**5 класс**

**Задания для олимпиады по математике на 2011-12 уч.г (I этап)**

Составитель: учитель

математики Черевичник С.Г.(СШ № 8, г. Когалым)

1.(2б) В числе 3 728 954 106 зачеркнуть три цифры так, чтобы оставшиеся цифры в том же порядке составили бы наименьшее семизначное число.

Ответ: 2 854 106.

*1б, если угадано семизначное число, но не являющиеся наименьшим*

2. (3б) Все треугольники, изображенные на рисунке, имеют равные стороны. Радиус каждой из окружностей равен 2 см. Окружности касаются друг друга и сторон квадрата. Чему равен периметр «звездочки», нарисованной жирной линией?

Решение. Сторона каждого треугольника 2+2+2+2=8см, тогда периметр равен 8\*8=64 см. Ответ: 64 см

3. (4б) В данном примере различные цифры зашифрованы различными буквами. Определите, какое равенство зашифровано: **ОТВЕТ + ОЧЕНЬ = ПРОСТ**

**Решение**.

Зашифрованное равенство:  34214 + 35170 = 69384.

4.(4б) Как разложить семь алмазов в четыре одинаковые шкатулки, чтобы вес всех шкатулок получился одинаковым, если вес алмазов 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. граммов. Ответ обоснуйте.

Решение

Вес одной доли алмазов равен 7 г. Ответ: 7 + (1 + 6) + (2 + 5) + (3 + 4).

5.(4б) Четыре ученика – Витя, Петя, Юра и Сергей – заняли на математической Олимпиаде  четыре первых места. На вопрос, какие места они заняли, были даны ответы:

а)   Петя – второе, Витя – третье;

б)   Сергей – второе, Петя – первое;

в)   Юра – второе, Витя – четвертое.

Укажите, кто какое место занял, если в каждом ответе правильна лишь одна часть. Ответ обоснуйте.

Ответ: I – Петя, II – Юра, III – Витя, IV – Сергей.

**6 класс**

1.(2б) В двузначном числе в два раза больше единиц, чем десятков. Если к этому числу прибавить 36, то получится число, записанное теми же цифрами. Найдите это число.

Решение.

Выпишем все такие двузначные цифры: 12,24, 36, 48. Найдем сумму каждого из них с числом 36. 12+36=48, 24+36=60, 36+36=72, 48+36=84.

Очевидно, что условию задачи удовлетворяет только число 48. Ответ: 48.

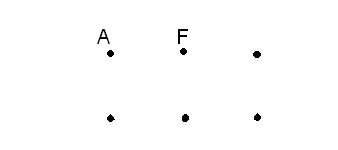
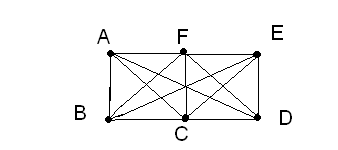
2.(3б) На плоскости даны 6 точек, расположенных в виде прямоугольника так, как указано на рис. 1. Сколько существует треугольников, у которых одна вершина находится в точке А, а две другие – в каких-либо остальных точках? Сколько существует таких треугольников, у которых одна вершина находится в точке F?

Рис.1

Решение.

Указание. Обозначив буквами все остальные точки (рис.2.), нетрудно указать все треугольники: ABF, ABE, ACD, ACF, ACE, ADF, AEF.

Во втором случае также 9 способов. *Ответ: по 9 способов.*

Рис. 2

3.(4б) Если Коля купит 11 тетрадей, то у него останется 7 рублей, а на покупку 15 тетрадей ему не хватит 5 рублей. Сколько денег у Николая? Ответ обоснуйте.

Ответ: 40 рублей.

4.(4б) У мамы четыре дочери Поля, Валя, Катя и Маша. Девочки играли и разбили вазу. На вопрос: «Кто это сделал?» Поля, Валя и Катя ответили: «Не я», а Маша – «не знаю». Потом оказалось, что две из них сказали правду, а две неправду. Знает ли Маша, кто разбил вазу? Ответ объясните.

Решение.

