Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение
«Средняя общеобразовательная школа № 3»

Утверждаю Директор МБОУ «Средняя школа №3» ____________ В.М. Маренюк Приказ №394 от «13» сентября 2013г.	Рассмотрено на заседании методического совета школы протокол №5 от «12» 09 2013г. ____________ Газизова А.Х. Председатель МС МБОУ «Средняя школа №3»	Рассмотрено на заседании школьного методического объединения протокол №4 от «6» 09 2013г. ____________ руководитель МО ____ / Исанова З.М.

Рабочая программа элективного курса

Подводные рифы при подготовке к ЕГЭ

(наименование учебного предмета)

11 класс

(уровень, ступень образования)

1 год

(срок реализации программы)

Составлена на основе авторской программы элективного курса «Подводные рифы при подготовке к ЕГЭ Ганиной Т.П.
(Интернет ресурс http://pedsovet.su/load/88-1-0-8965)

Тетуева Гульбахар Эскандеровна

(Ф.И.О. учителя, составившего программу)

г. Когалым, 2013 г.

Программа элективного курса для учащихся 11 класса «Подводные рифы при подготовке к ЕГЭ

Пояснительная записка.

Элективный курс «Подводные рифы при решении уравнений и неравенств» является предметом по выбору для учащихся 11-х классов. Курс рассчитан на 34 часа. За основу курса взята программа Ганиной Татьяны Петровны, учителя математики МОУ "Федоровская СОШ №5" ХМАО-Югры. Данный элективный курс относится к предметно-ориентированному (математика) типу профильных курсов и сконструирован для учеников, желающих пройти целенаправленную математическую подготовку.

Программа данного элективного курса ориентирована на рассмотрение отдельных тем математики, которые применяются при решении экзаменационных задач. Курс рассчитан для учащихся 11-х классов, определивших собственный выбор пути дальнейшего образования.

Программа элективного курса составлена на основе:

- демонстрационного варианта контрольных измерительных материалов единого государственного экзамена 2014 года по математике;
- кодификатора элементов содержания и требований к уровню подготовки выпускников общеобразовательных учреждений для проведения в 2014 году единого государственного экзамена по математике;
- спецификации контрольных измерительных материалов для проведения в 2014году единого государственного экзамена математике.

Ежегодно выпускники при сдаче ЕГЭ допускают ошибки из-за недочета ОДЗ. Можно сказать, что универсального метода решения уравнений и неравенств нет. Каждый раз, если хочешь понять, что делаешь, а не действовать механически, возникает дилемма: а какой способ решения выбрать, в частности искать ОДЗ или не надо?

Курс дополняет и развивает школьный курс математики, а также является информационной поддержкой дальнейшего образования и ориентирован на удовлетворение и поощрение любознательности старших школьников, их аналитических способностей.

В процессе работы по изучению данного курса ученики овладевают новыми знаниями, обогащают свой жизненный опыт, получают возможность практического применения своих интеллектуальных, организаторских способностей, развивают свои коммуникативные способности, овладевают умениями, связанными с работой с научной и справочной литературой.

Усвоение предметного содержания курса и сам процесс изучения его становятся средствами, которые обеспечивают переход от обучения к самообразованию.

Актуальность элективного курса «Подводные рифы при при решении уравнений и неравенств» определяется тем, что данный курс поможет учащимся оценить свои потребности, возможности и сделать обоснованный выбор дальнейшего жизненного пути.

Цели:

1. Расширить умения и возможности учащихся-выпускников школы.
2. Формировать у учащихся понимание роли математических знаний как инструмента, позволяющего выбрать лучший вариант действий из многих возможных.
3. Способствовать самоопределению или выбору дальнейшей профессиональной деятельности учащихся.
4. Развивать интерес учащихся к изучению математики.

Задачи:

1. Расширять научный кругозор учащихся.

2. Обучать старшеклассников решению учебных и жизненных проблем, способам анализа информации.

3. Формировать понятие о математических методах при решении сложных математических задач.

4. Рассмотреть практическое применение математических знаний.

5. Увеличить объем математических знаний.

Содержание курса

11-й класс, 34ч

Области допустимых значений неизвестного. Областью допустимых значений неизвестного (ОДЗ) или областью определения уравнения называется множество тех значений неизвестного, при которых имеют смысл его левая и правая части. Из определения следует, при решении любого уравнения не имеем права рассматривать значения неизвестного, не входящие в ОДЗ. Правильно найденная ОДЗ и последующий отбор корней гарантируют правильное решение уравнения.

