Векторно-координатный метод.

Решение задач.

Подготовка к ЕГЭ

по математике.

Учитель математики: Васильева Н. В.

2014-2015 уч.г.

1. ***Расстояние между точками* А(**$х\_{1, }у\_{1}$**,** $z\_{1}$**),В**$(х\_{2, }у\_{2}$**,** $z\_{2}$**)**

 **равно** $\left|АВ\right|$**=**$\sqrt{(х\_{2}-х\_{1})^{2}+(у\_{2}-у\_{1})^{2}+(z\_{2}-z\_{1})^{2}}$**.**

 *2. Уравнение плоскости*

Плоскость - алгебраическая поверхность первого порядка в декартовой системе

координат.

Плоскость может быть задана уравнением первой степени.

Общее уравнение (полное) плоскости Ах + By + Сz + D=0

 Где А,В, С и D-постоянные, причем А, В, С и D одновременно не равны 0.

Вектор N(A,B, С) перпендикулярен плоскости (нормальный вектор или вектор нормали).

**Уравнение плоскости в отрезках:**

$\frac{х}{а}$ **+**$ \frac{у}{b}$ **+**$\frac{Z}{c}$ **= 1**

*Где* **а= -D/A; b = -D/B ; с = —D/С** ***-отрезки, отсекаемые плоскостью***

*на осях Ох, Оу и Oz*

***z***

х

***2.1 Особые случаи положения плоскости относительно системы координат***

Уравнение Ах + By + Cz = 0 (свободный член D = 0) представляет плоскость, проходящую через начало координат

Уравнение Ах + By + D = 0 (коэффициент С = 0) представляет плоскость,

параллельную оси OZ.

Уравнение Ах + Cz + D = 0 - плоскость параллельную оси OY.

Уравнение By + Cz + D = 0 - плоскость, параллельную оси ОХ.

Полезно запомнить: если в уравнении нет буквы z, то плоскость параллельна оси OZ и т.п.

Уравнение Ах + D = 0 (В = 0, С = 0) представляет плоскость, параллельную как оси OY, так и оси OZ, т. Е. параллельную координатной плоскости YOZ.

Аналогично уравнение By + D = 0- плоскость, параллельную ZО

 - и уравнение Cz +D= 0- плоскость параллельную ХО Y.

 Уравнения х = 0, у = 0, z = 0 представляют соответственно плоскости YOZ, XOY, XOZ.

***3. Нахождение расстояния от точки до плоскости***

**Расстояние от точки до плоскости-** это наименьшее из расстояний между этой

точкой и точками плоскости.



Известно ,что расстояние от точки равно длине перпендикуляра , опущенного из этой точки на плоскость .

Пусть А=( Х0, У0 , Z0) точка , расстояние от которой необходимо подсчитать.

Плоскость можно задать уравнением плоскости в отрезках$\frac{х}{а}$ **+**$ \frac{у}{b}$ **+**$\frac{Z}{c}$ **= 1**

из которого легко получить полное уравнение плоскости



Ax+By+Cz+D=0 с вектором нормали N(A, В, С). Для нахождения

расстояния от точки до плоскости используем следующую формулу :

d**=**$\frac{\left|Ах\_{0} +Ву\_{0} +С Z\_{0}+D\right|}{\sqrt{ А^{2}+ В^{2}+С^{2} }}$

*Пример решения задачи*

**Задача**

 Дано: единичный куб A...D1

Найти: расстояние от точки А до плоскости АВ1Д1

 х

  Решение:1. Вводим систему координат, точка А- начало

**Y**

**Z** координат, оси координат- прямыеА1D1,А1В1,А1А.

 2. Напишем уравнение плоскости АВ1D1 в отрезках и уравнение плоскости

 $\frac{х}{а}$ **+**$ \frac{у}{b}$ **+**$\frac{Z}{c}$ **= 1** $\frac{х}{1}$ **+**$ \frac{у}{1}$ **+**$\frac{Z}{1}$ **= 1 х + у+ Z -1=0**

Коэффициенты А=1,В=1,С =1,D =-1

3. Найдём координаты точки А(0; 0; 0)

4. По формуле расстояния от точки до плоскости получаем

d=$\frac{\left|А\*х+В\*у+С\*Z+D\right|}{\sqrt{А^{2}+В^{2}+С^{2}}}$ =$\frac{\left|1\*0+1\*0+1\*0-1\right|}{\sqrt{1^{2}+1^{2}+1^{2}}}$ =$\frac{1}{\sqrt{3}}$

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{3}}$

**Задача**

 Найти расстояние между плоскостью 2x + 4y - 4z - 6 = 0 и точкой M(0, 3, 6).

