**Подборка олимпиадных задач на максимум и минимум**

Автор – составитель: Галимова Регина Алексеевна, учитель математики МБОУ «СОШ №6 г.Лениногорска» МО «ЛМР» РТ

**Задача №1.** Достаточно ли для изготовления закрытой со всех сторон прямоугольной коробки, вмещающей не менее 1995 единичных кубиков, а) 962; б) 960; в) 958 квадратных единиц материала?

*Решение.* Достаточно взять коробку размером 11×13×14. Ее объем равен 2002, т. е. достаточен; а общая площадь ее стенок равна

2$ ∙ $(11 $∙$ 13 + 11 $∙$ 14 + 13 $∙ $14) = 958.

*Комментарии:*10. Как догадаться до такого решения? Известно, что минимальную площадь поверхности при заданном объеме среди всех параллелепипедов имеет куб — это следует из неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим. Однако, куб с объемом 1995 будет иметь иррациональные длины сторон. Таким образом, нужно пытаться подобрать коробку, близкую по форме к кубу, но с целыми длинами сторон. "Ближайшие" кубы: 12×12×12 и 13×13×13 (их объемы 1728 и 2197 соответственно). Кажется, что наиболее "экономный" вариант — 12×13×13. К сожалению, этот параллелепипед дает лишь решение пункта а). Продолжая перебор параллелепипедов близких к кубу, можно найти решение задачи.

20. 957 единиц материала не хватит на изготовление коробки.

**Задача №2.** На плоскости дан выпуклый четырёхугольник. Найти точку, сумма расстояний от которой до его вершин наименьшая.

*Решение* совсем просто: искомая точка *M* является точкой пересечения диагоналей четырёхугольника. В самом деле: по неравенству треугольника, сумма расстояний *AM+CM* не меньше диагонали *AC*, а сумма расстояний *BM+DM* не меньше *BD*. Поэтому минимум суммы расстояний равен *AC+BD* и достигается в точке пересечения диагоналей.

Та же задача, но для треугольника, требует более тонких рассуждений. Для формулировки ответа понадобится так называемая точка Торричелли треугольника. А для того чтобы решить эту задачу для произвольного многоугольника, вновь придётся прибегнуть к вариационному методу. При этом ответ может быть подсказан из физических соображений.

**Задача №3.** На поверхности куба найти точки, из которых диагональ видна под наименьшим углом. Доказать, что из остальных точек поверхности куба диагональ видна под большим углом, чем из найденных.

*Решение.* Множество точек, из которых диагональ куба видна под углом 900, представляет собой описанную сферу куба (концы диагонали исключены). Пересечение этого множества с поверхностью куба состоит из 6 точек, отличных от концов данной диагонали. Все остальные точки поверхности куба лежат строго внутри описанной сферы, поэтому из них диагональ видна под тупым углом.

**Задача №4.** В пространстве даны две пересекающиеся плоскости α и β. На линии их пересечения дана точка *A*. Доказать, что из всех прямых, лежащих в плоскости α и проходящих через точку *A*, наибольший угол с плоскостью β образует та, которая перпендикулярна к линии пересечения плоскостей α и β.

*Решение.* Пусть $l$ — прямая, лежащая в плоскости α и проходящая через точку *A*. Отложим на прямой $l$ отрезок *AB* длины 1. Пусть *B"* — проекция точки *B* на плоскость β, *O* — проекция точки *B* на линию пересечения плоскостей α и β. Тогда: *sin BAB" = BB":BA= BB"= OB*$∙$*sin BOB" = sin BAO*$∙$*sin BOB"*. При этом *sin BOB"* — синус угла между плоскостями α и β; этот угол фиксирован. Поэтому *sin BAB"* максимален, когда $∠$*BAO = 900*.