Замена неизвестного . Введение нового неизвестного, относительно которого уравнение имеет более простой, легко приводимый к стандартному вид или даже просто упрощающее вид уравнения – важнейший метод решения уравнений любых видов и типов.

Разложение на множители. Разложение левой части уравнения на множители (правая часть равна нулю) – распространённый приём решения самых различных уравнений.

Системы уравнений. Распространённым методом, применяемым при решении системы уравнений, является метод последовательного исключения неизвестных. Любая система линейных уравнений может быть решена этим методом. Выражаем одно неизвестное из одного уравнения через остальные и подставляем в оставшиеся. Получаем новую систему, в которой число уравнений и неизвестных уменьшилось на 1. С новой системой поступаем так же пока это возможно.

Неравенства. Многие приемы и методы решения неравенств совпадают с приемами и методами решения уравнений (преобразование, разложение на множители, замена неизвестного). Исходя из идей метода интервалов, решение неравенств можно свести к решению одного или нескольких уравнений.

Преобразование неравенств. Многие виды преобразований, как и при решении уравнений, приводят к эквивалентному уравнению или к уравнению-следствию.

Неравенства, содержащие абсолютные величины. Обычный путь решения неравенств, содержащие абсолютные величины, состоит в том, что числовая прямая разбивается на участки, на каждом из которых на основании определения абсолютной величины знак модуля можно снять.

1.Откуда берутся посторонние корни.

Рациональные и иррациональные уравнения, приводящиеся с помощью преобразований к линейным и квадратным. Расширение области определения. Умножение на выражение с переменной. Применение немонотонной функции.

При стандартном способе решения уравнения возникает цепочка уравнений той или иной длины, соединяющая исходное уравнение с уравнением, которое является элементарным. Но это не всегда выполняется, поэтому надо следить, чтобы каждое следующее уравнение было следствием предыдущего, чтобы корни «по дороге» не терялись. Необходимо после решения уравнения найти способ отсеять лишние корни, отобрать правильные. Это можно сделать при помощи проверки. Проверка является элементом решения даже в тех случаях, когда лишние корни не появились, но ход решения был таков, что они могли появиться.

2.**Как не потерять корни.**

Решение уравнений и неравенств, после преобразования которых, может происходить потеря корней.

3.Если вы переходите к совокупности.

Решение уравнений вида f(x)g(x)=0. Решение нестрогих неравенств. Отыскание количества корней.

4. «Место» ОДЗ при решении уравнений и неравенств

а) дробно-рациональных;

б) иррациональных;

в) логарифмических;

г) содержащих, обратные тригонометрические функции.

5. Необязательность ОДЗ

Рассматриваются решения уравнений и неравенств, в которых нахождение ОДЗ вовсе не является обязательным-и все это без, какого бы то ни было, ущерба для решения примера.

6.Опасность ОДЗ.

В результате преобразований, изменяющих исходное ОДЗ, приходим к неверным решениям. Решение уравнений и неравенств, содержащих неизвестную под знаком корня. Возведение в степень.

Решение уравнений и неравенств, содержащих неизвестную под знаком корня. Уравнения вида $\sqrt{f(x)} \pm \sqrt{g(x)} = h(x)$

Уравнения вида $\sqrt[3]{f(x)} \pm \sqrt[3]{g(x)} = h(x)$ ■

7.ОДЗ – есть решение

а) ОДЗ представляет собой пустое множество, а значит, исходный пример не имеет решений.

б) В ОДЗ находится одно или несколько чисел, и несложная подстановка быстро определяет корни.

в) ОДЗ используется вместе с анализом функций, входящих в пример.

8.Нахождение ОДЗ–лишняя работа.

Равносильность переходов.

Методическое обеспечение.

В процессе изучения материала используются как традиционные формы обучения, так и самообразование, саморазвитие учащихся посредством самостоятельной работы с информационным и методическим материалом.

Занятия включают в себя теоретическую и практическую части, в зависимости от целесообразности. Основные **методы проведения занятий**: беседа, дискуссия, консультация, практическое занятие, защита проекта. Особое значение отводится самостоятельной работе учащихся, при которой учитель на разных этапах изучения темы выступает в разных ролях, чётко контролируя и направляя работу учащихся.

Для наиболее успешного усвоения материала курса основным типом занятий являются практикумы. Предусматривается проведение занятий в форме практических работ с небольшими вкраплениями теоретического материала и необходимых приемов рассуждений. На занятиях используются опорные схемы, алгоритмы для выполнения заданий, карточки для индивидуальной и групповой работы. Преимущество практических работ заключается в том, что учащиеся, выполняя определенные задания, самостоятельно осваивают математическую деятельность, необходимую для решения названного класса задач.

