НАЧНЁМ С ПРОСТОГО.

Давайте подумаем-почему олимпиадные задания сложнее обыкновенных? Конечно, некоторые из них требуют дополнительных знаний и опыта. Но такие задания чаще всего встречаются на олимпиадах высокого уровня. Настоящая хорошая олимпиадная задача не должна опираться на знания, недоступные ученику обычной школы. Тогда в чём же её сложность? В необычном подходе, нестандартной, непривычной формулировке.

***Разберёмся в условии***.

Если присмотреться повнимательнее, большинство олимпиадных задач решается просто. Нужно только правильно понять- что требуется и что дано.

Вот старинная задача, в разных формулировках присутствующая во многих книгах по занимательной математике.

**Задача 1.** Три хозяйке готовили обед на одной печи. Одна положила в огонь 4 полена, а вторая-7. У третьей хозяйке дров не было, поэтому она дала двум первым гривенник (10 коп.) и копейку. Как они должны поделить эти деньги?

Обычно на этот вопрос отвечают так: 4 копейки отдать первой и 7- второй, но этот ответ неверный. Чтобы разобраться в условии, надо ответить на следующие вопросы:

1.За что платит третья хозяйка?

2.За что получают деньги первые две?

3.Сколько стоит тепло, использованное третьей хозяйкой? Каждой хозяйкой? Тремя хозяйками?

4.Сколько стоит одно полено?

5.Сколько истратили первая и вторая хозяйки в пересчёте на деньги?

*Решение.* 1. За ту часть тепла, которую она потратила на себя, то есть за треть всего тепла.

2.Две первые хозяйки вложили дров больше, чем использовали сами, поэтому они получают плату за перерасход.

3.Каждая хозяйка использовала тепла, как и третья, на 11 копеек., а за всё- на 33 копейки.

4.Раз 11 поленьев стоят 33 коп., то одно – 3 коп.

5.В пересчёте на деньги первая хозяйка потратила 12 коп. а вторая- 21 коп.

Теперь решение задачи очевидно. Раз первая хозяйка потратила 12 коп., а использовала на себя только 11, то её надо вернуть 1 коп., а второй соответственно 21-11= 10 коп. Так что им даже не придётся разменивать деньги.

Можно было решать задачу и по-другому - не «в деньгах», а «в поленьях». Главное- привести две разные единицы измерения (полено и копейка) к какай - нибудь одной.

**Задача 2.** Кусок мыла за неделю использования уменьшается на 0,1 по ширине и высоте (по длине он остался таким как был). На сколько ещё времени хватит этого куска мыла?

Начать следует опять с наводящих вопросов, которые помогут прийти к решению.

1.Какуювеличину надо знать, чтобы рассчитать «срок действия» мыла?

2.Пусть кусок мыла имеет форму прямоугольного параллелепипеда с размерами a, b и c. Чему равен его объём?

3.Смытое мыло располагалось на поверхности куска. Нельзя ли описать его форму через более простые фигуры – прямоугольные параллелепипеды?

4.Какую долю от первоначальной ширины составляет ширина мыла через неделю? А высота?

5.Чему стали равны размеры куска мыла после недельного использования? Каков объём этого куска?

6.Какой объём мыла был потрачен за неделю? За один день?.

*Решение.* Вот как можно ответить на поставленные вопросы.

1.Надо знать, сколько мыла тратили в день ( или в неделю).

2.Произведению измерений, т.е*.* abc.

3.Можно, она равна разности начального и конечного кусков.

4.Ширина и высота составляют по 1-0,1=0,9 от первоначальной.

5.Ширина -0,9a, высота -0,9 b, длина, как и была, c. Объём такого куска равен 0,9a0,9bc=0,81abc.

6.За неделю потрачено abc - 0,81abc = 0,19abc. За день – в 7 раз меньше, т.е. 0,19abc / 7.

Объём оставшегося мыла – 0,81 abc, а в день тратится 0,19abc / 7, поэтому его хватит на 0,81abc / (0,19abc / 7) = 0,81(7/ 0,19) дней, что составляет 29 дней с небольшим. Значит, мыла хватит на 29 дней и останется небольшой обмылок.

Хотя в начале решения м были введены обозначения для неизвестных величин - размеров куска мыла, однако в ответе они не присутствуют. Такие промежуточные переменные бывают удобны для чёткой и простой записи условия.

***Задача 3*.** Александру в n2 году исполнится n лет. В каком году он родился?

В этой задаче, казалось бы очень информации. Говорится о событии, которое произойдёт неизвестно в каком году, когда Александру исполнится неизвестно сколько лет.

