k (а)=0)

Рn (а)= R.

**Следствие 1**

*Если многочлен делится без остатка на (х - а), то х = а - корень данного многочлена.*

**Следствие 2**

*Если х = а - есть корень данного многочлена, то это условие будет достаточным для делимости этого многочлена без остатка на (х - а)*

**Следствие 3**

*Если … - различные корни многочлена Рn(х),**то Рn(х)* *делится*

*на ((х - (х - а 2)(х- а 3) ... (х - ))*

**Следствие 4**

*Число различных корней многочлена, отлично от 0, не более, чем его степень.*

**У многочлена с целыми коэффициентами целые корни являются делителями свободного члена.**

Замечание: 1

Многочлен нечетной степени всегда имеет хотя бы один действительный корень.

Многочлен четной степени может и не иметь действительных корней; тогда на множестве действительных чисел он раскладывается на квадратичные множители с отрицательным дискриминантом.

**Пример 2.**

1) х4 + 2х3 + Зх2 + 4х + 2

2: ±1; ±2.

а) х = 1 - не корень, т. к.

1+ 2 + 3 + 4 + 2 = 12, 12 ≠ 0.

б)х = -1 - корень, т. к.

1-2 + 3- 4 + 2 = 0, 0 = 0.

в)х = 2 - не корень, т. к.

16+ 16+12 + 8 + 2 = 32 + 22 = 54, 54≠0.

г)х = -2 - не корень, т. к.

16-16 + 12-8 + 2 = 14-8 = 6,6 ≠ 0.

х4 + 2х3 + Зх2 + 4х + 2 х+1

-

х4 + х3

\_\_\_\_\_\_\_\_\_ х3 + х2 + 2х + 2

х3+ Зх2

-

х3+ х2

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

2х2 + 4х

-

2х2 + 2х

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

2х + 2

-

2х + 2

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

0

х4 + 2х3 + Зх2 + 4х + 2 = (х+1)( х3 + х2 + 2х + 2 )

2) х3 +3 х + 4

4: ±1; ±2; ±4

а) х = 1 – не корень, т. к.1+3+4=8,8≠0

б) х = -1 - корень, т. к. -1 -3 + 4 = 0, 0 = 0

х3 + 3х + 4 х+1

-

х3 + х2 х 2- х + 4

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

- х2+ 3х

-

- х2 - х

\_\_\_\_\_\_\_\_\_

4 х+4

-

4 х+4

\_\_\_\_\_\_\_\_

0

х3 +3 х + 4 = (х+1)(х2- х + 4)

х2- х + 4=0

D=1-16= -15,-15<0

1. х3 - 9х2 + 26х – 24

-24: ±1; ±2; ±3; ±6; ±8; ±12; ±24.

a) х = 1 **-** не корень, т. к. 1 - 9 + 26 - 24 = 27 - 33 = - 6, -6 ≠ 0.

б) х = - 1 **-** не корень, т. к. 1 – 9-26-24 = -60, - 60 ***≠*** 0.

в) х = 2 **-** корень, т. к. 8 - 36 + 52 - 24 = 60 - 60 = 0, 0 = 0.

х3 - 9х2 + 26х – 24 х - 2

х3 - 2х2

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ х2 - 7х +12

-7 х2+ 26х

-

-7 х2+ 14 х

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

12х - 24

-

12х - 24

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

0

х3 - 9х2 + 26х – 24 = (х – 2)(х2 - 7х +12 )

х2 - 7х +12=(х – 4)(х -3)

+ =7,

\* =12.

х3 - 9х2 + 26х – 24=(х – 2)(х – 4)( х -3)

4) х4 -5х3 + 5х2 + 5х -6

-6: ±1; ±2; ±3; ±6;

а) х= 1- корень, т. к. 1 - 5 + 5+5 - 6 = 0, 0= 0.

б) х= -1- корень, т. к. 1 + 5 + 5-5 - 6 = 0, 0= 0.