Предполагаются следующие **формы организации обучения:** индивидуальная, групповая, коллективная, взаимное обучение, самообучение.

Средства обучения: дидактические материалы, творческие задания для самостоятельной работы, мультимедийные средства, справочная литература.

Новые педагогические технологии обучения: информационные, проектные, исследовательские. Занятия носят проблемный характер. Предполагаются ответы на вопросы в процессе дискуссии, поиск информации по смежным областям знаний.

Требования к уровню подготовки учащихся:

В результате изучения курса учащиеся должны знать:

основные положения теории. Уметь пользоваться справочным материалом, уметь решать задачи обязательного и, по желанию, повышенного уровня сложности;

точно и грамотно формулировать изученные теоретические положения и

излагать собственные рассуждения при решении задач, правильно

пользоваться математической символикой и терминологией, применять

рациональные приемы тождественных преобразований.

Учащиеся должны уметь:

- 1.Вести расчеты, для чего необходимо изучать специальные математические методы;
- 2. Анализировать ситуацию и делать логически корректные выводы в примерах, где нужно учесть ОДЗ;
- 3. Применять навыки решения экзаменационных задач;
- 4. Самостоятельно работать с учебным материалом;
- 5.Обосновывать свою точку зрения.
- Определять свойства функции по графику. Описывать свойства функций.
- Применять теоретический материал к описанию своего решения.
-

Учащиеся должны понимать:

- Значение математической науки для решения задач, возникающих в теории и практике.
- Идеи расширения числовых множеств как способа построения нового математического аппарата для решения практических задач и внутренних задач математики.
- Возможности геометрии для описания свойств реальных предметов и их взаимного расположения.
- Универсальный характер законов логики математических рассуждений, их применимость в различных областях человеческой деятельности. Вероятностный характер различных процессов и закономерностей

Контроль качества образования

В ходе обучения учащимся систематически предлагаются короткие (15-20 мин) задания на проверку освоения изученных способов действий. При этом ученики выступают полноправными субъектами оценивания - проводятся самоанализ, контроль, самооценка и взаимооценка выполняемых заданий. Такая деятельность ведет к закреплению знаний, служит регулярным индикатором успешности образовательного процесса, а также гарантирует повышенную мотивацию обучения**.** Данный курс предполагает результат -выполнение типового проекта в конце каждого года обучения. Проект разрабатывается индивидуально. Выполнение проектов завершается их защитой и рефлексивной оценкой.

Критерии оценок.

Критерии при выставлении оценок могут быть следующими.

Оценка «отлично». Учащийся освоил теоретический материал курса, получил навыки его применения при решении конкретных задач; в работе над индивидуальными домашними заданиями учащийся продемонстрировал умение работать самостоятельно
Оценка «хорошо». Учащийся освоил идеи и методы данного курса в такой степени, что может справиться со стандартными заданиями; выполняет домашние задания прилежно; наблюдаются определенные положительные результаты, свидетельствующие об интеллектуальном росте и о возрастании общих умений учащегося.
Оценка «удовлетворительно». Учащийся освоил наиболее простые идеи и методы решений

Формы контроля: зачеты, рефераты, контрольная работа, тестирование, самостоятельная работа.

Материально –техническое обеспечение .

Для более успешного освоения программы кабинет оснащен современными средствами обучения- мультимедийной аппаратурой, интерактивной доской, медиатекой.
Интернет-ресурсы: электронные образовательные ресурсы из единой коллекции цифровых образовательных ресурсов (http://school-collection.edu.ru/)

, каталога Федерального центра информационно-образовательных ресурсов (http://fcior.edu.ru/): информационные, электронные упражнения, мультимедиа ресурсы, электронные тесты (для подготовки к ЕГЭ)

Тематическое планирование

Тема занятий	Количество часов	Теория	Практика	Формы проведения	Образовательный продукт
Откуда берутся посторонние корни.	4	1	3	Комбинированный урок, групповая работа *Тестирование*	Развитие навыков тождественных преобразований.
Как не потерять корни.	4	1	3	Мини-лекция, работа в парах	Нахождение области определения и значений основных элементарных функций
Если вы переходите к совокупности.	4	1	3	Комбинированный урок, урок-практикум, *Тестирование*	Области определения и значений основных элементарных функций
«Место» ОДЗ при решении уравнений и неравенств	4	1	3	Мини-лекция, *Лабораторная работа,**зачет***	Овладение умениями решать неравенства различных видов, различными способами.
Необязательность ОДЗ	4	1	3	Семинар, групповая работа, Т***естирование***	Обобщение знаний о различных функциях и их графиках.
Опасность ОДЗ	4	1	3	Комбинированный урок, урок-практикум	Обобщение знаний о различных функциях и их графиках.
ОДЗ – есть решение	4	1	3	Мини-лекция, групповая работа. *Тестирование*	Умение ориентироваться в необходимости или ненужности нахождения ОДЗ
Нахождение ОДЗ– лишняя работа.	4	1	3	Мини-лекция, работа в парах *Тестирование*	Умение ориентироваться в необходимости или ненужности нахождения ОДЗ
Заключительное занятие: представление	2	2		*Зачет*	Презентация

