МОСКОВСКИЙ ИНСТИТУТ ОТКРЫТОГО ОБРАЗОВАНИЯ
КАФЕДРА ФИЛОСОФИИ ОБРАЗОВАНИЯ МИОО

Курс МА-9 «Компетенции учителя математики в профессиональном стандарте»

Тема методической работы:
«Решение системы линейных уравнений методом Гаусса»

Обучающаяся гр. МА-9
Петрова Л.А.

Проверил: Бычков С.Н.
Профессор кафедры
философия образования МИОО,
доктор философских наук

Москва 2014 г.

Решение систем линейных алгебраических уравнений

Постановка задачи

Требуется найти решение системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (3.1)$$

или в матричной форме:

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}, \quad (3.2)$$

где

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ .. \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$$

По правилу Крамера система n линейных уравнений имеет единственное решение, если определитель системы отличен от нуля ($\det \boldsymbol{A} \neq 0$) и значение каждого из неизвестных определяется следующим образом:

$$x_j = \frac{\det A_j}{\det A}, \quad j = 1, \ldots, n, \quad (3.3)$$

где $\det \boldsymbol{A}_j$ – определитель матрицы, получаемой заменой j-го столбца матрицы $\boldsymbol{A}$ столбцом правых частей $\boldsymbol{b}$.

Непосредственный расчет определителей для больших n является очень трудоемким по сравнению с вычислительными методами.

Известные в настоящее время многочисленные приближенные методы решения систем линейных алгебраических уравнений распадаются на две большие группы: прямые методы и методы итераций.

Прямые методы всегда гарантируют получение решения, если оно существуют, однако, для больших n требуется большое количество операций, и возникает опасность накопления погрешностей.

Этого недостатка лишены итерационные методы, но зато они не всегда сходятся и могут применяться лишь для систем определенных классов.

Среди прямых методов наиболее распространенным является метод исключения Гаусса и его модификации.

Эти методы будут рассмотрены в следующих разделах.

Метод исключения Гаусса. Схема единственного деления

Основная идея метода исключений Гаусса состоит в том, что система уравнений (3.1) приводится к эквивалентной ей системе с верхней треугольной матрицей (*прямой ход исключений*), а затем неизвестные вычисляются последовательной подстановкой (*обратный ход исключений*).

Рассмотрим сначала простейший метод исключения Гаусса, называемый *схемой единственного деления.*

Прямой ход состоит из $n - 1$ шагов. На первом шаге исключается переменная x_1 из всех уравнений, кроме первого. Для этого нужно из второго, третьего, …, n-го уравнений вычесть первое, умноженное на величину

$$m_i^1 = \frac{a_{i1}}{a_{11}}, \ i = 2, 3, \ldots, n. \quad (3.4)$$

При этом коэффициенты при x_1 обратятся в нуль во всех уравнениях, кроме первого.
Введем обозначения:

$$a_{ij}^1 = a_{ij} - m_i^1 a_{1j}, \quad b_i^1 = b_i - m_i^1 b_1. \quad (3.5)$$

Легко убедиться, что для всех уравнений, начиная со второго, $a^1_{i1} = 0$, $i = 2, 3, \ldots, n$.
Преобразованная система запишется в виде:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a^1_{22}x_2 + a^1_{23}x_3 + \ldots + a^1_{2n}x_n = b^1_2 \\ \qquad a^1_{32}x_2 + a^1_{33}x_3 + \ldots + a^1_{3n}x_n = b^1_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad a^1_{n2}x_2 + a^1_{n3}x_3 + \ldots + a^1_{nn}x_n = b^1_n \end{cases} \tag{3.6}$$

Все уравнения (3.6), кроме первого, образуют систему $(n - 1)$-го порядка. Применяя к ней ту же процедуру, мы можем исключить из третьего, четвертого, …, n-го уравнений переменную x_2. Точно так же исключаем переменную x_3 из последних $n - 3$ уравнений.