**Задача №5.** Поместить в куб окружность наибольшего возможного радиуса.

*Решение.* Пусть *a* — длина ребра куба. Сечение куба плоскостью, проходящей через его центр ортогонально одной из диагоналей, является правильным шестиугольником. Радиус вписанной окружности этого шестиугольника равен $\frac{a\sqrt{6}}{4}$, поэтому в куб можно поместить окружность радиуса $\frac{a\sqrt{6}}{4}$. Покажем, что окружность большего радиуса в куб поместить нельзя. Прежде всего заметим, что достаточно ограничиться рассмотрением окружностей с центром в центре куба. Действительно, если окружность радиуса *R* содержится в кубе, то окружность, симметричная ей относительно центра куба, тоже содержится в кубе. Но тогда из выпуклости куба следует, что окружность радиуса *R*, центр которой совпадает с центром куба, а сама она расположена в плоскости, параллельной плоскости исходной окружности, тоже содержится в кубе. Рассмотрим окружность радиуса *R* с центром в центре куба и шар того же радиуса и с тем же центром. Нас интересует лишь случай, когда *R > a/2* и рассматриваемая окружность лежит внутри куба. В этом случае вне куба находятся шесть шаровых сегментов. Радиусы окружностей, лежащих в их основаниях, равны $r =\sqrt{R^{2}-({a}/{2)}^{2}}$ , поэтому *r* возрастает при возрастании *R*. Рассмотрим конусы, вершины которых находятся в центре куба, а основаниями служат окружности оснований шаровых сегментов. Если плоскость $Π$, содержащая рассматриваемую окружность, пересекает один из этих конусов, то часть окружности проходит по шаровому сегменту, а потому частично лежит вне куба. Таким образом, нужно доказать, что если $R >\frac{a\sqrt{6}}{4}$ , то плоскость $Π$ пересекает один из конусов. Плоскость $Π$ разбивает лучи, выходящие из центра куба и направленные в середины граней, на две тройки (каждая тройка лежит по одну сторону от плоскости $Π$). Рассмотрим плоскость $Π'$, которая проходит через центр куба перпендикулярно одной из диагоналей и разбивает эти лучи на те же самые две тройки. В плоскости $Π'$ есть окружность радиуса $\frac{a\sqrt{6}}{4}$, целиком лежащая внутри куба. Легко проверить, что плоскость $Π'$ касается трёх конусов (соответствующих тройке лучей, которые являются осями этих конусов) по трём лучам *OX*, *OY*, *OZ*. Лучи *OX*, *OY*, *OZ* лежат строго внутри конусов, соответствующих окружности радиуса $R >\frac{a\sqrt{6}}{4}$. Значит, эти лучи лежат по одну сторону от плоскости $Π$, поскольку оси соответствующих конусов лежат по одну сторону от этой плоскости. Плоскости $Π$ и $Π'$ имеют общую точку (центр куба), поэтому они пересекаются по некоторой прямой. Лучи *OX*, *OY* и *OZ* образуют друг с другом углы в 1200, поэтому никакая прямая не может разделить плоскость $Π'$ так, чтобы эти лучи лежали в одной полуплоскости. Таким образом, плоскость $Π'$ пересекает один из конусов, если $R >\frac{a\sqrt{6}}{4}$.

**Задача №6.** Дана плоскость *P* и две точки по разные стороны от неё. Построить сферу, проходящую через эти точки, высекающую из *P* наименьший круг.

*Решение.* Докажем, что центр искомой сферы находится в точке *M* пересечения отрезка, соединяющего данные точки *A* и *B*, и плоскости *P*, а радиус искомой сферы равен $\sqrt{AM∙BM}$. Действительно, рассмотрим произвольную сферу, проходящую через точки *A* и *B*. Проведем через точку *M* диаметр *CD* окружности, являющейся пересечением данной сферы с плоскостью *P*. По свойству хорд *MC*$∙$*MD=MA*$∙$*MB* . Поэтому произведение чисел *MC* и *MD* не зависит от выбора сферы. Минимум суммы двух чисел при фиксированном произведении достигается в случае, когда они равны, то есть $MC=MD=\sqrt{AM∙BM}$. Из этого вытекает приведенное построение.