своих работ учащимися.					
Итого	34 часа				

Литература для учителя

1. И.Г.Алексеев. «Математика, подготовка к ЕГЭ», Саратов: «Лицей», 2005,
2. Н. Я. Виленкин, О. С. Ивашев-Мусатов, С. И. Шварцбурд. 2008г.Алгебра и математический анализ 10, 11 класс. Учебное пособие для школьников и классов с углубленным изучением математики.
3. П. И. Горнштейн и др .Экзамен по математике и его подводные рифы.. «Илекса», «Гимназия», Москва – Харьков, 2008.
4. В. А. Далингер. Нестандартные уравнения, неравенства и методы их решений .Омск 2005г
5. В.И. Рыжик. «25000 уроков математики»., М.: «Просвещение», 1993.
6. М. И. Сканави. Сборник задач по математике. М.2007г.
7. Газета «Математика» №46,15. 1998.
8. Газета «Математика» №15. 2002.
9. Газета «Математика» №17. 2002.
10. ЕГЭ «Математика» контрольные измерительные материалы, М.: «Просвещение», 2013.

Литература для учащихся

- Тесты ЕГЭ. Тематические тесты для подготовки к ЕГЭ-2013. Под ред. Лысенко Ф.Ф. Ростов на/Д: Легион-М, 2012(25 экземпляров).
- . Тесты ЕГЭ. Тематические тесты для подготовки к ЕГЭ-2014. Под ред. Лысенко Ф.Ф. Ростов на/Д: Легион-М, 2013(25 экземпляров).
- Тесты, взятые с сайта ФИПИ по подготовке к ЕГЭ-2014
- А.Г. Мордкович. «Алгебра и начала анализа 10-11» задачник и учебник, М.: « Мнемозина», 2010

Приложение

Рекомендации по проведению практических работ.

1. Подготовка по тематическому принципу, соблюдая «правила спирали» от простых типов заданий первой части до заданий со звездочкой второй части;
2. Работа с тематическими тестами, выстроенными в виде логически взаимосвязанной системы, где из одного вытекает другое, т.е. правильно решенное предыдущее задание готовит понимание смысла следующего; выполненный сегодня тест готовит к пониманию и правильному выполнению завтрашнего и т. д.;
3. Работа с тренировочными тестами в режиме «теста скорости»;
4. Работа с тренировочными тестами в режиме максимальной нагрузки, как по содержанию, так и по времени для всех школьников в равной мере;

5. Максимальное использование наличного запаса знаний, применяя различные «хитрости» и «правдоподобные рассуждения», для получения ответа простым и быстрым способом.
6. Активное применение развивающих технологий.

Дидактический материал для учителя и учащихся.

ОБЛАСТЬ ДОПУСТИМЫХ ЗНАЧЕНИЙ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

Введение

При подготовке к единому государственному экзамену по математике, безусловно, необходимо повторить и систематизировать весь материал школьного курса. Особое внимание следует обратить на темы, являющиеся основой для решения широкого круга задач из различных разделов. Решение уравнений и неравенств именно такие темы. При решении текстовых задач, задач математического анализа, систем уравнений, неравенств и т.д. необходимо понимание и твердое владение основными методами решения уравнений.

Заметим, что «наиболее распространенный (стандартный) путь решения уравнений состоит в том, что с помощью стандартных приемов решение данного уравнения сводится к решению нескольких элементарных уравнений с последующим анализом найденных корней». В большинстве случаев анализ подменяется непосредственной проверкой. Однако такой подход при решении неравенств уже является несостоятельным. Более грамотно выполнять только равносильные преобразования исходных равенств и неравенств, то есть при каждом преобразовании следить за их областью допустимых значений (ОДЗ) учитывая области определения и значений используемых функций.

Заметим, что простое выписывание ОДЗ и решение полученных при этом неравенств не всегда целесообразно. Оно часто приводит к лишней работе по нахождению корней квадратных трехчленов и сравнению этих корней с корнями, которые получаются при решении исходных уравнений и неравенств. Поэтому достаточно *постоянно следить за равносильностью преобразований* и проводить анализ окончательных результатов в соответствии с условиями ОДЗ.

