**Элементы математической логики**

(Элективный курс для учащихся 9 класса в рамках предпрофильной и профильной подготовки)

Выполнила:

Ляликова В.А, учитель математики

МОУ «СОШ п. Расково

Саратовского района Саратовской

области»

2014 г.

**Методические рекомендации**

Данный элективный курс предлагается учащимся в рамках предпрофильной подготовки и рассчитан на 10 часов. Теоретическая часть представляет собой основные понятия математической логики:

**Во-первых**, даётся понятие классической логики и её задачах, для чего надо уметь правильно строить суждения и делать вывод из построенной конструкции, даётся понятие высказывания (простого и сложного). В связи с этим необходимо учащихся на примерах познакомить с понятием множества, его элементами (хотя иногда они уже с ним знакомы с уроков информатики, то тогда вспомнить, повторить). А **во-вторых**, определяются операции с высказываниями и на примерах отрабатываются. Примеры высказываний берутся не только математическими по содержанию, но и из литературы, биологии.

**Основная задача курса** – развитие логического мышления учащихся, умения правильно, последовательно рассуждать, строить сложные высказывания на предложенных примерах, составлять свои и составлять таблицы значений.

**Пояснительная записка**

Умение правильно рассуждать необходимо в любой области человеческой деятельности: науке и технике, юстиции и дипломатии, планировании в экономике, в военном деле и т.д.

Умение логически грамотно рассуждать становится всё более важным в условиях нашей стремительной жизни, когда возникает необходимость быстро принимать решения, а чтобы каждое решение было правильным, надо уметь использовать различные формы суждений, их комбинации, чтобы верно предусмотреть, предугадать последствия принятых решений.

Из списка школьных предметов логика (наука о законах рассуждений) была исключена примерно в 50-х годах. Но все, то из логики, без чего нельзя обойтись в обучении, должна была преподнести ученикам математика. Должна была, но не сумела. Конструкции формальной логики учитель едва успевает упомянуть, когда разъясняет доказательства теорем, но о каких-то подробных комментариях нет и речи, т.к. не хватает времени. И поэтому, хотя весь школьный курс математики рассчитан на применение логики и пронизан логическими идеями (доказательство теорем, тождеств, решение уравнений и т.д.), но наиболее важные или трудные приёмы логических рассуждений заслуживают специального внимания. Учиться логически рассуждать нужно во всех классах школы. Чтобы правильно рассуждать, надо научиться из простых высказываний правильно составлять сложные высказывания или, как говорится в математической логике, выполнять операции над высказываниями. При этом необходимо знать вытекает, ли истинность сложных высказываний из истинности составляющих их более простых предложений.

Решение задач на вычисления, преобразования, построения возможны без логических рассуждений. Значит, в математике невозможно обойтись без логики.

**Учебно-тематический план:**

|  |  |
| --- | --- |
| Тема и содержание | Кол-во часов |
| 1. Вводное занятие (для чего надо изучать логику, примеры логических суждений) | 1 |
| 2. Логика высказываний (классическая логика, понятие силлогизма, высказывания, простые и сложные высказывания) | 3 |
| 3. Операции (действия) с высказываниями (отрицание, конъюнкция и дизъюнкция, импликация и эквиваленция высказываний) | 5 |
| 4. Заключительное занятие (алгебра логики, составление таблиц и истинности сложных логических выражений) | 1 |

I.**Для чего нужно изучать логику**

«Если все вороны чёрные, то все нечёрные предметы – не вороны». Это высказывание верно и чтобы это утверждать, не нужно быть знатоком птиц. Это пример утверждения, которое истинно, независимо от смысла входящих в него понятий, а в силу своей формы. Вот изучением такого рода утверждений и занимается логика (она изучает правильные способы рассуждений, такие способы, которые приводят к верным результатам, когда верны исходные понятия).