**Задача №7.** Муха летает внутри правильного тетраэдра с ребром *a*. Какое наименьшее расстояние она должна пролететь, чтобы побывать на каждой грани и вернуться в исходную точку?

*Решение.* Рассмотрим тетраэдр *ABCD*. Пусть муха побывала на каждой из граней тетраэдра и вернулась в исходную точку. Без ограничения общности можно считать, что муха сначала побывала на грани *ABC*, потом - на грани *BCD*, затем - на *DAB*, и, наконец, на *ACD*. Обозначим соответствующие точки на гранях, в которых побывала муха, через *E, F, G* и *H*. Ясно, что минимальное расстояние, которое муха могла пролететь, равно периметру пространственного четырехугольника *EFGH*.

1. Проведем через *DC* плоскость, перпендикулярную *AB* (плоскость симметрии тетраэдра *ABCD*) и рассмотрим четырехугольник *E1F1G1H1*, симметричный *EFGH* относительно этой плоскости. (Вершины *E1* и *G1* останутся на тех же гранях, что *E* и *G* соответственно, *F1* попадет на одну грань с *H*, а *H1* - на одну грань с *F*.) Периметры четырехугольников *EFGH* и *E1F1G1H1* равны.
2. *Лемма. Рассмотрим любой пространственный четырехугольник KLMN . Пусть P и Q - середины сторон KL и MN. Tогда* $PQ\leq \frac{1}{2}(KN + LM)$*.*

*Доказательство.* Обозначим через *R* середину диагонали *LN*. Имеем $PR =\frac{1}{2} KN, RQ =\frac{1}{2} LM$. Таким образом, $PQ\leq PR + RQ = \frac{1}{2}(KN + LM)$. *Лемма доказана*.

Обозначим через *E2, F2, G2* и *H2* середины отрезков *EE1, FH1, GG1* и *HF1* соответственно. Вершины этого четырехугольника тоже лежат на гранях тетраэдра, и, согласно лемме, периметр четырехугольника *E2F2G2H2* не больше периметра *EFGH*. Кроме того, вершины *E2* и *G2* (середины *EE1* и *GG1*) будут лежать в плоскости симметрии тетраэдра, проходящей через *CD*, т. е. на медианах *CT* и *DT* граней *ABC* и *ABD*.

Исходя из четырехугольника *E2F2G2H2*, точно так же построим *E3F3G3H3*, симметричный ему относительно плоскости симметрии тетраэдра, проходящей через *AB*, а затем, взяв середины отрезков, соединяющих вершины этих четырехугольников, лежащих в одной грани, получим *E4F4G4H4*, все вершины которого лежат в объединении двух плоскостей симметрии тетраэдра *ABCD*, проходящих через *CD* и *AB*. Иными словами, вершины *E4* и *G4* лежат на отрезках *CT* и *DT*, а вершины *F4* и *H4* - на медианах *AS* и *BS* граней *ACD* и *BCD*. При этом периметр *E4F4G4H4* не превосходит периметра *EFGH*. Значит, периметр *EFGH* не меньше, чем *4d*, где *d* - расстояние между прямыми *CT* и *BS*.