(х – 1)( х +1 )= х2 -1

х4 -5х3 + 5х2 + 5х -6 х2 -1

-

х4 –х2 х2 -5х + 6

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

-5х3 + 6х2

-

-5х3 + 5х

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

6х2- 6

**-**

6х2- 6

**\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_**

0

х4 -5х3 + 5х2 + 5х -6= (х2 -1) (х2 -5х + 6)

х2 -5х + 6=(х-2)(х-3)

+ =5,

\* = 6, 3.

х4 -5х3 + 5х2 + 5х -6= (х2 -1)(х-2)(х-3).

Решить уравнение:

**№1.** х3 - 2х2 - 5х + 6 = 0.

Решение:

6: ±1; ±2; ±3; ±6;

1) х = 1 — корень, т. к. 1-2 -5 + 6 = 0, 0 = 0.

2)х = -1 - не корень, т. к. -1-2 + 5 + 6 = 8, 8 0.

3)х = 2 - не корень, т. к. 8-8-10 + 6 = 14-18 = -4,-4≠0.

4)х = - 2 - корень, т. к. **-**8-8 **+** 10 **+** 6 **=** 0,0 **=** 0**.**

5)х = 3 - корень, т. к. 27-18-15 + 6 = 0,0 = 0.

6)х = - 3 - не корень, т. к.-27- 18- 15 + 6 = -45 + 21 =-24,-24≠0,

7)х = 6 - не корень, т. к. 216-72-30+6 = 222- 102=120,120≠0.

8)х = - 6 - не корень, т. к.-216 -72 + 30 + 6 ***=*** -252, -252≠0.

Ответ: = 1, = - 2, = 3.

**№2.** 2х3 + 5х2 + х -2 = 0.

Решение:

-2: ±1; ±2;

1)х = 1 - не корень, т. к.2 + 5+1-2= 6, 6 ***≠*** 0.

2)х = - 1 - корень, т. к.-2 + 5-1 -2 = 0, 0 = 0.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| -1 | 2 | 5 | 1 | -2 |
| 2 | 3 | -2 | 0 |

Q(x) = 2

Q(x) = 0,

2=0,

D=9+16=25,

= = 2,

= =,

Ответ: = 2, =,= -1.

**№3.** х3 - 5х + 4 = 0.

Решение:

4: ±1; ±2; ±4;

1. х =1 - корень, т. к.1-2 + 4 = 0, 0 = 0.
2. х = - 1 - не корень, т. к. -1+5 + 4 = 8, 8 ≠ 0
3. х = 2 - не корень, т. к. 8-10 + 4 = 2, 2 *≠*0
4. х = - 2 - не корень, т. к.+ 10 + 4 = 22, 22 ≠ 0.
5. х = 4 - не корень, т. к. 64 — 20 + 4 = 48, 48 ≠ 0.
6. х = - 4 - не корень, т. к.-64 + 20 + 4 = - 40, - 40 ≠ 0.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 1 | 0 | -5 | 4 |
| 1 | 1 | -4 | 0 |

= 0

= - ± = - ±

Ответ: - ± , 1.

**Задания для самостоятельной работы.**

1. Выполнить деление по схеме Горнера.

а) (х3 + 9х2 + 23х + 15): (х + 5), (указание: = -5)

б) (2х3 + 9х2 + 7х - 6): (х + 2),

в) Р(х) = х4 - Зх2 +6, = 2.

1. Найти корни многочлена, разложить его на множители.

а) х3 - х2 - 4х + 4,

б) х4 - 2х3 + 5х2 - 8х + 4,

в) х4 + х2 - 2х,

г) х4 - 2х3 - Зх2 - 8х – 4.

3) Решить уравнение:

а) х4 + 2х3 + Зх2 + 4х +2 = 0,

б) х4=16,

в) х4 - 2х3 - х2 + 2х = 0,

г) х3 + 6х2 +11х + 6 = 0.

Термин «алгебра» происходит от названия сочинения Мухаммеда аль-Хорезми «Альджебр аль-мукабала» (9 век), содержащего общие методы решения задач, сводящихся к уравнениям первой и второй степени. К середине 17 века в основном сложилась современная алгебраическая символика. Вплоть до 18 века под алгеброй понималось наука о буквенных вычислениях. В 18-19 веках предмет алгебры - это прежде всего изучение многочленов, теория алгебраических уравнений с одним неизвестным, теория систем линейных уравнений с несколькими неизвестными, а так же теория матриц и определителей.