Предметом изучения служат рассуждения. Для этого придумали специальные формальные языки для записи утверждений и их доказательств. Формальный язык вместе с правилами построения выводов называют формальной системой. Изучение формальных систем привело к возникновению многих важных направлений в математической логике **(теория моделей** исследует вопрос о том, как можно придать «смысл» выражениям формальных языков и что при этом получается, **теория доказательств** изучает свойства выводов в формальных системах, важнейшим разделом логики, который уже рассматривается как самостоятельная дисциплина, является **теория алгоритмов).** Многие знаки, которые придумали логики для построения формальных систем, вошли в общее употребление. С некоторыми мы тоже познакомились (˄ конъюнкция, «и» ˅ (дизъюнкция, «или»), (импликация, «если….,то…) и другие.

**II. Логика высказываний**

**1. Классическая логика. Понятие силлогизма**

Правильно, грамотно, последовательно рассуждать необходимо любому человеку, независимо от профессии и возраста и нужно в любом деле. Хотя это умение восходит к древнейшим временам, логика, т.е. наука о том, какие формы рассуждений правильны, возникла лишь немногим более двух тысяч лет тому назад. Она была развита в I˅ веке до н.э. в работах Аристотеля, его учеников и последователей. Он исследовал различные формы суждений и их комбинаций, ввёл понятия **силлогизма,** т.е. рассуждения, в котором из данных двух суждений выводится третье.

**Примеры силлогизмов:**

1. «Все млекопитающие имеют скелет»

«Все киты – млекопитающие»

Из этих двух суждений получаем третье: «Следовательно, все киты имеют скелет».

2. Ту же форму имеет силлогизм:

«Все квадраты - ромбы»

«Все ромбы – параллелограммы»

«Следовательно, все квадраты – параллелограммы».

В общем виде этот силлогизм имеет форму: «Все а суть в, все в суть с. Следовательно, все а суть с». Это силлогизм правильной формы.

3. А вот пример силлогизма неправильной формы:

«Все квадраты – ромбы»

«Некоторые ромбы имеют острый угол»

Следовательно, некоторые квадраты имеют острый угол». Хотя оба утверждения, из которых был сделан вывод, истинны, сам вывод о существовании квадратов с острым углом ложен. Значит, силлогизм, имеющий форму «Все а суть в, некоторые в суть с, значит некоторые а суть с» может привести к ложным выводам. Аристотель выделил все правильные формы силлогизмов, которые можно составить из суждений вида: «Все а суть в», «Некоторые а не суть в». Логика, основанная на теории силлогизмов, называется **классической.** Доказано, что общее число силлогизмов, которые можно составить из суждений указанного выше вида, равно256. Из них правильными являются лишь 24. Для проверки правильности силлогизмов можно использовать метод, основанный на теории множеств.

Множество – это одно из исходных понятий, неопределяемых, его можно пояснить, описать, привести конкретные примеры, но не определить. И суждения, из которых строятся силлогизмы, являются на самом деле высказываниями о множествах. Поскольку множества можно изображать в виде геометрических фигур, логические рассуждения тоже можно изображать геометрически. Например, рис.1 поясняет, что если все а есть суть в, а все в суть с (если А˂В и В˂С, то А˂С)

Рис.2 Служит для пояснения силлогизма «Если все а суть в и ни одно в не является с, то ни одно а не является с» (Если А˂В, а В˄С=0, то А˄С= 0). А рис. 3,а показывает, почему не годится силлогизм «Все а суть в, некоторые в суть С», хотя А˂В и В˄С=0, но А˄С=0, т.е. некоторые а суть с.

Это показывает, что неправильно построенное рассуждение не обязательно приводит к ложному выводу, случайно может оказаться и так что вывод будет истинным. Но логика считает допустимыми только такие формы рассуждений, которые гарантируют истинный результат во всех случаях, когда исходные утверждения истинны. Этот метод геометрических иллюстраций логических рассуждений был предложен великим математиком 18 века Петербургским академиком Леонардом Эймером и широко применялся английским математиком Джоном Венном. Поэтому и рисунки называют диаграммами Эйлера – Венна. Но в сложных случаях их использование было затруднительно.