Среди ответов Поли, Вали и Кати может быть только один ложный ответ, иначе при двух ложных ответах получается, что стекло разбили двое. Тогда вторым ложным ответом будет ответ Маши. Значит, Маша знала, кто разбил стекло.

5. (4б) Будет ли сумма чисел  1 + 2 + 3 + …..+ 2005 + 2006 + 2007 делиться на 2007? Ответ обоснуйте.

Решение

Представим данную сумму в виде следующих слагаемых: (1 + 2006) + (2 + 2005) + …..+ (1003 + 1004) + 2007. Так как каждое слагаемое делится на 2007, то и вся сумма будет делиться на 2007. Ответ: будет.

**7 класс**

1.(2б) Какими цифрами можно заполнить “кроссворд”

С О Н

О К О

Н О С,

Если по всем горизонталям и вертикалям стоят точные квадраты?

(учитывается количество указанных вариантов)

Решение.

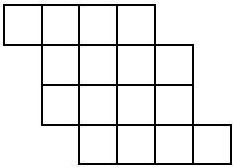
Среди трехзначных чисел, являющихся точными квадратами, есть только три с одинаковыми цифрами единиц и сотен: 121, 484, 676, причем в качестве числа ОКО подходит лишь 676. В свою очередь, точных квадратов с цифрой 6 в середине всего два – это 169 и 961. Отсюда следует, что “кроссворд” можно заполнить двумя способами.

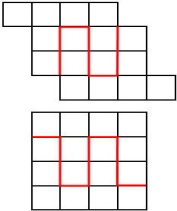
Ответ: 169 961

676 и 676

961 169.

*1б, если угадан 1 вариант*

2. (3б) Разделите фигуру рис.1 на две равные части так,   
чтобы из них можно было составить квадрат:

Решение

*2б, если угадан 1 вариант.*

Рисунок 2

Рисунок 1

3. (4б) Докажите, что из любых 12 натуральных чисел можно выбрать два, разность которых делится на 11.

Решение.

При делении на 11 получается один из 11 остатков: 0, 1, 2, …, 10. Нам же дано 12 чисел, и по принципу Дирихле остатки от деления на 11 у каких-то двух из них совпадают. Разность этих двух чисел делится на 11.

4.(4б) В спортивной секции девочки составляют 60% числа мальчиков. Сколько процентов числа всех участников секции составляют девочки?

Решение.

Пусть в спортивной секции было х мальчиков, тогда девочек – 0,6х. Они составляют (0,6x 100)/(x + 0,6x). Ответ: 37,5%.

5.(4б) Ваня, Петя, Саша и Коля носят фамилии, начинающиеся на буквы В, П, С и К.  Известно, что

a) Ваня и С. – отличники;

б) Петя и В. – троечники;

в) В. ростом выше П.;

г) Коля ростом ниже П.;

д) Саша и Петя имеют одинаковый рост.

На какую букву начинается фамилия каждого мальчика? Ответ обоснуйте.

Ответ: Саша - В., Петя – К., Коля – С., Ваня – П.

**8 класс**

1. (2б) Решите уравнение x - 6 = |x - 3|/(x - 3).

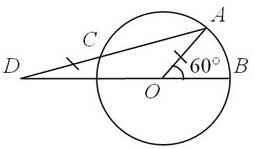
*1б, если нет выборки корней.* Ответ: 7. 

2. (3б) Восстановить запись

(\*\*\*)3=12\*\*\*\*\*\*3.

Решение.

Эта задача решается путем последовательного сужения области поиска возможных вариантов трехзначного числа, возводящегося в куб. Сначала выясняется, что это число может оканчиваться только цифрой 7, так как из цифр от 0 до 9 только 7 при возведении в куб дает последнюю цифру 3, а затем, что среди сотен девятизначными могут быть только кубы чисел, не меньших 500, и лишь 5003 начинается с 12. Проверяя числа, близкие к 500, и оканчивающиеся на 7, получаем, что данная в условии запись есть 4973=122763473. Ответ; 497 и 122763473

3.(4б) В окружности с центром в точке О проведены радиусы ОВ и ОА так, что ﮮАОВ=60°, ОВ = DС. Найдите величину ﮮАDО.