На некотором k-ом шаге в предположении, что *главный элемент k-ого шага* $a^{k-1}_{kk} \neq 0$, переменная x_k исключается с помощью формул:

$$m^k_i = \frac{a^{k-1}_{ik}}{a^{k-1}_{kk}},$$

$$a^k_{ij} = a^{k-1}_{ij} - m^k_i a^{k-1}_{kj},$$

$$b^k_i = b^{k-1}_i - m^k_i b^{k-1}_k, \; i \; + 1, k + 2, \ldots, n. \tag{3.7}$$

Индекс k принимает значения $1, 2, \ldots, n - 1$.

При $k = n - 1$ получим треугольную систему:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a^1_{22}x_2 + a^1_{23}x_3 + \ldots + a^1_{2n}x_n = b^1_2 \\ \qquad\qquad a^2_{33}x_3 + \ldots + a^2_{3n}x_n = b^2_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad a^{n-1}_{nn}x_n = b^{n-1}_n \end{cases} \tag{3.8}$$

с треугольной матрицей $\boldsymbol{A}_n$.

Приведение системы (3.1) к треугольному виду (3.8) составляет прямой ход метода Гаусса.

При использовании метода Гаусса нет необходимости в предварительном обосновании существования и единственности решения (т. е. доказательства, что $\det \boldsymbol{A} \neq 0$). Если на k-ом шаге все элементы a^{k-1}_{ik} $(i = k, k + 1, \ldots, n)$ окажутся равными нулю, то система (3.1) не имеет единственного решения.

Обратный ход состоит в вычислении переменных. Из последнего уравнения (3.8) определяем x_n. Подставляя его в предпоследнее уравнение, находим x_{n-1}, и т. д. Общие формулы имеют вид:

$$x_n = \frac{b^{n-1}_n}{a^{n-1}_{nn}},$$

$$x_k = \frac{1}{a^{k-1}_{kk}}(b^{k-1}_k - a^{k-1}_{k,k+1}x_{k+1} - a^{k-1}_{k,k+2}x_{k+2} - \ldots - a^{k-1}_{kn}x_n), \; k = n - 1, n - 2, \ldots, 1 \tag{3.9}$$

Трудоемкость метода. Для реализации метода исключения Гаусса требуется примерно $2/3n^3$ операций для прямого хода и n^2 операций для обратного хода. Таким образом, общее количество операций составляет примерно $2/3n^3 + n^2$.

Пример 3.1.

Применим метод исключения Гаусса по схеме единственного деления для решения системы уравнений:

$$\begin{cases} 2.0x_1 + 1.0x_2 - 0.1x_3 + 1.0x_4 = 2.7 \\ 0.4x_1 + 0.5x_2 + 4.0x_3 - 8.5x_4 = 21.9 \\ 0.3x_1 - 1.0x_2 + 1.0x_3 + 5.2x_4 = -3.9 \\ 1.0x_1 + 0.2x_2 + 2.5x_3 - 1.0x_4 = 9.9 \end{cases} \tag{3.10}$$

Будем делать округление чисел до четырех знаков после десятичной точки.

$\det \boldsymbol{A} = 2.0 \cdot 0.30 \cdot 16.425 \cdot 1.12 = 11.0376.$

Если же обратиться к примеру 3.2, то, учитывая, что была одна перестановка строк, т.е. $s = 1$, получим:

$\det \boldsymbol{A} = (-1) \cdot 2.0 \cdot (-1.15) \cdot 4.28478 \cdot 1.11998 = 11.0375.$

3.5. Вычисление обратной матрицы методом исключения Гаусса

Обратной матрицей к матрице $\boldsymbol{A}$ называется матрица $\boldsymbol{A}^{-1}$, для которой выполнено соотношение:

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{E}, \tag{3.18}$$

где $\boldsymbol{E}$ – единичная матрица:

$$\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.19}$$

Квадратная матрица $\boldsymbol{A}$ называется *невырожденной,* если $\det \boldsymbol{A} \neq 0$. Всякая невырожденная матрица имеет обратную матрицу.

Вычисление обратной матрицы можно свести к рассмотренной выше задаче решения системы уравнений.