В конце 16 века словесная форма записи алгебраических выражений стала тормозить развитие науки и поэтому, была создана буквенная символика. Точно так же, чтобы облегчить проверку и преобразование сложных цепочек рассуждений, было создано особое буквенное исчисление - алгебра логики или математической логики. Основы её были заложены Г.Лейбницем, немецким математиком, а ирландский математик Джордж Буль своими трудами положил начало формирования математической логики, как научной дисциплины. В алгебре логики буквы (обычно прописные латинские) обозначают высказывание, а операции над ними символизируют операции над высказываниями.

**Упражнения**

1.Нарисуйте диаграммы Эйлера – Венна, иллюстрирующие суждения:

а) все х являются у;

б) некоторые х являются у;

в) ни одно х не является у;

г) некоторые х не являются у.

2. Докажите, что из предложения «Некоторые х являются у», следует предложение «Некоторые у являются х»

3.Докажите, что если ни одно х не является у, то ни одно у не является х

4.Следует ли из того, что «Все х являются у и некоторые у являются z», утверждение «Некоторые х являются Z»

Ответ: Возможны 2 варианта ответов, т.е. гарантированного ответа, что «некоторые х являются Z» нет

5-6 задания – аналогично строится диаграмма Э.-В.

5. Правильно ли рассуждение, имеющее форму: «Все х являются у и некоторые у являются Z, значит, некоторые Z являются х?»

6. Правильно ли рассуждение, имеющее форму: «Все являются у и ни одно х не является Z, значит, все у не являются Z?»

7. Для следующих рассуждений постройте их буквенную форму и проверьте с помощью диаграмм Эйлера – Венна, правильна ли эта форма:

а) Если все квадраты являются прямоугольниками, то некоторые прямоугольники не являются квадратами.

Ответ: «Все х являются у», следует, что «Некоторые у не являются х»

б) Если ни один кит не может летать, то ни один летающий предмет не является китом.

Ответ: «Ни одно х не является у», то «Ни одно у не является х»

в) Если всех львов можно приручить и все львы – хищники, то всех хищников можно приручить.

Ответ: «Все х являются у», «Все х являются Z», то «Все Z являются у». Ни одно из рассуждений не является правильным.

а) б)

г) Если некоторых хищников можно приручить и все львы – хищники, то некоторых львов можно приручить.

Ответ: «Если некоторые х являются у», а «Все Z являются х», то некоторые Z являются у».

а) или б)

д) Если ни один лев не является рыбой и все львы живут на суше, то ни одна рыба не живёт на суше.

**Задание:**

Проанализируйте суждения, приведённые ниже:

а) Все писатели – деятели искусства. Некоторые деятели искусства – талантливые люди. Значит, некоторые писатели – талантливые люди.

б) Все люди смертны. Все люди – живые существа. Значит все живые существа смертны.

в) Все кошки являются рыбами, у всех рыб – четыре ноги. Значит у кошки четыре ноги.

г) Некоторые позвоночные являются млекопитающими, и некоторые позвоночные являются лягушками. Значит, некоторые лягушки – позвоночные.

**Вопросы:**  Какие из рассуждений имеют правильную форму. В каких из них истинны посылки? В каких из них истинны заключения? Можно ли из ложных посылок правильных рассуждений получить истинное заключение?

**ІІ. Высказывания:**

Основным понятием математической логики является высказывание – это любое повествовательное предложение, относительно которого можно сказать, что оно либо истинно, либо ложно. Высказывания могут быть выражены с помощью слов, а также математических, химических и прочих знаков.