Третий (современный) этап развития алгебры, как науки об алгебраических операциях начался в середине 19 века и был связан с появлением разнообразных примеров алгебраических операций над объектами совсем иной природы, нежели действительные числа. Первыми такими примерами явились умножения подстановок и операций над комплексными числами.

Методы решений линейных и квадратных уравнений были известны очень давно, в то время как открытие методов решения уравнения третьей и четвертой степени относится к 16 веку.

После этого почти три столетия продолжались безуспешные попытки сделать следующий шаг, то есть найти формулы, выражающие при помощи радикалов корни любого уравнения пятой степени через его коэффициенты. Эти попытки прекратились лишь после того, как Н.Х. Абель в двадцатых годах прошлого века доказал, что такие формулы, дающие решение уравнений п-й степени при любом п 5, заведомо не могут быть найдены.

Этот результат Абеля не исключал, однако, возможности того, что корни некоторых конкретных многочленов с числовыми коэффициентами все же каким-либо способом выражаются через коэффициенты при помощи некоторой комбинации радикалов.

Полностью вопрос об условиях, при которых данное уравнение разрешимо в радикалах, был исследован Э.Галуа в тридцатых годах прошлого века. В частности, им было показано, что для всякого п 5 можно указать неразрешимые в радикалах уравнения п-й степени, даже с целочисленными коэффициентами. Такими будет, например, уравнение

х5-4х-2=0.

Определение.

**Алгебраическим уравнением степени n называется уравнение вида Рn(х) =0, где Р(х) - многочлен степени n ≥1, nN.**

При решении алгебраических уравнений часто приходится разлагать многочлен Рп(х) на множители.

Разложить многочлен на множители - это значит представить его в виде произведения двух или нескольких многочленов.

Рассмотрим некоторые методы разложения многочленов на множители:

*Вынесение общего множителя.*

**Пример 1.**Решить уравнение

х3-Зх2+4х=0

х (х 2-Зх +4)=0

= 0 и х 2-Зх +4=0

Второе уравнение решений не имеет.

Ответ: 0.

*Применение формул сокращенного умножения.*

**Пример 2.**Решить уравнение

х3-25х = 0

х (х 2- 25) =0

х (х – 5) (х + 5)=0

Ответ: 0; 5; -5.

**Пример 3.**Решить уравнение

(х 2 +2 х)2 – (х + 1)2 = 0

(х 2 +2 х + х + 1) (х 2 +2 х - х -1) = 0

(х 2 +3 х + 1)(х 2 + х -1) = 0

х 2 +3 х + 1 = 0 и х 2 + х -1= 0

Ответ: ;

**Пример 4.**Решить уравнение.

(4 х – 3)3 – (2 х –1)3 = 0

((4 х – 3) – (2 х –1))(( 4 х – 3)2 + (4 х – 3) (2 х –1) + (2 х –1)2)=0

( 2 х – 2)(16х 2 -24 х + 9 + 8х 2- 4 х- 6 х + 3 + 4х 2 - 4х + 1)=0

( 2 х – 2)(28х 2 -38 х + 13) = 0

2 х – 2=0 и 28х 2 -38 х + 13=0

Решение первого уравнения есть = 1. Второе уравнение решений не имеет.

Ответ: 1

*Группировка.*

**Пример 5.** Решите уравнение.

х4 - 5х2 + х3 **-** 5х = 0

(х4 - 5х2)+ (х3 - 5х) = 0

х2\* (х2 - 5)+х \*(х2- 5) = 0

х\*(х2 - 5)- (х + 1) = 0

Ответ: 0;-1; ;-.

*Метод введения новой неизвестной.*

**Пример 1.**

х3 - 10х2 +9=0

Обозначим t=х2, t ≥0. Тогда имеем t2-10t+9=0 - уравнение, где =9,=1, следовательно, исходное уравнение

равносильно совокупности уравнений х2=1 и х2=9.