Решение

Проведем СО, притом CO=DC=OA. Тогда треугольники ODC, AOC – равнобедренные. Если ﮮАDО=x, то ﮮАCО= ﮮCАО= 2x . Зная, что ﮮАОВ=60°является внешним углом для треугольника АDО составим уравнение x+2x=60°. Ответ:  ﮮCDO = 20°.

4.(4б) Дворники получают грабли и метлы. Если каждый возьмет одну метлу или одни грабли, то останется 14 метел. А чтобы дать каждому дворнику и одну метлу, и одни грабли, не хватает 10 грабель. Сколько было дворников, сколько метел и сколько грабель?

Ответ: 24 дворника, 24 метлы и 14 грабель.

5. (4б) Найти натуральное число *A*, если из трех следующих утверждений два верны, а одно - неверно:   
а) *A+51* есть точный квадрат,   
б) последняя цифра числа *A*есть единица,   
в) *A-38* есть точный квадрат.

Решение.

Как сказано в условии задачи, одно из этих утверждений является ложным. В первую очередь на себя обращает внимание условие б). Если последняя цифра равна 1, то условие а) не верно, так как нет точных квадратов оканчивающихся на 2, условие в) тоже не может быть верным, так как в этом случае последняя цифра равна 3 и таких точных квадратов нет. Следовательно, если условие б) верно, то условия а) и в) являются не верными, что не подходит по условию задачи (должно быть два верных и одно неверное утверждение из этих трех). Следовательно условие б) должно быть ложным, а а) и в) - истинными.  
Теперь осталось разобраться с квадратами. В условиях а) и в) сказано, что A+51 и A-38 являются полными квадратами. Эти квадраты не обязательно могут быть соседними. Можно легко показать, что если два числа отличаются на число K, то разность их квадратов делится на это число K тоже. В нашем случае разность квадратов равна 89 и это число простое, следовательно эти числа могут отличаться только на 1 или 89. Последний вариант очевидно не подходит, а проверка первого варианта приводит к ответу *A=1974*.  
Ответ: *A=1974.*

**9 класс**

1.(2б) Объясните, почему 2,6·(26n -1) – целое число при любом натуральном n.

Решение.

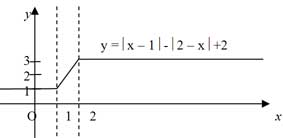
Число 26n всегда оканчивается на 6, а поэтому 26n -1 оканчивается на 5;

Заметим, что при умножении 2,6, на целое число, оканчивающееся на 5, получается целое число.

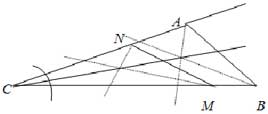
2.(3б) Решите уравнение x4 + 2006x2 – 2007 = 0.

Ответ: 1, -1

3.(4б) Постройте график функции y = |x - 1| - |2 - x| + 2.

Ответ:

4.(6б) С помощью циркуля и линейки разделите пополам угол, вершина которого недоступна.

Решение.

Задача имеет множество решений. Рассмотрим один из них. Выберем на сторонах угла произвольно по 2 точки: A, N, B, M и рассмотрим треугольники АВС и NМС. Проведем в каждом из этих треугольников биссектрисы углов. Точка пересечения биссектрис углов треугольника АВС принадлежит и биссектрисе угла С. Аналогично, точка пересечения 2 биссектрис углов треугольника NМС также лежит на биссектрисе угла С. Проводим через эти 2 точки прямую, которая будет и биссектрисой ﮮС.

5.(4б) Докажите, что среди любых шести человек найдутся трое знакомых или трое незнакомых между собой людей.

Решение.

Пусть эти шестеро: A, B, C, D, E, M. *А*находится в одном из двух отношений «знаком» или «незнаком» хотя бы с тремя из них. Пусть это будут B, C, D. Если какие-то два из них находятся в том же отношении друг с другом, то они вместе с *А*образуют искомую тройку. В противном случае искомая тройка B, C, D.