**Решение:** Подставим в формулу коэффициенты плоскости и координаты точки

d = $\frac{\left|2\*0+4\*3+\left(-4\right)\*6-6\right|}{\sqrt{4+16+16}}$ =$ \frac{\left|0+12-24-6 \right|}{\sqrt{36}}$ =$ \frac{\left|-18\right|}{6}$ = 3

**Ответ:** 3.

***4. Нахождение угла между плоскостями , прямой и плоскостью***

4.1 Для нахождения угла между плоскостяминеобходимо провести в каждойплоскости, пересекающиеся прямые, перпендикулярные линии пересечения плоскостей.



**Угол между этими прямыми и равен линейному углу двугранного угла между плоскостями.** Этот угол не зависит от точки проведения прямых.

 Но можно рассматривать угол между векторами нормали к каждой плоскости.

Его значения отличается на 1800 от угла между плоскостями. Применяя формулу Cos (1800 –α ) = - Cosα и учитывая угол между плоскостями рассматривается как острый , можно найти |Cos (1800 –α ) |.

**Величиной угла между плоскостями называется величина меньшего двугранного угла.**

Пусть наши плоскости  α1 и α2 заданы уравнениями:

α1:  А1х+В 1y+С 1z +d=0

α2:  А2х+В 2y+С 2z +d=0

**Косинус угла  между плоскостями находится по формуле:**

cos α =$\frac{\left|A\_{1A\_{2}} +B\_{1}B\_{2}+ C\_{1 C\_{2}} \right|}{\sqrt{A\_{1}^{2} + B\_{1}^{2} + C\_{1}^{2} \sqrt{A\_{2}^{2}+ B\_{2}^{2} + C\_{2}^{2}}}}$

В ответе мы записываем $\left|cos α\right|$, так как величиной угла между плоскостями называется величина **меньшего** двугранного угла.

**Алгоритм**

 применение скалярного произведения для вычисления угла между плоскостями.

1. Нормальный вектор( нормаль) для первой плоскости.
2. Нормальный вектор( нормаль) для второй плоскости.
3. Вычисляем cos α по формуле cos α =$\frac{\left|A\_{1A\_{2}} +B\_{1}B\_{2}+ C\_{1 C\_{2}} \right|}{\sqrt{A\_{1}^{2} + B\_{1}^{2} + C\_{1}^{2} \sqrt{A\_{2}^{2}+ B\_{2}^{2} + C\_{2}^{2}}}}$
4. Найти угол α. Если значение косинуса не табличное , то записать ответ, используя арккосинус

*Пример решения задачи*

**Задача**

 Дано: единичный куб A...D1

Найти: угол между плоскостью В 1С 1 CD и плоскостью АВ 1D 1

**Решение:**

 х

 z

**Y**

1. Вводим систему координат, точка А 1- начало координат, оси координат- прямые А1D1 ,А1В1,А1А.

2. Напишем уравнение плоскости АВ1D1 в отрезках и уравнение плоскости

В 1С 1 CD в отрезках:$ \frac{х}{а}$ **+**$ \frac{у}{b}$ **+**$\frac{Z}{c}$ **=** 1

$\frac{х}{1}$ **+**$ \frac{у}{1}$ **+**$\frac{Z}{1}$ **=** 1  **-** уравнение плоскости АВ 1D 1,$ т.к.$ плоскость В 1С 1 CD // XOZ , то

$\frac{y}{1} $= 1 - уравнение плоскости В 1С 1 CD

3.Уравнение плоскости АВ 1D и плоскости В 1С 1 CD x+y+z=1 и х=1,а координата вектора нормали (1;1;1) и ( 0;1;1)

4.Найдём косинус угла между векторами нормали: cos α =$\frac{\left|1\*0+1\*1+1\*0\right|}{\sqrt{1+1+1 }\*\sqrt{0+1+0}}$=$ \frac{1}{\sqrt{3}}$=$\frac{\sqrt{3}}{3}$

4.2Для нахождения угла между прямой и плоскостью с применением известных формул мы находим угол между этой прямой и вектором нормали. В результате по формуле приведения получаем cos(90-α)= sin α.



