**ГЛАВА II ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ.**

(из методического пособия «Логарифмы. Преобразования, уравнения, неравенства»).

**Методы решения уравнений.**

***1. Простейшее логарифмическое уравнение.***

Простейшее логарифмиче­ское уравнение — это уравнение вида ,

где *а >* 0, . Это уравнение имеет единственное решение

*Пример 1*. Решить уравнение

*Пример 2*. Решить уравнение

*Пример 3*. Решить уравнение

*Решение*:

Допустимые значения *х* определяются условиями:

Решаем уравнение

,

С учетом системы ОДЗ получаем один корень:

*Ответ: 1*

Задания для самостоятельного решения:

1. = - 1;

2. = 4;

3. 2

4.

5. -

6.

7. ;

8. = 2;

9.

10.

**2. *Логарифмические уравнения, сводящиеся к простейшим.***

При решении уравнений вида

где *а >* 0*,* используется метод потенцирования.

*Пример 1*. Решить уравнение

*Решение*: Данное уравнение равносильно уравнению ;

получаем х=1, х=4.

*Ответ: 1;4.*

*Пример 2*. Решить уравнение

*Решение*:

*Ответ: 4.*

*Пример 3*. Решить уравнение

*Решение*: Запишем равносильную систему:

Уравнение системы сводится к квадратному уравнению

корнями которого являются числа 1 и 4, из которых только 4

удовлетворяет неравенству системы.

*Ответ: 4.*

Иногда при решении уравнений используют свойства логарифмов.

*Пример 4*. Решить уравнение

*Решение*: Найдем область определения уравнения:

=. Так как равны логарифмы, равны их основания, то равны и выражения, стоящие под знаком логарифма.

Получаем = ; Оба корня удовлетворяют условию

*Ответ:* 5; .

Задания для самостоятельного решения:

1.

2.

3.

4. ;

5.

6.

7. =2;

8.

9.

10.

***3. Метод замены переменной.***

Если уравнение можно привести к виду , то, полагая

*t* = , получим уравнение .

*Пример 1*. Решить уравнение

*Решение:* Преобразуем уравнение, считая х > 0:

уравнение примет вид

*,* корни которого t = 1, t = -7. Значит данное уравнение равносильно совокупности уравнений

*= -7,* следовательно х = 2, х = . Оба корня удовлетворяют условию

*Ответ:* 2; .

*Пример2*. Решить уравнение log2(2x) - log2(4x) = 3

*Решение:* Преобразуем уравнение, считая х > 0:

(log22 + log2x) - (log24 + log2x) = 3(21og28 - 21og2x)2.

Пусть t *=* log2x. Тогда получим уравнение (1+t)(2+t)=3(6-2t)2, корнями которого являются. Таким образом, приходим к совокупности

и в результате получаем: х =4; .

*Ответ:* 4; .

Задания для самостоятельного решения:

1. 2 +1=0;

2. + – 7 =0;

3.

4. = 2

5. + 2 +

6. + 2

7. lglgх + lg(lg- 2) =0;

8. 2lglgх = lg(7 – 2lgх) – lg5;

9.

10. 3

***4. Метод логарифмирования.***

Этот метод основан на следующем утверждении: если функции *f(x)* и h(х) принимают положительные значения на ОДЗ и а>0, а 1, то уравнение f(х) = *h(x)* равносильно уравнению на ОДЗ.

*Пример1*. Решить уравнение *=0,01.*

*Решение*: Область определения уравнения х>0. В этой области выражения, содержащиеся в обеих частях уравнения, принимают только положительные значения, а тогда логарифмы этих выражений существуют. Взяв логарифмы от обеих частей уравнения по основанию 10, получим уравнение

= lg 0,01 или (1-lg х) lg х= -2.

Пусть u = lg х, получим уравнение *и*2 - *и* -2 = 0, откуда

. Таким образом, задача свелась к решению следующей совокупности уравнений:

.

Получаем .

*Проверка*: Оба найденных значения х принадлежат области определения уравнения, таким образом,

*Ответ: 0,1; 100.*

*Пример2*. Решить уравнение

*Решение*: Прологарифмируем обе части уравнения по основанию 2 ( можно 5 или 10). Получим ,

= ,

,

группируем

*Ответ: 1; .*

Задания для самостоятельного решения:

1.

2.

3. = 10;

4.

5.

6.

7.

8. = 500;

9. ;

10. =1.

***5. Метод разложения на множители.***

*Пример*1. Решить уравнение

*Решение*: ОДЗ уравнения определяется системой неравенств

Пусть.

Получим уравнение , которое решим как квадратное относительно а и преобразуется к виду .

Таким образом, данное уравнение равносильно совокупности

В результате получаем *х* = 6, х = -1, х = -4 . В область определения уравнения входит только х = 6.

*Ответ: 6.*

Задания для самостоятельного решения:

1. 3х+ 6х;

2.

3. + 1 = ;

4.

5.

6. х + 1 = 4х + 2

7. 3 +

8. 3

9. 3 - = 5;

10. – х

***6. Использование монотонности логарифмической функции.***

*Пример1.* Решить уравнение

*Решение*: Область определения уравнения х, кроме того х Запишем уравнение в виде

Заметим, что функция, стоящая в правой части уравнения – возрастает, а функция, стоящая в левой части уравнения – убывает. Следовательно, данное уравнение не может иметь более одного корня, который находим подбором, х = 4.

*Ответ: 4.*

*Пример2.* Решить уравнение

*Решение*: Запишем уравнение в виде

Так как , то при всех х дробь,

С другой стороны, разность 2 - (π– 2x)2 ≤ 2. Рассматривая только те значения х, при которых 0 < 2 - (π - 2х)2 ≤ 2, используя монотонность функции log*2t,* приходим к неравенствам

из которых следует, что равенство левой и правой частей уравнения выполняется только в том случае, когда

Так как число удовлетворяет первому уравнению системы, то оно является решением данного уравнения.

*Ответ:*  .

Задания для самостоятельного решения:

1. lgх + = 0;

2. = 2;

3. = х – 3;

4.

5.

6. 1 – lnх = ;

7. =

8. 2=