*Резерв В квадрат со стороной 1 метр бросили произвольным способом 51 точку. Докажите, что какие-то три из них можно накрыть квадратиком со стороной 0,2метра.*

Решение.

Разобьем квадрат на 25 равных квадратиков со стороной 0,2 метра. Докажем, что в каком-то из них находятся по крайней мере 3 из данных точек. Применим принцип Дирихле: если бы в каждом квадратике (внутри или на сторонах) было не больше 2-х точек, то всего их было бы не больше 50 (2\*25 = 50).

А у нас всего 51 точка, следовательно, в каком-то квадратике находится по крайней мере три их данных точек.

**10 класс**

1.(2б) Найти все такие двузначные числа *A*, для каждого из которых два из следующих четырех утверждений верны, а два -- неверны:   
а) *A* делится на *5,*   
б) *A* делится на *23,*   
в) *A+7* есть точный квадрат,   
г) *A-10* есть точный квадрат.

Решение

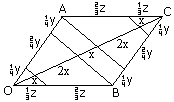
Нужно перебрать все возможные варианты. Их всего *6*: 1) а, б; 2) а, в; 3) а, г; 4) б, в; 5) б,г; 6) в,г. Верны только 3) и 6)

Ответ: 35 и 74.

*1б, если выбраны числа, соответствующие, хотя бы трем признакам.*

2.(3б) Дан параллелограмм OACB. Проведена прямая, отсекающая четверть стороны OA и треть стороны OB, считая от вершины O. Какую часть эта прямая отсекает от диагонали OC?

Решение.

Пусть OA = y, OC = x, OB = z. Проведем прямые, параллельные уже проведенной: через точки B, A, а также прямую, параллельную данной и отсекающие такие же отрезки, как в условии, от противоположных сторон.

Используя теорему Фалеса, несложно доказать, что эти прямые (вместе с данной) разбивают диагональ на отрезки x, 2x, x, 2x, x (начиная от вершины O).

Отсюда x = OC / 7.Ответ: 1\7

3.(4б) (*a*n) – арифметическая прогрессия с разностью 1. Известно, что S2009 - наименьшая среди всех Sn (меньше суммы первых n членов для любого другого значения n). Какие значения может принимать первый член прогрессии

Решение

Так как разность прогрессии положительна, то прогрессия – возрастающая. Следовательно, описанная ситуация возможна тогда и только тогда, когда члены прогрессии с первого по 2009-ый – отрицательны, а начиная с 2010-го – положительны. Таким образом, S2009 будет наименьшей, тогда и только тогда, когда а2009 <0, a2010 > 0. Отсюда получаем систему неравенств

Ответ: *a*1 (-2009; -2008).

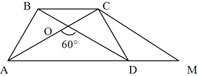
4.(4б) Стрелок десять раз выстрелил по стандартной мишени и выбил 90 очков. Сколько попаданий было в семерку, восьмерку и девятку, если десяток было четыре, а других попаданий и промахов не было?

решение

Так как стрелок попадал лишь в семерку, восьмерку и девятку в остальные шесть выстрелов, то за три выстрела (по одному разу в семерку, восьмерку и девятку) он наберет 24 очка. Тогда за оставшиеся 3 выстрела надо набрать 26 очков. Что возможно при единственной комбинации 8+9+9=26. Итак, в семерку стрелок попал 1 раз, в восьмерку – 2 раза, в девятку – 3 раза.

Решите неравенство5. (4б) Решить неравенство

Решение. Заметим, что все решения исходного неравенства  существуют, если подкоренные выражения 2(x2 – 4x + 3) и – ( x2 – 4x + 3) неотрицательны. Одновременно эти неравенства выполняются лишь при условии x2 – 4x + 3 = 0. Это уравнение имеет два корня 1 и 3. Проверка показывает, что исходное неравенство имеет единственное решение 3.Ответ: 3

*Резерв В трапеции длина одной из диагоналей равна сумме длин оснований, а угол между диагоналями равен 60°. Докажите, что трапеция – равнобедренная.*