*Пример решения задачи*

**Задача**

 Дано: единичный куб A...D1

Найти: угол между прямой СС1 и плоскостью А В1D1

**Решение:**

 ***x***

 z

**Y**

1. Вводим систему координат, точка А1- начало координат, оси координат- прямыеА1D1, А1В1, А1А.

2. Напишем уравнение плоскости АВ1D1 в отрезках :

 $\frac{х}{а}$ **+**$ \frac{у}{b}$ **+**$\frac{Z}{c}$ **= 1** $\frac{х}{1}$ **+**$ \frac{у}{1}$ **+**$\frac{Z}{1}$ **= 1**

3.Уравнение плоскости х **+ у+ Z -1=0**

 А=1,В=1,С =1 – координаты вектора нормали (n)

4. Найдём координаты вектора СС1 , С(1;1;1) , С1 (1;1;0) СС1 ( 0; 0; -1)

5.Найдём косинус угла между векторами n и СС1  угол β

cos β =$\frac{\left|n\*СС\_{1}\right|}{\left|n\right|\*\left|CC\_{1}\right|}$ =$\frac{\left|1\*0+1\*0+1\*\left(-1\right)\right|}{\sqrt{1^{2} +1^{2} + 1^{2}}\*\sqrt{0^{2} + 0^{2} +\left(-1^{2}\right) }}$ =$\frac{1}{\sqrt{3}}$=$\frac{ \sqrt{3}}{3}$

 cos β= sinα =$\frac{\sqrt{3}}{3}$ ; α = arcsin$\frac{\sqrt{3}}{3}$

***2.1.2 Пример решения задачи***

**Задача**

***X***



Дано: единичный куб A...D1

**Y**

Найти: угол между A 1D1 и АС.

**Решение:**

1. Вводим систему координат, точка А1 - начало координат,

 оси координат - прямые A 1D 1, A 1B 1 ,А 1А.

2. Найдем координаты векторов А1 D 1  и АС.

**A1 (0; 0; 0) A(0;0;1) D1 (1;0;0 ) С(1;1;1) А1 D1** $\left\{1;0;\left.0\right\}\right.$ **АС** $1;1;\left.0\right\}$

3. Найдем косинус угла между **A 1 D 1 и АС**

 Сos α = $\frac{|х\_{1}\*х\_{2 }+ у\_{1 }\*у\_{2 + Z\_{1 }\*Z\_{2 }}|}{\sqrt{х\_{1 }^{2}+ у\_{1}^{2} + Z\_{1 }^{2}}\*\sqrt{х\_{2 }^{2}+ у\_{2}^{2} + Z\_{2 }^{2}}}$

 Сos α = $\frac{|1\*1+ 0\*1+ 0\*0|}{\sqrt{1\_{ }^{2}+ 0\_{}^{2} + 0\_{ }^{2}}\*\sqrt{1\_{ }^{2}+ 1\_{}^{2} + 0\_{ }^{2}}} $=$\frac{1}{\sqrt{2}}$ α=450

***2.2 Нахождение угла между плоскостями, прямой и плоскостью.***

 ***2.2.1 Пример решения задачи***

**Задача**

Дано: единичный куб А…Д1

Найти: угол между прямой СС1

 и плоскостью АВ1D1

 х



 **У**

z

**Решение:**

1. Вводим систему координат, точка А1 начало координат, оси координат-

прямые A 1D 1, A1 В1, A1 А.

 2.Напишем уравнение плоскости AB 1D 1 в отрезках:

$\frac{х}{а}$ **+**$ \frac{у}{b}$ **+**$\frac{Z}{c}$ **= 1** $\frac{х}{1}$ **+**$ \frac{у}{1}$ **+**$\frac{Z}{1}$ **= 1**

3*.*Уравнение плоскости

x+y+z-1=0; А=1; В=1; С=1*- координаты вектора нормали n*

4*.*Найдём координаты вектора CC1

 С(1; 1; 1;) С1(1; 1; 0) С С1(0; 0;-1)

5. Найдём косинус угла между векторами n и СС1, угол β

Сos β ***=*** $\frac{\left|n\* СС1\right| }{| a|\* |b|}$**=**$\frac{\left|1\*0+1\*0+1\*(-1)\right|}{\sqrt{1^{2} +1^{2} +1^{2} }\*\sqrt{0^{2} +0 +( -1)^{2} }}$**=**$\frac{1}{\sqrt{3}}$**=**$\frac{\sqrt{3}}{3}$

**Cos β = Sin α**

**Ответ: α = arcsin** $\frac{\sqrt{3}}{3}$