Пусть $\boldsymbol{A}$ – квадратная невырожденная матрица порядка n:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

и $\boldsymbol{A}^{-1}$ – ее обратная матрица:

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \dots & x_{2n} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & \dots & x_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & x_{n3} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

Используя соотношения (3.18), (3. 19) и правило умножения матриц, получим систему из n^2 уравнений с n^2 переменными x_{ij}, $i, j = 1, 2, \dots, n$. Чтобы получить первый столбец матрицы $\boldsymbol{E}$, нужно почленно умножить каждую строку матрицы $\boldsymbol{A}$ на первый столбец матрицы $\boldsymbol{A}^{-1}$ и приравнять полученное произведение соответствующему элементу первого столбца матрицы $\boldsymbol{E}$. В результате получим систему уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} + a_{13}x_{31} + \dots + a_{1n}x_{n1} = 1 \\ a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} + a_{23}x_{31} + \dots + a_{2n}x_{n1} = 0 \\ a_{31}x_{11} + a_{32}x_{21} + a_{33}x_{31} + \dots + a_{3n}x_{n1} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ a_{n1}x_{11} + a_{n2}x_{21} + a_{n3}x_{31} + \dots + a_{nn}x_{n1} = 0 \end{cases} \tag{3.20}$$

Аналогично, чтобы получить второй столбец матрицы $\boldsymbol{E}$, нужно почленно умножить каждую строку матрицы $\boldsymbol{A}$ на второй столбец матрицы $\boldsymbol{A}^{-1}$ и приравнять полученное произведение соответствующему элементу второго столбца матрицы $\boldsymbol{E}$. В результате получим систему уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} + a_{13}x_{32} + \dots + a_{1n}x_{n2} = 0 \\ a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22} + a_{23}x_{32} + \dots + a_{2n}x_{n2} = 1 \\ a_{31}x_{12} + a_{32}x_{22} + a_{33}x_{32} + \dots + a_{3n}x_{n2} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ a_{n1}x_{12} + a_{n2}x_{22} + a_{n3}x_{32} + \dots + a_{nn}x_{n2} = 0 \end{cases} \tag{3.21}$$

и т. д.

Всего таким образом получим n систем по n уравнений в каждой системе, причем все эти системы имеют одну и ту же матрицу $\boldsymbol{A}$ и отличаются только свободными членами. Приведение матрицы $\boldsymbol{A}$ к треугольной по формулам (3.7) делается при этом только один раз. Затем по последней из формул (3.7) преобразуются все правые части, и для каждой правой части делается обратный ход.

Пример 3.4.

Вычислим обратную матрицу A^{-1} для матрицы A =

$$\begin{pmatrix} 1.8 & -3.8 & 0.7 & -3.7 \\ 0.7 & 2.1 & -2.6 & -2.8 \\ 7.3 & 8.1 & 1.7 & -4.9 \\ 1.9 & -4.3 & -4.3 & -4.7 \end{pmatrix}$$

По формулам (3.7) за три шага прямого хода преобразуем матрицу A в треугольную матрицу

$$\begin{pmatrix} 1.8 & -3.8 & 0.7 & -3.7 \\ 0 & 3.57778 & -2.87222 & -1.36111 \\ 0 & 0 & 17.73577 & 19.04992 \\ 0 & 0 & 0 & 5.40155 \end{pmatrix}$$

Далее, применим процедуру обратного хода четыре раза для столбцов свободных членов, преобразованных по формулам (3.7) из столбцов единичной матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Каждый раз будем получать столбцы матрицы A^{-1}. Опустив промежуточные вычисления, приведем окончательный вид матрицы A^{-1}:

$$\begin{pmatrix} -0.21121 & -0.46003 & 0.16248 & 0.26956 \\ -0.03533 & 0.16873 & 0.01573 & -0.08920 \\ 0.23030 & 0.04607 & -0.00944 & -0.19885 \\ -0.29316 & -0.38837 & 0.06128 & 0.18513 \end{pmatrix}.$$

В задачах используется параметр n – номер студента в списке группы, $n = 1, \ldots 25$.

Лабораторная работа №1.

Решение систем линейных уравнений.

Найти точное решение системы уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 - x_3 = -12 + n \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 = 29 + n \\ -3x_1 - 4x_2 + x_3 = 5 + n \end{cases}$$

Решение задач должно быть оформлено аккуратно и содержать все промежуточные расчеты.