1. Осталось построить путь длины *4d* и найти *d*. Пусть *E0* и *F0* - основания общего перпендикуляра к прямым *CT* и *BS*, причем *E0* лежит на *CT*, а *F0* - на *BS*. Обозначим через *G0* точку, симметричную точке *E0* относительно плоскости *ABS*. Из симметрии ясно, что *F0G0* - общий перпендикуляр к прямым *BS* и *DT*. Аналогично строится точка *H0*, при этом *G0H0* и *H0E0* являются общими перпендикулярами соответственно к *DT* и *AS* и к *AS* и *CT*. Значит, периметр четырехугольника *E0F0G0H0* равен *4d*. Заметим, что нужно еще проверить, что основания этих общих перпендикуляров лежат на гранях тетраэдра, а не на их продолжениях, это будет сделано ниже (нам еще нужно вычислить *d*).
2. Проведем через *AB* плоскость, перпендикулярную *CT* и спроецируем на нее наш тетраэдр. Получим треугольник *ABD"*, в котором *AB = a*, $D"T = \sqrt{\frac{2}{3}}a$ (по формуле для длины высоты правильного тетраэдра).

Точка *S* перейдет в *S"* - середину *D"T*. Искомое расстояние *d* равно расстоянию от точки *T* до прямой *BS"* (поскольку общий перпендикуляр параллелен плоскости проекции). Кроме того, очевидно, что основание перпендикуляра, опущенного из точки *T* на прямую *BS"*, лежит на отрезке *BS"*, а не на его продолжении, значит, точка *F0* лежит на отрезке *BS*. Аналогично доказывается, что и остальные вершины четырехугольника лежат на медианах, а не на их продолжениях.

В прямоугольном треугольнике *BTS"* известны катеты $BT =\frac{a}{2}$ , $TS" =\frac{a}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}$ . Значит, $BS" =\frac{a}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}$ ; $d = \frac{BT∙TS'}{BS'} =\frac{a}{\sqrt{10}} $.

*Комментарий.* Известна аналогичная задача для плоскости: жук ползает внутри треугольника со сторонами *a, b, c*. Какое наименьшее расстояние он может проползти, чтобы побывать на каждой стороне и вернуться в исходную точку? В случае остроугольного треугольника эта задача называется задачей Фаньяно. Оказывается, что кратчайший путь в случае остроугольного треугольника соединяет основания высот треугольника, а в случае прямо- или тупоугольного треугольника вырождается в двойной отрезок высоты.

**Задача №8.** Как надо расположить в пространстве прямоугольный параллелепипед, чтобы площадь его проекции на горизонтальную плоскость была наибольшей?

*Решение.* Проекция прямоугольного параллелепипеда на плоскость представляет собой шестиугольник (быть может, вырождающийся в четырёхугольник). Так как проекция каждой грани параллелепипеда есть параллелограмм, то площадь треугольника *ABC* (рис. 62) составляет ровно половину площади всей проекции (ибо диагональ параллелограмма разбивает его на два равных треугольника).



Но треугольник *ABC* представляет собой проекцию соответствующего треугольника *A"B"C"*, «вписанного» в параллелепипед. Расположение треугольника *A"B"C"* очевидно, определяет расположение в пространстве всего параллелепипеда. Как известно,

*S*$△$ *ABC= S*$△$*A"B"C"* $∙$*cosα,* где *A"B"C"* — треугольник, проекцией которого является треугольник *ABC*, и α — угол между плоскостями треугольников *ABC* и *A"B"C".* Ясно теперь, что площадь треугольника *ABC* будет наибольшей (а стало быть, будет максимальной и площадь проекции данного прямоугольного параллелепипеда), когда *cosα=1*, т. е. *α=0*, или, иначе говоря, когда точки *A", B"* и *C"* лежат в горизонтальной плоскости.

*Используемые источники:*

1. В.Ю.Протасов. Максимумы и минимумы в геометрии. (Серия: Библиотека ,,Математическое просвещение“).М.: МЦНМО, 2005,
2. Московские математические олимпиады 1993—2005 г./ Р. М. Федоров и др. Под ред. В. М. Тихомирова. —М.: МЦНМО, 2006,
3. Интернет проект «Задачи» - <http://www.problems.ru> ,
4. Научная библиотека избранных естественно-научных изданий - <http://sernam.ru> ,
5. Бесплатная электронная библиотека - http://knigi.dissers.ru