Примеры: а) 2+6˃8 (ложное высказывание)

б) Марс дальше от Солнца, чем Венера (истинное высказывание); в) II + ˃

(ложное высказывание)

Высказывания а и в означают одно и то же, но выражены разными знаками. Не всякое предложение является высказыванием, например, «Пейте томатный сок!», не является высказываниями и определениями, т.к. они не могут быть истинными или ложными, они лишь фиксируют принятое использование терминов.

Упражнения 1:

Укажите среди следующих предложений высказывание:

а) луна – спутник Земли,

б) все учащиеся любят математику,

в) принеси мне, пожалуйста, книгу,

г) некоторые люди имеют голубые глаза,

д) окружностью называется множество точек плоскости, расстояние которых до данной точки этой плоскости имеет заданную величину,

е) вы были в театре?

2: Установите, какие из следующих предложений являются истинными, а какие - ложными высказываниями:

а) число - 2 меньше нуля,

б) частное от деления числа 7 на 0 равно 0,

в) сумма чисел 5 и х равна 10,

г) все треугольники - равнобедренные,

д) знаете ли вы украинскую ночь?

3: Выделите среди следующих записей высказывания и определите истинны они или ложны:

а) 1917 ,б) АВ АВ, в) АВ АВ, г) ˂АОВ= ,д) {а} {а,в,с}, е) (4+√7) (4-√7)=3.

**Простые и сложные высказывания:**

Некоторые высказывания можно разложить на части и при этом каждая часть будет самостоятельным высказыванием. Например, «Сегодня в 4 часа я был в школе, а к 6 часам пошёл на каток». Высказывание, которое можно разложить на части, называют **сложным,** а неразложимое далее высказывание – **простым.**

Упражнения:

1) Даны высказывания: А: «Земля вращается вокруг Солнца» и В: «Земля имеет форму шара». Образуйте из них сложные и подчеркните слова, с помощью которых они образованы.

2) Среди приведённых ниже высказываний укажите сложные, выделите в них простые, обозначив каждое буквой:

а) На уроке математики учащиеся отвечали на вопросы учителя и писали самостоятельную работу,

б) Если в данном четырехугольнике диагонали равны, то этот четырёхугольник ромб,

в) -17˂ 0

г) Число 15 делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма цифр этого числа делится на 15

д) Мы пойдём кататься на коньках или на лыжах.

**III Операции (действия с высказываниями)**

**1. Отрицание**

Отрицанием высказывания А называют такое высказывание В, что В ложно, если А истинно, и В истинно, если А ложно. Отрицание высказывания А обозначают А или (не А) (читают «Не А» или «Неверно, что А»).

Следующая таблица показывает связь между А и А:

|  |  |
| --- | --- |
| А | А |
| И | Л |
| Л | И |

«И» - истина, «Л» - ложь. Эти слова в логике называют значениями истинности высказываний.

Упражнения: 1) Постройте отрицание: Все дороги ведут в Рим

Ответ: Некоторые дороги в Рим не ведут (или: Существуют дороги, которые в Рим не ведут).

2) Следующие цитаты из литературы написать в виде утверждения с ясной логической структурой и построить отрицания: а) « Во всех ты, Душенька, нарядах хороша».

Утверждение: Все наряды Душеньке к лицу

Отрицание: Существует наряд, который Душеньке не идёт.

б) «На свете чуда нет, к которому б свет не пригляделся»

Утверждение: Не существует чуда, к которому нельзя привыкнуть

Отрицание: Существуют чудеса, к которым нельзя привыкнуть.

в) «Каждый солдат, носит в своём ранце маршальский жезл»

Утверждение: Каждый солдат мечтает стать маршалом.

Отрицание: некоторые солдаты не мечтают стать маршалами.

г) «Есть много на свете, друг Гораций, что непонятно нашим мудрецам».

Утверждение: Существуют факты, непонятные мудрецам.

Отрицание: Все факты мудрецам понятны.

д) «Всё врут календари»

Утверждение: Во всех календарях на каждой странице любое утверждение ложное.

Отрицание: Существуют календари, в которых можно найти страницу, где записано хотя бы одно истинное высказывание.

