***Эффективные способы устных вычислений корней квадратных уравнений.***

В старших классах появляется необходимость быстрого определения корней при решении систем уравнений и неравенств второй степени, задач на составление дробно- рационального уравнения, задач с параметрами.

Так как **теорема Виета** имеет ограниченную область применения (только для приведённых квадратных уравнений), то появляется необходимость отыскать более удобные устные способы решения.

Используем для этого **теорему о корне многочлена** (алгебра многочленов) и **теорему Виета** для квадратных уравнений

***Частные случаи.***

Рассмотрим уравнение общего вида: **ax2 + bx + c = 0.**

Для устного определения корней используем две вспомогательные теоремы.

***Теорема 1:***

Если в квадратном уравнении сумма коэффициентов a + b + c = 0, то x1=1, x2 =.

*Доказательство:*

1. В алгебре многочленов число x0 является корнем многочлена М(х), если М(х0)=0.
2. Проверим, является ли х1=1 корнем многочлена М(х)=ax2+bx+c:

a\*12 + b\*1 + c = a + b + c = 0 (по условию теоремы) => х1=1 – корень уравнения.

1. По *теореме Виета* для КВУР общего вида:

х1\*х2 = ;

так как х1=1, то

1\* х2 = => х2 = => x1 = 1 и x2 =  - корни уравнения.

***Теорема доказана***.

***Теорема 2:***

Если в квадратном уравнении сумма коэффициентов a – b + c = 0, то х1= - 1; х2 =.

*Доказательство:*

1. В алгебре многочленов число x0 является корнем многочлена М(х), если М(х0)=0.
2. Проверим, является ли х1= - 1 корнем многочлена М(х)=ax2+bx+c:

a\*(-1)2+b\*(-1)+c = a – b + c = 0 (по условию теоремы) => х1= -1 – корень уравнения.

1. По *теореме Виета* для уравнения общего вида:

х1\*х2 = ;

так как х1= -1, то

(-1)\* х2==> х2==> x1= -1 и x2 =  - корни уравнения

***Теорема доказана.***

***Примеры:***



1. 1х2 + 4х - 5 = 0

1+4+(-5)=0 => Теорема 1

х1=1; х2= = - 5

Ответ: -5; 1.

1. 5х2 + 12х + 7 = 0

5 - 12+7=0 => Теорема 2

х1= -1 ; х2 = = - 1,4

Ответ: х1= -1; х2= - 1,4.

1. 3х2 - 5х + 2 = 0

3+(-5)+2=0 => Теорема 1

х1=1; х2=

Ответ: х1=1; х2=.

1. 8х2 + 13х + 5 = 0

8 - 13+5=0 => Теорема 2

х1= -1; х2 =

Ответ: -1; 

***Рассмотрим применение этих теорем на примере решения системы неравенств:***

3х2 + х – 2 ≤ 0; (1)

х2 + 4х – 12 ≤ 0. (2)

1. 3х2 + х - 2 ≤ 0 (решение между корнями)

Корни соответствующего уравнения : 3х2 + х – 2 = 0; 3-1-2=0 => по Т.2: х1= -1;

х2=

Решение неравенства (1): - 1 ≤ х ≤ .

1. х2 + 4х – 12 ≤ 0 (решение между корнями)

Корни соответствующего квадратного уравнения

х2+4х-12=0; вычисляем по *теореме Виета*: х1 = - 6; х2 = 2.

Решение неравенства(2): - 6 ≤ х ≤ 2.

(3) Решение системы неравенств:

-1 ≤х ≤ ;



- 6 ≤ х ≤ 2.

Ответ: х.

Примечание: нахождение корней квадратного уравнения осуществляется устно.

***«Переброска»***

В случае качественного владения *Теоремами 1, 2* и *теоремой Виета* можно предложить сильным учащимся использование метода **«переброски»**.

Возьмем квадратное уравнение общего вида: **ах2 + bx + c =0, (1)**

По *теореме Виета* корни уравнения (1) х1 и х2 удовлетворяют условиям:

х1 + х2 = ,

х1\* х2 =.

Выполним **«переброску»** старшего коэффициента к свободному члену и рассмотрим вспомогательное уравнение:

**х2 + bx + a • c=0, (2)**

По теореме Виета для **(2)** уравнения его корни х1’ и x2’ таковы, что

х1’+ x2’= - b,

х1’• x2’ = a c;

Если в качестве корней уравнения **(1)** взять числа х1 =  и х2 = , то проверим для них формулы Виета:

х1 + х2 = +==,

х1 • х2=•== = .

Значит, числа вида и  являются корнями уравнения **(1)**.

***Алгоритм:***

1. ***Записать уравнение:***

2х2 - 7х + 6=0

1. **«*Перебрасываем» старший коэффициент к свободному члену*:**

х2 - 7х + 6 •2 = 0,

х2- 7х + 12 = 0.

1. ***Найдем корни полученного вспомогательного уравнения по теореме Виета или с помощью частных случаев и разделим на число, которое «перебрасывали» (старший коэффициент). Это и будут корни данного уравнения:***

х1==2;

х2== 1,5.

1. ***Записать ответ*.**

Ответ: 1,5; 2.

***Примеры:***

1. 2х2+13х-7=0

х2+13х – 14 = 0 ( теорема 1)

х1== 0,5

х2== - 7

Ответ: - 7; 0,5

1. 2х2+5х-18=0

х2 + 5х – 36 = 0 ( по теореме Виета)

х1==-4,5

х2==2

Ответ: - 4,5; 2.

1. 4х2-27х-7=0

х2- 27х – 28 = 0 (теорема 2)

х1== - 0,25

х2 ==7

Ответ: - 0,25; 7.

1. 3х2-17х-6=0

х2-17х-18=0 (теорема 2)

х1=

х2==6

Ответ: ; 6.