*Решение.*

*Пусть AD = a, BC = b, AC = a + b. Продолжим AD за точку D на расстояние DM = BC. Тогда очевидно, что ∆АСМ – равносторонний, т.к. две стороны равны a+b и угол ACM равен 60°. Но это значит, что ∆АОD и ∆ВОС - тоже равносторонние. Отсюда непосредственно следует, что ∆АОВ = ∆СОD, откуда имеем, что AB = CD.*

**11 класс**

1.(2б) Найдите многочлен с целочисленными коэффициентами, корнем которого является число **√2 +√3.**

Решение

Обозначим **√2 + √3 =a**. Тогда a2 = 5 + 2**√6**, а  (a2 – 5)2 = (2**√**6)2или a4 – 10a2 + 25 = 24, которое равносильно a4 – 10a2 + 1 = 0. А это и означает, что а является корнем многочлена x4 – 10x2 + 1.

(Возможны другие варианты)

2.(3б) Сколько существует треугольников со сторонами 5 см и 6 см, один из углов которого равен 20°

Решение

Есть только один треугольник, в котором угол 20° лежит между сторонами 5 см и 6 см. Попробуем построить треугольник, в котором сторона 6 см прилегает к углу 20°, а сторона 5 см лежит против него. Для этого от вершины угла отложим отрезок длиной 6 см, и проведем окружность радиуса 5 см с центром этого отрезка, не совпадающем с вершиной. Расстояние от центра этой окружность до второй стороны угла меньше 5 см (это расстояние равно катету угла в 20°). Отсюда следует, что окружность пересечет прямую, содержащую вторую сторону угла, в двух точках, причем из-за того что радиус меньше 6 см, обе эти точки будут лежать на стороне угла, и мы получим два разных треугольника. Если же попробовать поменять ролями отрезки в 5 см и 6 см, то вершина угла окажется внутри построенной окружности, и мы получим только одну точку пересечения, а следовательно, и один треугольник.

Итак, мы получили всего 4 треугольника. Ответ: 4 треугольника

3.(3б) Определите так, чтобы сумма квадратов корней уравнения *x2 + (2 - a)x – a - 3 = 0* была наименьшей.

Решение.

Найдем сумму квадратов корней уравнения  x12 +  x22  = (x1 +  x2)2 – 2x1x2 = (2 – a)2 + 2(a + 3) = … = (a – 1)2 + 9. Значение данного выражения будет наименьшим при  a = 1. При этом значении дискриминантa левой части уравнения положителен, поэтому корни существуют. Ответ:  a = 1.

4.(4б) Можно ли число 1234 представить в виде разности квадратов двух целых чисел?

Решение.

Допустим, что 1234= а2 +b2 , где а и b – целые числа. Тогда 1234 = (а+ b)(а- b).

Рассмотрим четыре случая: а) а – четное, b – четное; б) а- четное, b –нечетное; в) а – нечетное, b – четное; г) а –нечетное, b – нечетное.

В случаях б) и в) числа (а+ b) и (а- b) нечетны, значит, их произведение нечетно и не может равняться четному числу 1234.

В случаях а) и г) числа (а+ b) и (а- b) четны, значит, их произведение делится на 4 и не может равняться числу 1234, на 4 не делящемуся.

Следовательно, число 1234 нельзя представить в виде разности квадратов двух целых чисел. Ответ: нельзя.

5.(4б) Какую наибольшую длину может иметь ребро правильного тетраэдра, который помещается в коробку, имеющую форму куба со стороной 1 см? Ответ обоснуйте.

Решение.

Радиус сферы RT, описанной около тетраэдра, не будет превосходить радиус сферы RK, описанной около куба. Пусть сторона тетраэдра *а*. Она будет равна ((2√3)/3)·RT. Самый большой тетраэдр, удовлетворяю­щий условию RT = RK, будет тетраэдр, ребра которого будут диагоналями куба.  В этом случае RK = √3/2, потому *a* = (2√6)/3· RT= (2√6)/RK= (2√6)/3 >· √6\3 = √2. Ответ: √2 см.