2. **Области определения и значений основных элементарных функций**

Напомним свойства основных элементарных функций, обращая внимание на их применение для решения уравнений и неравенств.

a) *Дробная рациональная функция* $y=\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+...+b_m}$ определена во всех точках, кроме нулей знаменателя. Следовательно, из области допустимых значений решения соответствующего уравнения и неравенства нужно исключить значения x, для которых $Q(x)=0$.

b) *Логарифмическая функция* определяется основным логарифмическим тождеством

$$a^{\log_a b}=a,\qquad a>0,\qquad b>0,\qquad a\neq 1.$$

Именно при решении задач с логарифмами следует обратить внимание на сделанное ранее замечание о проведении равносильных преобразований без явного выписывания ОДЗ.

c) *Показательная функция* $y=a^x$ имеет смысл только при $a>0$ и принимает только положительные значения. Для $a=1$ функция тождественно равна единице.

d) *Степенная функция* $y=x^a$, где a - постоянное число не имеет общих свойств для всей своей области определения. При $x>0$ она определена и положительна для любого действительного a. При $x=0$ степенная функция определена и равна нулю если $a>0$, и не определена, если $a<0$. Степенная функция $y=x^0$ равна единице при $x\neq 0$ (заметим, что символ 0^0 не определен, поэтому считать, что $x^0\equiv 1$ при всех x не правильно).

Кроме того, степенная функция обладает различными свойствами, зависящими от показателя степени a. Так, степенная функция $y=x^n$ с натуральным показателем n определена при всех значениях x, а степенная функция $y=x^{-n}$ $(y=1/x^n)$ с целым отрицательным показателем определена при $x\neq 0$. Для нечетных n функция $y=x^{1/n}$ $(y=\sqrt[n]{x})$ определена во всех действительных точках x (нуле, положительных, отрицательных) и принимает отрицательные значения при $x<0$.

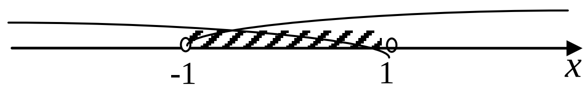


Рис.2

Если в уравнении или неравенстве встречается показательно-степенная функция $f(x)^{g(x)}$, то в условия, определяющие ОДЗ, необходимо включить $f(x)>0$. При этом, случай $f(x)=0$ требует отдельной проверки, поскольку для $g(x)>0$ выражение $f(x)^{g(x)}$ определено и равно нулю.

e) *Вопросы для самопроверки.*

1) Укажите, в каких точках не определена функция $y=\dfrac{1}{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}$.

2) Укажите область определения и область значений следующих функций:

$y=\dfrac{5}{2-x}$; $y=\dfrac{x+2}{x^2-4}$; $y=(2-x)^x$; $y=\log_x(2-x)$; $y=(2-x)^3$; $y=(2-x)^{1/4}$.

3. **Примеры решения уравнений и неравенств**

Рассмотрим некоторые простые примеры решения уравнений и соответствующих неравенств с использованием равносильных преобразований и анализом их ОДЗ.

a) Решая уравнение $\dfrac{2x+5}{x+1}=1$ с ОДЗ $x\neq -1$, равносильным преобразованием $\dfrac{2x+5}{x+1}-\dfrac{x+1}{x+1}=1-1$, приведем его к виду $\dfrac{x+4}{x+1}=0$. Очевидно, что $x=-4$ есть корень первоначального уравнения, удовлетворяющий ОДЗ.

Для решения неравенства $\frac{2x+5}{x+1}\geq 1$, выполним аналогичные операции и получим рациональное выражение $\dfrac{x+4}{x+1}\geq 0$ равносильное системе $\begin{cases}(x+4)(x+1)\geq 0\\ x+1\neq 0\end{cases}$, где вторая строка отражает ОДЗ исходного неравенства. Применяя метод интервалов к решению $(x+4)(x+1)\geq 0$, получаем $x\in(-\infty,-4]\cup[-1,+\infty)$. Окончательный ответ записываем, с учетом ОДЗ (см. рис.1), в виде $x\in(-\infty,-4)\cup[-1,+\infty)$.

b) Уравнение $\log_2(4-2x)=\log_2(x^2-3x+2)$ равносильно системе

$$\begin{cases}4-2x=x^2-3x+2\\ 4-2x>0\\ x^2-3x+2>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x+1)(x-2)=0\\ x<2\\ (x-1)(x-2)>0\end{cases}.$$