Ответ: 1;-1; 3; -3.

**Пример 2.** Решите уравнение.

2(х2+ 1)2-5(х2+1)+3=0

Обозначим t=х2+1, t ≥1. Тогда получим уравнение 2t2-5t+3=0, имеющее два корня =1 и

Следовательно х2+ 1=1 и х2+ 1=

Ответ: 0; ; - .

**Пример 3.** Решите уравнение.

(х2-2х -1)2+ 3х2-6х -13=0

(х2-2х-1)2 +3(х2-2х-1)-10=0  
Пусть у= ( х2-2х -1), тогда у2 +Зу-10=0, откуда у1 =-5; у2=2.

Если у=-5, то х2-2х+4=0; D< 0 , действительных корней нет.

Если у=2**,** то х2-2х-3=0; х1=-1; х 2=3.

Ответ: -1; 3.

**Пример 4.** Решите уравнение

(х2-7х+13 )2-(х-3 )(х-4)= 1  
(х2-7х+1 3)2-( х 2-7 х + 13 )=0

Пусть у= х2-7х+13, тогда у2-у=0, откуда y1=0; у2=1.  
Если у=0, то х2-7х+13=0; D< 0 , действительных корней нет.

Если у=1, то х2-7х+12=0; х1**=**3; х2=4.

Ответ: 3;4.

**Пример 5.** Решите уравнение

(х-2)(х+1)(х+4)(х+7)=63

заметим, что (х-2)(х+7)=х2+5х-14, (х+1)(х+4)=х2+5х+4.

Пусть у=х2+5х-14, тогда х2+5х+4==у+18, поэтому у (у+18)=63; у2+18у-63=0; у1 =3; у2=-21.

Если у =3, то х2+5х-14=3; х2+5х-17=0; х1,2=

Если у =-21, то х2+5х+7=0; D< 0 , действительных корней нет. Ответ:

**Возвратные уравнения.**

Уравнения вида

***а0 х2n+1 + а1 х2n +а2 х2n-1 + ... + ап хп+1 + к ап хn +к2 ап-1 –хn-1 + ...+***

***+ а0 к2п+1= 0,******а0х2п + а1х2п-1 + а2х2п- 2 +... + аn-1хn+1 + апхn + кап-1хп-1 + к2ап-2хп-2 +... + кпа0 =0,*** где *к -* фиксированное число и *ао* ≠ 0 называются возвратными уравнениями.

При *к=* 1 уравнения являются симметричными.

Возвратные уравнения нечетной степени имеют корень х= - *к,*так как уравнение можно переписать в виде

*а0(х2п+1 + к2п+1)+ а1х(х2п-1 + к2п-1)+... +ап хn(х +к*)=0

и при х= - *к*каждое выражение в скобках обращается в нуль.

Пример возвратного уравнения нечетной степени

5х5+6х4-2х3+4х2-48х-64=0

5х5+6х4-2х3**+**22х2-3\*23х-2\*25=0**,** где *к****=***2*,* значит х= **-** 2является корнем уравнения. Убедимся в этом, использую схему Горнера.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| -2 | 5 | 6 | -2 | 4 | -48 | -64 |
| 5 | -4 | 6 | -8 | -32 | 0 |

Пример возвратного уравнения чётной степени

а) 4х6+5х5-3х4+10х3-9х2+45х+108=0

4х6+5х5-Зх4+10х:>-3-Зх2+5-32х+4-33=0, где *к=* 3.

б) 2х8-9х7+20х6-33х5+46х4-66х3+80х2-72х+32=0

2х8-9х7+20х6-ЗЗх5+46х4-33-2х3+20-22х2-9-23х+2-24=0, где *к=* 2.

Поскольку х=0 не является корнем уравнения, то, разделив уравнение на х n и сгруппировав члены, получим уравнение

*а0(хп +()n)+ а1 (хn-1 + ( )n-1)+... +ап-1 (х + )+ ап = 0.*

Положим х + = у*,* тогда имеем х2 +()2 = у-2k; х3 +()3 = у-3k;…

Таким образом, уравнение степени 2n перейдёт в уравнение степени n.