При работе над упражнениями надо упомянуть о законе исключённого третьего, который лежит в основе человеческой логики. Это закон гласит: два противоречащих друг другу высказывания не могут быть оба ложными, какое – либо из них (или утверждение, или отрицание) обязательно истинно, третьего не дано. А так же обращаем внимание, что с точки зрения математики и формальной логики слово «всё» имеет синонимы «любой», «каждый», «всякий», а слово «существует» - синонимы «можно найти», « есть хотя бы один».

Задание:

1) Постройте отрицание приведённых ниже высказываний. Определите значения истинности этих высказываний и их отрицаний.

а) Число 5 – делитель 542,

б) Существуют параллелограммы с прямыми углами,

в) Автомобиль не имеет права ехать вперёд на красный свет,

г) Все натуральные числа делятся на 2,

2) Среди следующих высказываний найдите отрицание высказывания «Существуют чётные простые числа».

а) существуют нечётные простые числа,

б) существуют чётные составные числа,

в) любое простое число нечётно,

г) не существует чётных простых чисел.

3) Определите, какие из предложений в следующих парах являются отрицаниями друг друга, и какие нет:

а) 4˂0, 4˃0, б) 5˂0, 5˃0.

в) АВС прямоугольный, АВС остроугольный,

г) Он мой друг, он мой враг.

**2. Конъюнкция высказываний:**

Высказывания «А» и «В» истинное, если истинны оба высказывания А и В, и ложное, если хотя бы одно из них ложное, называют **конъюнкцией** этих высказываний и обозначают А ˄ В (читают «А и В»). Таблица истинности А ˄ В имеет следующий вид:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| А | В | А ˄В |
| И | И | И |
| И | ˄ | ˄ |
| ˄ | И | ˄ |
| ˄ | ˄ | ˄ |

Пример: 1) 3˂6˂7

2) Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и являются биссектрисами его углов.

**3. Дизъюнкция высказываний:** В математической логике считают, что высказывания «А или В» истинно, если истинно хотя бы одно из высказываний, и ложно лишь в том случае, когда оба ложны. Такое высказывание называют **дизъюнкцией**  и обозначают А ˅ В (читают «А или В»). Таблица истинности для А ˅ В имеет вид: (см. след страница).

Упражнения: 1) Среди следующих утверждений выделите конъюнкции и дизъюнкции и определите, истинны они или ложны:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| А | В | А ˅В |
| И | И | И |
| И | ˄ | И |
| ˄ | И | И |
| ˄ | ˄ | ˄ |

а) Число 27 кратно 3 и 9,

б) 17˂42˂18,

в) Число 2 – простое или чётное,

г) АВС является остроугольным, прямоугольным или треугольным,

д) АВС является разносторонним, равнобедренным или равносторонним,

е) 7 = 49 и (-7) = 49

2) Даны высказывания:

А: «Я купил велосипед»

В: « Я участвовал в соревнованиях по велоспорту»

С: « Я путешествовал по стране»

а) А˄В, б) А ˅В, в) А ˄ В, г) А˅В˅С, д) А˄В, е) А˅С, ж) А˅С, з) (А˄В) ˅С.

3) Пользуясь предыдущими высказываниями, запишите с помощью символов следующие высказывания:

а) Я не путешествовал по стране,

б) Я купил велосипед и участвовал в соревнованиях,

в) Я не путешествовал по стране и не участвовал в соревнованиях,

г) Я купил велосипед, но не участвовал в соревнованиях,

д) Я купил велосипед или путешествовал по стране.

**4. Импликация высказываний:**

Рассуждения чаще всего представляют собой цепочки рассуждений, высказываний. Эти высказывания часто имеют условный характер, т.е. утверждают, что некоторое высказывание верно при условии, что истинно другое.

Например: 1) Если к вечеру будет хорошая погода, то «Я пойду гулять».

2) Если у боковые стороны равны, то и углы при основании равны.