Очевидно, корень $x=2$ является посторонним, так как не входит в ОДЗ (определяется неравенствами системы). Корень $x=-1$ удовлетворяет ОДЗ и является корнем исходного уравнения. Неравенство $\log_2(4-2x)>\log_2(x^2-3x+2)$ равносильно системам

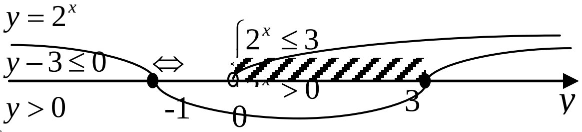
$$\begin{cases}4-2x>x^2-3x+2\\4-2x>0\\x^2-3x+2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x+1)(x-2)<0\\x-2<0\\(x-1)(x-2)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+1>0\\x-2<0\\x-1<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-1\\ \\x<1\end{cases}.$$

Интервал $x\in(-1;1)$ - решение неравенства (рис.2).

c) При решении уравнения $2^{2x}-2^{x+1}=3$ делаем замену $y=2^x$ и переходим к равносильной системе $\begin{cases}y^2-2y-3=0\\y>0\end{cases}$, где неравенство $y>0$ соответствует области значений показательной функции $y=2^x$ и является ОДЗ исходного уравнения (в неявном виде без непосредственного выражения для x). Из двух корней $y_1=-1$ и $y_2=3$ квадратного уравнения $y^2-2y-3=0$, учитывая ОДЗ, выбираем положительный и находим окончательный ответ $x=\log_2 3$.

Решая неравенство $2^{2x}-2^{x+1}\le 3$, получаем равносильные системы (рис.3)

$$\begin{cases}y=2^x\\y^2-2y-3\le 0\\y>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=2^x\\(y+1)(y-3)\le 0\\y>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=2^x\\y-3\le 0\\y>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2^x\le 3\\2^x>0\end{cases}$$



.

Рис.3

Поскольку основание степени больше единицы и неравенство $2^x>0$ верно при всех действительных x, то окончательный ответ имеет вид $x\le\log_2 3$.

d) Формально ОДЗ уравнения $x^{2-x}=x^3$ с показательно-степенной функцией $y=x^{2-x}$ определяется неравенством $x>0$. Однако, $x=0$ является корнем данного уравнения поскольку при этом $2-x>0$ и $0^2=0$ величина определенная. Записав исходное уравнение в виде $x^2(x-x^{-x})=0$, для $x\ne 0$ получаем $x-\dfrac{1}{x^x}=0$ и $x^{x+1}=1$. Корни последнего $x=1$ и $x=-1$. Второй корень не входит в ОДЗ, но при $x=-1$ исходное уравнение имеет смысл и входящие в него функции (степенные функции с целым отрицательным показателем) определены для всех $x\ne 0$. Таким образом, уравнение $x^{2-x}=x^3$ имеет три корня $x_1=0$, $x_2=1$ и $x_3=-1$.

Неравенство $x^{2-x}>x^3$ с ОДЗ $x>0$ равносильно системам

$$\begin{cases}\dfrac{x^2(x^{x+1}-1)}{x^x}<0\\x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^{x+1}<x^0\\x>0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+1>0\\0<x<1\end{cases}\\ \begin{cases}x+1<0\\x>1\end{cases}\end{array}\right.$$

.

Вторая система совокупности не имеет решений, поэтому окончательный ответ записывается в виде $x\in(0,1)$.

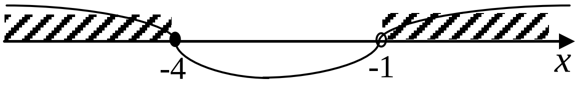


Рис.1

е) Вопросы для самопроверки

1) Решите методом интервалов неравенство $\dfrac{(x-4)(x+2)}{x(2x+1)} \le 0$.

2) Составьте систему равносильную уравнению $\log_{x-1}(2-x)=1$.

3) Найдите корни уравнения $(x-2)(x+1)(3x+5)(x-1)=0$, для которых $x^2-2x>0$.

4. **Примеры решения задач из ЕГЭ**

Рассмотрим некоторые примеры задач единого государственного экзамена 2005 года.

а) (Часть 2, B5) *Найдите сумму всех корней уравнения* $(2^{x^2+1}-32)\sqrt[6]{3-2x}=0$.