1.Любой ли номер года можно записать как n2? Назовите несколько таких лет в настоящем и предыдущем столетии.

2.Наступил ли уже год, о котором говорится в задаче? Какое ограничение на n это даёт?

3.Какой номер (выраженный через n) имеет год рождения Александра? Что можно сказать об n , если известно, что этот год уже наступил?

*Решение*. 1.Нет. Например, годы 1936=442, 2025=452, 2116=462. Ответ уже ясен, осталось только доказать, что он единственный.

*2*.Нет, поэтому n2>2001,откуда n >45 или n=45.

3.Год n2 –n , что должно быть не больше 2001. Значит, n<45 или n=45, ведь 462 -46=2070. Итак, Александр родился в 452-45=1980 году.

***Другими словами (переформулирование условия)***.

Довольно часто олимпиадные задачи кажутся трудными потому, что простой факт сформулирован необычным образом, рассматривается под непривычным углом зрения. Поэтому очень важно научиться видеть за формой задачи её суть. А вообще, математика обладает такой удивительной особенностью, что факты, доказанные в одном её разделе, находят применение совсем в другом. Например, алгебраическая задача сводится к геометрической, геометрическая – к тригонометрической, уравнение - к неравенству, текст – к рисунку и т.д.

Поэтому важно научиться одну и ту же задачу формулировать разными способами, чтобы выбрать тот из них, при котором задача решается легче.

***Задача 4.*** Действительные числа a, b, c и d таковы, что a+b = c+d и a2+b2=c2+d2.Докажите, чтоa3 +b3=c3+ d3.

Эта задача допускает разные способы решения. «Прямое» решение состоит в том, чтобы рассматривать условие задачи как систему двух уравнений. Конечно, найти все четыре неизвестных из них нельзя. Можно только выразить две из них через две другие. Например, из первого уравнения выразить d через три другие переменные, подставить во второе, которое можно рассматривать как квадратное уравнение для c. Полученные значения c и d нужно подставить в третье соотношение и проверить, будет ли оно выполняться для всех a и b.

Однако в задаче не требуется решать такую систему, так что можно пойти другим путём. Например, получить третье равенство из первых двух с помощью алгебраических преобразований. Фактически нужно выстроить цепочку соотношений, следующих одно за другого, в начале, которого стоит условие задачи, а в конце – заключение.

Искать эту цепочку можно с двух концов. Либо выводить следствия из первых двух равенств, либо преобразовать к более удобному виду «конечное» соотношение. Последний путь кажется более перспективным, так как не даёт забыть цель преобразований.

1.Как можно преобразовать сумму кубов двух чисел?

2.Знания какой величины не хватает, чтобы вычислить это выражение?

3.Какой формулой надо воспользоваться, чтобы выразить неизвестную величину?

*Решение.* 1. a3+b3= (a + b) (a2-a b+b2).

2.Надо знать произведение a b.

3.Например, (a + b)2=a2+2a b+b2, откуда легко найти a b:

a b= ((a + b)2-(a2 + b2)) / 2.

Теперь можно выразить сумму кубов через сумму чисел и сумму их квадратов:

a3+b3= (a + b)(a2+b2-1/2((a + b)-(a2+b2)) = ½(a +b)(3(a2+b2)-(a + b)2).

Видно, что сумма кубов однозначно определяется двумя введёнными величинами. Но для пары чисел (c, d) сумма и сумма их квадратов такие же, как для пары (a, b), поэтому и сумма у них одинакова.

***Математический эксперимент.***

Настоящая олимпиадная задача – это маленькая научная проблема. И не важно, что кто-то её уже решил. Необходимо пройти все этапы научного поиска. первый из них - обирание фактов и выдвижение на их основе гипотезы.

Чаще всего в задаче можно выделить несколько частных случаев. Например, если в задаче есть целые числа, можно рассматривать конкретные их значения. В геометрических задачах этот метод применяется реже, однако можно рассматривать правильные, прямоугольные, равнобедренные треугольники вместо произвольных, крайние или средние положения точек (на отрезке, дуге) и т.п.

Перебор частных случаев может быть решением, только если он полный, т.е. рассмотрены все возможности. В противном случае рассмотрение частностей – не доказательство. Оно может только навести на мысль, подсказать ответ. Но без доказательства даже правильный ответ не будет считаться решением. Частные случаи хороши тем, что помогают проверить общую формулу: если она не выполняется хотя бы водном из них, то не верна.