**Пример 1.** Решите уравнение

х4+2х3-11х2+4х+4=0

Поскольку х=0 не является корнем уравнения, то разделив это уравнение на х2 и сгруппировав его члены, получим уравнение

х 2+2х-11++ = 0

(х 2+ + 2(х+) – 11 = 0

у= (х+); у 2 = (х+)2 = х 2+2\*х\* + х 2+ +4,то есть х 2+ = у 2- 4

у 2+2у-11-4=0

у 2+2у-15 = 0

у1=-5,у2=3.

Если у=-5, тогда х+; х2 +5х+2=0; х1,2 =

Если у=3, тогда х+; х2 -3х+2=0; х3 = 2; х4 = 1.

Ответ: ; 2; 1.

**Пример 2.** Решите уравнение

х5 + 3х4 - х3 + 2х2 - 24х - 32=0 (возвратное уравнение, нечетной степени)

х5+3х4-х3-(-2)х2+(-2)3 \*3х+(-2)5=0

к= -2, тогда х=2 является корнем уравнения.

х5 + 3х4 - х3 + 2х2 - 24х - 32 | х-2

х5 - 2х4 х4+5х3+9х2+20х+16

5х4-х3

5х4-10х3

9х3+2х2

9х3-18х2

20х2-24х

20х2-40х

16х-32

16х-32

0

**Пример 3.** Решите уравнение

х4 +5х3 + 9х2 +20х +16=0 (возвратное уравнение, четной степени)

х4 +5х3 + 9х2 +5\*4х +42 =0 : х2 (х≠ 0)

х2 +5х+ 9 + + = 0

х2 + ( )2 + 5(х+ ) + 9=0

Обозначим у = х+, тогда х2 + ( )2 = у2 – 8

у2 – 8 +5у + 9 = 0

у2 +5у + 1 = 0

у1,2 =

Если у= , то уравнение х+ = не имеет корней.

Если у= , то уравнение х+ = имеет х1,2 =

Ответ:

**Симметрические уравнения третьей степени.**

Уравнения вида **ах3 + вх2+вх+а=** 0, **а≠**0,называются симметрическими уравнениями третьей степени.

Так как *а(х3+1* **)+**вх(х*+1 )=0*

а(х+*1 )(х2-х+1 )+вх(х+1 )=0*

*(х+1* ) (ах2+(в-а) х+а)=*0,*

то уравнение равносильно совокупности уравнений *х+1=0* и aх2+(в-а)х+а=0.

Пример 1. Решите уравнение.

3х3+4х +4х+3=0

3(х3+1 )+4х(х+1 )=0

(х+1 )(3х2-3х+3+4х)=0

(х+1)(3х2+х+3)=0

х+1=0 и 3х2+х+3=0

Решение первого из этих уравнений есть х= -1, второе уравнение решений не имеет.

Ответ: -1.

Пример 2. Решите уравнение.

х3 -7х2 +7х-1=0

(х3-1)-7х(х-1)=0

(х-1 )(х2+х+1 -7х)=0

х-1=0 и х2-6х+1=0

х 1= 1; х 2,3=3 ± 2

Ответ: 1; 3 ± 2

Пример З. Решите уравнение.

х3+11х2+11х+1=0

Пример 4. Решите уравнение.

х3-9х2+9х-1=0

Симметрические уравнения четвертой степени.

Уравнения вида **ах4+вх3+с х2+вх+а**=*0*, **а0** называются симметрическими уравнениями четвертой степени.

Так как х=0 не является корнем уравнения, то разделив обе части уравнения на х2, получим уравнение, равносильное данному.

Пример 4. Решите уравнение.

х4-5х3+8х2-5х+1=0

х2-5х+8-+ = 0

(х2 +) – 5(х +) +8 = 0

Обозначим у = х + , у2 = (х +2 = х2 + 2 + , имеем у2 -2-5у+8=0; у2 -5у+6=0

у1=3; у2 =2.

Если у=3 , то х +;х2 -3х+1=0; х1,2 =

Если у=2 , то х +; х2 -2х+1=0; (х-1)2 =0; х=1.