Общий вид таких высказываний: «Если А, то и В». Такое высказывание называют **импликацией.** Итак, импликацией высказываний А и В называют высказывание А В (Если А, то В), ложное лишь в случае, когда А истинно, а В ложно. Таблица истинности для импликации имеет вид:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| А | В | А В |
| И | И | И |
| И | Л | Л |
| Л | И | Л |
| Л | Л | И |

Упражнения: 1) В следующих составных высказываниях выделите составляющие их элементарные высказывания, укажите истинные импликации:

а) Если число 48 кратно 8, то оно кратно и 4,

б) Если - 3˂ -1, то 3 = 6,

в) Если 2\* 2=5, существуют ведьмы

2) Даны высказывания:

А: «Четырёхугольник MNPQ – параллелограмм»

В: «Диагонали четырёхугольника MNPQ в точке пересечения делятся пополам».

Сформулируйте словами высказывания и установите, истинны они или ложны: а) А → В, б) В → А, в) А → В, г) В → А, д) А→ В, е) В→ А, ж) А → В, д) (А→ В)˄(В → А).

3) Определите значения истинности следующих высказываний:

а) Если 16 делится на 4, то 16 делится на 2,

б) Если 2\*2 = 4, то 7=81,

в) 16 делится на 4 тогда и только тогда, когда 16 делится на 2.

4) Даны высказывания:

А: «Число 729 кратно 9»,

В: «Сумма цифр числа 729 кратна 9».

Сформулируйте высказывания:

а) А → В, б) В → А, в) А ↔ В.

**I˅ Алгебра логики:**

Алгеброй логики называют раздел математической логики, в котором изучают общие свойства выражений, составленных из данных высказываний. в алгебре логики используют буквы не только для обозначения конкретных высказываний, но и для обозначения логических переменных, которые могут принимать только два значения И или Л. Если составить из логических переменных выражение, связав их по определённым правилам символами ˄,˅, , и знаками отрицания, то получится логическое выражение, которое при одних значениях истинности переменных истинно, а при других ложно. Вычисляя значения истинности выражения при различных комбинациях значений истинности входящих в него логических переменных, получаем таблицу истинности данного логического выражения.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **А** | **В** | **А** | **А˄В** |
| **И** | **И** | **Л** | **Л** |
| **И** | **Л** | **Л** | **Л** |
| **Л** | **И** | **И** | **И** |
| **Л** | **Л** | **И** | **Л** |

Например, для выражения А ˄В эта таблица имеет вид:

Упражнение – задание:

1) Из простых высказываний:

А: «Завтра будет дождь»

В: «Мы пойдём в театр»

С: «Завтра будет солнечно»

Д: «Завтра занятия начнутся раньше обычного»

Образованы следующие составные высказывания:

а) Если завтра будет дождь, то занятия начнутся раньше обычного, и мы пойдём в театр,

б) Завтра будет солнечно или будет дождь, и занятия начнутся раньше обычного,

в) Завтра занятия начнутся раньше обычного, и мы пойдём в театр тогда и только тогда, когда не будет дождя и будет солнечно. Запишите данные сложные высказывания, используя символы алгебры логики.

2) Для каждого из следующих выражений придумайте предложения соответствующей логической структуры:

а) А → В, б) А˄В ↔ (А˅В), в) А→(В˄С), г) (А→В)˅С.

**Литература:**

1. Н.Я.Виленкин, Р.С. Гутер и др. Факультативный курс. Избранные вопросы математики (7-8 кл.), М., Просвещение, 1978 г.

2. Ф.Ф.Нагибин, Е.С.Канин. Математическая шкатулка, М., Просвещение, 1988 г.

3. Савин А.П. Энциклопедический словарь юного математика, М., Педагогика, 1989 г.

4. Журнал «Математика в школе» №1, 2001 г., стр. 34; Курдюмова Н.А. «Все» и «некоторые на одном уроке».