Решение: ОДЗ данного уравнения $x \le 3/2$ определяется подкоренным выражением. Из двух корней $x=\pm 2$ уравнения $2^{x^2+1}-32=0 \Leftrightarrow 2^{x^2+1}=2^5 \Leftrightarrow x^2=4$ только $x=-2$ принадлежит ОДЗ исходного уравнения. Следовательно, сумма всех корней $(2^{x^2+1}-32)\sqrt[6]{3-2x}=0$ определяется выражением $3/2-2=-1/2$. **Ответ:** $-1/2$.

в) (Часть 2, C1) *Найдите все значения* x*, для которых точки графика функции* $y=\dfrac{\log^2_{0,4}(10-8x)}{3x+5}$ *лежат выше соответствующих точек графика функции* $y=\dfrac{9}{-5-3x}$.

Решение: Необходимые значения x удовлетворяют неравенству $\dfrac{\log^2_{0,4}(10-8x)}{3x+5} > \dfrac{9}{-5-3x}$. Его ОДЗ $x<1{,}25$ соответствует областям определения логарифмической функции ($10-8x>0$) и дробной рациональной функции ($x \ne 5/3$). Преобразуем неравенство к виду $\dfrac{\log^2_{0,4}(10-8x)+9}{3x+5}>0$ с числителем, положительным на всей ОДЗ. Знак дроби, расположенной в левой части неравенства, определяется ее знаменателем. Следовательно, решение исходного неравенства совпадает с решением $3x+5>0$ на области допустимых значений. **Ответ:** $x \in \left(-\dfrac{5}{3}, \dfrac{4}{5}\right)$.

с) (Часть 2, C2) *Решите уравнение* $\sqrt{(5^x-6)^2}+\sqrt{(5^x-4)(5^x+125)}=6-5^x$.

Решение: Область определения степенной функции $y=x^{1/n}$ с четным n определяет ОДЗ уравнения неравенством $5^x \ge 4$. Левая часть уравнения неотрицательна (сумма двух квадратных корней), поэтому в ОДЗ включаем $6-5^x \ge 0$. Следовательно, решения исходного уравнения должны удовлетворять $4 \le 5^x \le 6$. Так как при этом $\sqrt{(5^x-6)^2}=|5^x-6|=6-5^x$, то найдем решения $(5^x-4)(5^x+125)=0 \Leftrightarrow 5^x-4=0 \Leftrightarrow x=\log_5 4$ соответствующие ОДЗ. **Ответ:** $x=\log_5 4$.

Задачи для самостоятельного решения

Решите уравнение $\dfrac{\log_2(9-2^x)}{3-x}=1$. **Ответ**: $x=0$.

Решите уравнение $5^x \cdot \sqrt[x]{8^{x-1}}=500$. **Ответ**: $x=3$.

Решите неравенство $\sqrt{9^x-3^{x+2}}>3^x-9$. **Ответ**: $x \in (2,\infty)$.

Решите неравенство $\log_{0,3}\log_6 \dfrac{x^2+x}{x+4}<0$. **Ответ**: $x \in (-4,-3) \cup (8,\infty)$.

Найдите все значения x, при которых ординаты точек графика функции $y=\dfrac{\sqrt{x^2-5x+6}}{\lg^2(x+5)}$ неотрицательны. **Ответ:** $x\in(-5;-4)\cup(-4;2]\cup[3;+\infty)$.

Решение иррациональных неравенств.

При решении этих неравенств следует помнить, что в четную степень можно возводить неравенства с неотрицательными членами.

Поэтому неравенство $\sqrt[2n]{f(x)}>g(x)$ эквивалентно системам

$$\begin{cases} f(x)\ge 0,\\ f(x)>g^{2n}(x)\end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} f(x)\ge 0,\\ g(x)<0.\end{cases}$$

Неравенство $\sqrt[2n]{f(x)}<g(x)$ равносильно системе

$$\begin{cases} f(x)\ge 0,\\ g(x)>0,\\ f(x)<g^{2n}(x).\end{cases}$$

Пример 4. Решить неравенства:

а) $\sqrt{x+18}<2-x;$ б) $\sqrt{x^2+1}>x-1;$

в) $3\sqrt{x}-\sqrt{5x-5}>1;$ г) $(x-3)\sqrt{x^2+4}\le x^2-9.$

Решение.

