**Тригонометрические уравнения. Основные методы решений**

***Методы решения тригонометрических уравнений.***

Решение тригонометрического уравнения состоит из двух этапов:

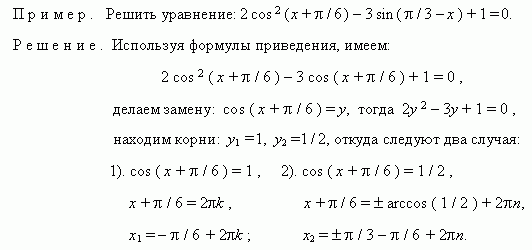
*преобразование уравнения* для получения его простейшего вида

и  *решение* полученного простейшего тригонометрического уравнения.

**Существует семь основных методов решения  тригонометрических уравнений.**

*1.* ***Алгебраический метод.***Этот метод нам хорошо известен из алгебры

( метод замены переменной и подстановки ).



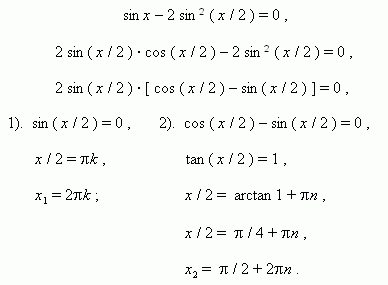
*2.* ***Разложение на множители.***Этот метод рассмотрим на примерах.

    П р и м е р  1.  Решить уравнение:  sin *x* + cos *x* = 1 .

    Р е ш е н и е .   Перенесём все члены уравнения влево:

                                                               sin *x* + cos *x* – 1 = 0 ,

 преобразуем и разложим на множители выражение в    левой части уравнения:

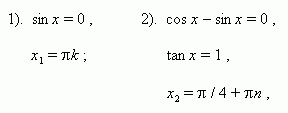


    П р и м е р   2.   Решить уравнение:  cos 2 *x* + sin *x* · cos *x* = 1.

    Р е ш е н и е .     cos 2 *x* + sin *x* · cos *x*– sin 2 *x* – cos 2 *x* = 0 ,

                                            sin *x* · cos *x*– sin 2 *x*= 0 ,

                                            sin *x* · ( cos *x*– sin *x*) = 0 ,



    П р и м е р   3.   Решить уравнение:  cos 2*x*– cos 8*x* + cos 6*x* = 1.

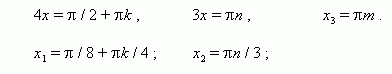
     Р е ш е н и е .    cos 2*x*+ cos 6*x* = 1 + cos 8*x*,

                               2 cos 4*x* cos 2*x* = 2 cos ² 4*x* ,

                               cos 4*x* · ( cos 2*x* –  cos 4*x* ) = 0 ,

                               cos 4*x* · 2 sin 3*x* · sin *x* = 0 ,

                              1).  cos 4*x* = 0 ,               2).  sin 3*x* = 0 ,          3). sin *x* = 0 ,



|  |  |
| --- | --- |
| *3.* | ***Приведение к однородному уравнению.*** Уравнение называется *однородным относительно  sin  и  cos*, *если* *все его члены одной и той же степени относительно sin  и cos  одного и того же угла*. Чтобы решить однородное уравнение, надо:    *а*)  перенести все его члены в левую часть;  *б*)  вынести все общие множители за скобки;  *в*)  приравнять все множители и скобки нулю;  *г*)  скобки, приравненные нулю, дают однородное уравнение меньшей степени, которое следует разделить на          cos ( или sin ) в старшей степени;  *д*)  решить полученное алгебраическое уравнение относительно tan .        П р и м е р .   Решить уравнение:  3sin 2 *x* + 4 sin *x* · cos *x* + 5 cos 2*x* = 2.        Р е ш е н и е .  3sin 2 *x* + 4 sin *x* · cos *x* + 5 cos 2 *x* = 2sin 2 *x* + 2cos 2 *x* ,                                 sin 2 *x* + 4 sin *x* · cos *x* + 3 cos 2 *x* = 0 ,                                 tan 2 *x* + 4 tan *x* + 3 = 0 ,  отсюда  *y* 2 + 4*y* +3 = 0 ,                                 корни этого уравнения:  *y*1 = 1,  *y*2 = 3,  отсюда                               1)   tan *x* = –1,                  2)   tan *x* = –3,  http://www.bymath.net/studyguide/tri/sec/tri16g.gif |