Ответ:; 1.

**Задания для решения в классе.**

1. **Решите уравнения с помощью разложения на множители.**
2. 8х3 - 16х2 = 0 Ответ: 0; 2.
3. х3- 49х = 0 Ответ: 0; **7;-7.**
4. х3+0,16х = 0 Ответ: 0.
5. х3-4х2 - 9х + 36 = 0 Ответ: 4;-3; 3.
6. х6+3х4 –х2 -3 = 0 Ответ:-3; 1;-1.
7. у3 - 2у2 =у-2 Ответ: 2; 1;-1.
8. у4 - 6у3 + 9у2 = 4у 2- 24у + 36 Ответ: 2;-2; 3.
9. **Решите биквадратные уравнения .**
10. х 4 + 5х2 - 6 = 0 Ответ: 1;-1. 4 2
11. х 4 +16 х2 =0 Ответ: 1;-1.
12. **Решите уравнения, используя введение новой переменной.**
13. (х2 -2х) 2 -4(х2 -2х) + 3 = 0 Ответ: 1 + ; 1-2; -1; 3.
14. (х2 +4х + 3) (х2 +4х + 1) = 48 Ответ: 1;-5.
15. (х - 1) (х + 1) (х + 3) (х + 5) = 105 Ответ: -6; 2.
16. (х2+ ) + **7**(х+ ) + 10 = 0 Ответ: -2 + ; -2-;

**ПРИМЕРЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ**

1. **Решите уравнения с помощью разложения на множители.**
2. х3 - 64х = 0 Ответ: 0; 8; -8.
3. х3 + 0,09х = 0 Ответ: 0.
4. х3-х2 -81х + 81=0 Ответ: 1; 9;-9.
5. у6 + 4у4 *=* у2 +4 Ответ: 1;-1.
6. у4 - 8у3 + 16у2 = 9у2 -72у + 144 Ответ: 4;-3; 3.
7. **Решите биквадратные уравнения.**
8. х4+9х2 +8 = 0 Ответ: нет корней.
9. х4 + 9х2 =0 Ответ: 0.
10. **Решите уравнения, используя введение новой переменной.**
11. (х2 -10)2 - 3(х2 -10)-4 = 0 Ответ: 3; -3; 14 ;-14 .
12. (х2 + х + 6) (х2 + х - 4) = 144 Ответ: -4; 3.
13. (х + 4) (х + 5) (х + 8) (х + 7) = 4 Ответ: 1; -4; -6 +5 ; -6 - 5 .
14. (х2+ ) - (х+ ) - 8 = 0 Ответ: 1; -2; 2 +√2 ; 2 - √2 .

**ПРОВЕРОЧНАЯ РАБОТА.**

***ПЕРВЫЙ ВАРИАНТ.***

1. **Решите уравнения, разложив левую часть на множители.**

а) х3 -144х = 0 Ответ: 0; 12;-12.

б) 5х 4- 125 = 0 Ответ: -

в) 2у3 - 8у2 + Зу-12 = 0 Ответ: 4.

г) х 4+ 2х3 - х-2 = 0 Ответ: 1;-2.

1. **Решите уравнения, введя новую переменную.**

а) х4 - 10х2 **+**9 = 0 Ответ: 1;-1; 3;-3.

б) х6 - 26х3 -27 = 0 Ответ: 3;-1.

в) 2 (х2 +1)2 - 5(х2 + 1)+3 =0 Ответ: 0*;*  ; -

г) х (х+4)(х+5)(х+9)+96=0 Ответ: -1;-8;

***ВТОРОЙ ВАРИАНТ.***

**I. Решите уравнения, разложив левую часть на множители.**

а) х3 -225х = 0 Ответ:; 15;-15.

б) 3х 4- 243 = 0 Ответ: 3;-3.

в) 5у3 - 25у2 +-4у+20 = 0 Ответ: 5; ; -

г) х 4-3х3+ х-3 = 0 Ответ: 3;-1.

**II. Решите уравнения, введя новую переменную.**

а) у4 - 20у2 **+**64 = 0 Ответ: 4;-4; 2;-2.