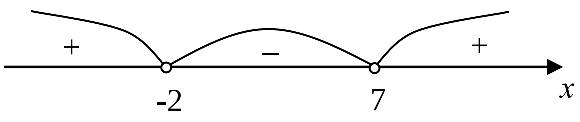
а) $\sqrt{x+18}<2-x \iff \begin{cases} x+18\ge 0,\\ 2-x>0,\\ x+18<(2-x)^2\end{cases} \iff \begin{cases} x\ge -18,\\ x<2,\\ x^2-5x-14>0.\end{cases}$

Решим третье неравенство системы методом интервалов:

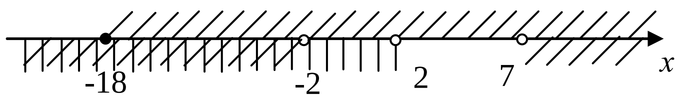
x^2-5x-14>0

x^2-5x-14=0

$$\left[\begin{array}{l} x_1=7,\\ x_2=-2\end{array}\right.$$



(x-7)(x+2)>0



$$\left[\begin{array}{l} x<-2,\\ x>7.\end{array}\right.$$

Найдем пересечение решений трех неравенств:

Ответ: -18≤x<-2.

б) $\sqrt{x^2+1} > x-1$

1) если x-1≤0, то неравенство верно, то есть x≤1;
2) если x-1>0 и так как x^2+1>0, возводим обе части в квадрат. Имеем:

$$\begin{cases} x-1>0, \\ x^2+1>x^2-2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1, \\ 2x>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>1.$$

Объединяем два решения, получим x – любое.

Ответ: x – любое.

в) $3\sqrt{x} - \sqrt{5x-5} > 1$

$$3\sqrt{x} > 1+\sqrt{5x-5} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x-5 \geq 0, \\ 9x > 1+2\sqrt{5x-5}+5x-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1, \\ 4x+4 > 2\sqrt{5x-5} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x \geq 1, \\ 2x+2 > \sqrt{5x-5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1, \\ 2x+2>0, \\ 4x^2+8x+4 > 5x-5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x \geq 1, \\ x > -1, \\ 4x^2+3x+9>0 \text{ – выполняется для всех } x, \text{ так как } D<0. \end{cases}$$

Ответ: x≥1.

г) $(x-3)\sqrt{x^2+4} \leq x^2-9$

$$(x-3)\sqrt{x^2+4} - (x-3)(x+3) \leq 0$$

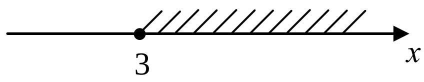
$$(x-3)\left(\sqrt{x^2+4} - (x+3)\right) \leq 0$$

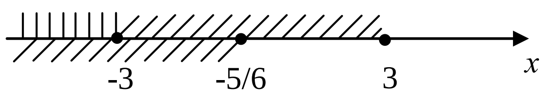
$$\begin{cases} x-3 \geq 0, \\ \sqrt{x^2+4} - (x+3) \leq 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x-3 \leq 0, \\ \sqrt{x^2+4} - (x+3) \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 3, \\ \sqrt{x^2+4} \leq (x+3), \text{ так как } x+3>0, \end{cases}$$

то можно возвести в квадрат.

$$\begin{cases} -3 \leq x \leq 3, \\ \sqrt{x^2+4} \geq (x+3) \end{cases} \quad \text{или} \quad x < -3$$





$$\begin{cases} x \geq 3, \\ x^2+4 \leq x^2+6x+9 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \leq 3, \\ x^2+4 \geq x^2+6x+9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 3, \\ x \geq -\frac{5}{6} \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 3 \qquad \begin{cases} -3 \leq x \leq 3, \\ x \leq -\frac{5}{6} \end{cases} \quad \text{или} \quad x<-3$$

$$x \in [3;+\infty) \qquad x \in \left(-\infty; -\frac{5}{6}\right)$$

Ответ: $x \in \left(-\infty; -\frac{5}{6}\right) \cup [3; +\infty)$.

Задачи для самостоятельного решения

Упростить:

1) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-1}$; 2) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}$; 3) $\sqrt{58-2\sqrt{21}}$;

4) $\dfrac{(m+x)^{\frac{1}{2}}+(m-x)^{\frac{1}{2}}}{(m+x)^{\frac{1}{2}}-(m-x)^{\frac{1}{2}}}$, если $x=\dfrac{2mn}{n^2+1}$, $m>0$, $0<n<1$.

Решить уравнения

1) $\sqrt{4-6x-x^2}=x+4$;

2) $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}-\sqrt{6-x}=0$;

3) $\dfrac{x}{x+1}-2\cdot\sqrt{\dfrac{x+1}{x}}=3$;

4) $(x+1)\cdot\sqrt{x^2+x-2}=2x+2$.

Решить неравенства:

$\sqrt{(2x-5)^2}>5$

$\sqrt{x^2-3x-18}<4-x$;

$1-\sqrt{13+3x^2}>2x$;

$\dfrac{3}{\sqrt{2-x}}-\sqrt{2-x}<2$