*4.* ***Переход к половинному углу.***Рассмотрим этот метод на примере:

    П р и м е р .  Решить уравнение:  3 sin *x* – 5 cos *x* = 7.

    Р е ш е н и е .  6 sin ( *x*/ 2 ) · cos ( *x*/ 2 ) – 5 cos ² ( *x*/ 2 ) + 5 sin ² ( *x*/ 2 ) =

                                                                         = 7 sin ² ( *x*/ 2 ) + 7 cos ² ( *x*/ 2 ) ,

                             2 sin ² ( *x*/ 2 ) – 6 sin ( *x*/ 2 ) · cos ( *x*/ 2 ) + 12 cos ² ( *x*/ 2 ) = 0 ,

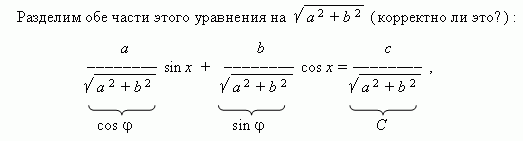
                             tan ² ( *x*/ 2 ) – 3 tan ( *x*/ 2 ) + 6 = 0 ,

                                     .   .   .   .   .   .   .   .   .   .

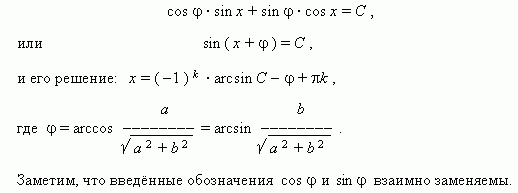
*5.* ***Введение вспомогательного угла.***Рассмотрим уравнение вида:

*a* sin *x* + *b* cos *x* = *c* ,

    где  *a*, *b*, *c* – коэффициенты;  *x* – неизвестное.



Теперь коэффициенты уравнения обладают свойствами синуса и косинуса, а именно: модуль ( абсолютное значение ) каждого из них не больше 1, а сумма их квадратов равна 1.  Тогда можно обозначить их соответственно как cos http://www.bymath.net/studyguide/fi.gif и sin http://www.bymath.net/studyguide/fi.gif ( здесь http://www.bymath.net/studyguide/fi.gif- так называемый *вспомогательный угол*), и наше уравнение принимает вид:





*6.* ***Преобразование произведения в сумму****.*Здесь используются соответствующие формулы.

    П р и м е р .  Решить уравнение:  2 sin *x*· sin 3*x* = cos 4*x*.

    Р е ш е н и е .  Преобразуем левую часть в сумму:

                                        cos 4*x* – cos 8*x* = cos 4*x* ,

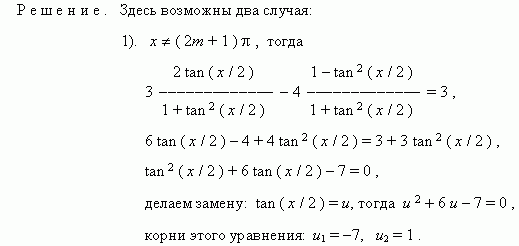
                                                 cos 8*x* = 0 ,

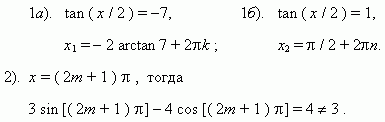
                                                 8*x* = / 2 + *k*,

*x* = / 16 + *k*/ 8 .

*7.* ***Универсальная подстановка.***Рассмотрим этот метод на примере.

      П р и м е р .   Решить уравнение:  3 sin *x* – 4 cos *x* = 3 .





                             Таким образом, решение даёт только первый случай.