б) х8 - 17х4 +16 = 0 Ответ: 1;-1;2;-2.

в) 2 (3х2 +4)2 - 34(3х2 + 4)+140 =0 Ответ: -1;1*;* ; -

г) х (х+3)(х+5)(х+8)+56=0 Ответ: -1;-7; - 4

**Задания для решения в классе.**

1. **Решите симметрические уравнения.**
2. х4- 5х3 +8х2 -5х+1=0 Ответ: 1; .
3. х 4 - 7х3+ 14х 2- 7х +1=0 Ответ: 2; .
4. 2х4 + х3 - 11х2 +х+2 = 0 Ответ: 2; ;

**4.** х3 +4х2 +4х +1=0 Ответ:-1;

1. **Решите уравнения.**
2. 2х 3 + 3х 2- 8х + 3 = 0 Ответ: 1; -3;.
3. х 3- 2х 2 - 29х +30 = 0 Ответ: 1; 6;-5.
4. х3-х2 - 19х -17 = 0 Ответ:-1; 1.
5. 3х 3 - 4х 2- 5х + 2 = 0 Ответ: 2;; -1.
6. 2х (х2 - 3)-х(1 - х) = 2(х 3-3) Ответ: 1; -2; 1,5.

**6.** 2х (х2 - 3) + х (х + 1) = 2(х2 + 1) + 2(х + 1) Ответ:-1; 2; -

**ПРОВЕРОЧНАЯ РАБОТА.**

***ПЕРВЫЙ ВАРИАНТ.***

**I. Решите симметрические уравнения.**

1. x 4- 6х3 - 5х2 - 6х +1=0 Ответ:
2. x 4- 8х 3- 7х 2 - 8х + 1 = 0 Ответ:
3. x 3 + 11 х 2+11х+1=0 Ответ: -5.
4. **Найдите целые корни уравнения.**
5. х3 -5х2 +7х-2 = 0 Ответ: 2; .
6. х 3+ 3х 2- 6х + 2 = 0 Ответ: 1; -2.
7. х4-х 3- 7х2 + х +6 = 0 Ответ: 1; .
8. x 4+ х3 –х2 +х-2 = 0 Ответ: 1;-2.

***ВТОРОЙ ВАРИАНТ.***

1. **Решите симметрические уравнения.**
2. х4- 7х3- 6х2 -7х+1=0 Ответ: 4
3. х4 +х3- 18 х2 + х +1=0 Ответ: ; 2
4. х 3+ 2х2 + 2х + 1 = 0 Ответ:-1.
5. **Найдите целые корни уравнения.**
6. 2х3 +6х2 - 7х -1=0 Ответ: 1; .
7. х3- 2х 2- 5х + 6 = 0 Ответ: 1; 3;-2.
8. х4-3х3 + х2 +3х-2 = 0 Ответ: 1; -1; 2.
9. х4-х 3+х 2-3х-6 = 0 Ответ:-1; 2.

**Используемая литература.**

1. **Литвиненко** В. Н., **Мордкович** А. Г. **Практикум** **по** **элементарной** **математике**

(http://advice-me.ru/gdz/spravochniki-po-matematike-/praktikum-po-elementarnoj-matematike-algebra-litvinenko-vn-mordko.html)

1. **Чирский В. Г. Шавгулидзе Е. Т. Уравнения элементарной математики.**

 Издательство: Главная редакция физико-математической литературы издательства "Наука". Букинистическое издание. 1992 г.

1. **Алгебра, 8 класс, Виленкин Н.Я., Сурвилло Г.С.**

Учебник для 8 класса с углубленным изучением математики под редакцией Н.Я. Виленкина М.: Просвещение, 2010г

1. **Алгебра,9 класс, Виленкина Н. Я. И др.**

**Учебник для 9 класса** с углубленным изучением математики под редакцией Н.Я. Виленкина М.: Просвещение, 2008г

**5. «О корнях уравнения четвертой степени»** (журнал «Математика» №7 94 г.)

**6. «Общие методы решения уравнений»** (журнал «Математика» №17 93 г.)