***МБОУ районная вечерняя (сменная) общеобразовательная школа***

***Абадзехский УКП***

***Методы решения тригонометрических уравнений.***

***Зав. УКП*** \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_***З. Г. Зейтунян***

***2011-2012***

**Методы решения тригонометрических уравнений**

1. Сведение к квадратным уравнениям;
2. Сведение к однородным уравнениям;
3. Группировка и разложение на множители;
4. Преобразование сумм в произведения и произведений в суммы;
5. Метод вспомогательного угла;
6. Метод мажорант;
7. Решение уравнений методом замены неизвестного;
8. Уравнения, решаемые понижением их порядка;

**Сведение к квадратным уравнениям.**

**Решение**

**4 cosx+sin2x-4=0**

**1-cos2x+4cosx-4=0**

**cos2x-4cosx+3=0**

**Получившееся уравнение решаем заменой переменной.**

**Пусть cosx=t, |t|≤1, тогда t2-4t+3=0,**

**по т. Виета t=3 или t=1, решим простейшие тригонометрические уравнения (уравнения замены).**

**cos x =3 или cos x =1**

**Так как |t|≤1, то x=2пn, n c Z.**

**уравнение cos x =3**

**решений не имеет.**

 **Ответ: 2пn, n c Z.**

**Решение:**

**1 – sinx= cosx – 2 sin x cosx**

**sin2x + cos 2x + 2 sin x cosx – sinx-cosx=0**

**(sinx + cosx)2 – (sinx+cosx)=0**

**(sinx+cosx) (sinx+cosx-1)=0**

**Произведение равно нулю тогда и только тогда, когда один из множителей равен нулю, а другой при этом не теряет смысла, т.е.**

**sinx+cosx=0 или sinx+cosx-1=0**

**Разделим обе части 2sinx/2 cosx/2+cos2x/2-sin2x/2 -**

**уравнения на cosx≠0, cos2x/2 +sin2x/2=0**

**получим tgx+1=0 2sinx/2 (cosx/2-sinx/2)=0**

**tgx= -1 sinx/2=0 или cosx/2-sinx/2=0**

**x=arctg (-1) +пn, n c Z x/2=пk, kcZ 1 – tgx/2=0, cosx/2≠0**

**x= - п/4 + пn, n c Z x=2пk tgx/2 =1**

**x/2= arctg (1)+пk, kcZ**

**x/2=п/4+ пk, kcZ**

**x=п/2+ 2пk, kcZ**

 **Ответ: 2пk; п/2+ 2пk, kcZ; - п/4 + пn, n c Z**

sin2x+ sinx – 2 = 0

**Решение:**

**sin x = -1/2 ± √1/4 +2 = -1/2 ± 3/2**

**откуда sin x = 1 или sin x =-2**

**x = п/2 +2пk, kcZ, уравнения sin x=-2 решений не**

 **имеет. т.к не удовлетворяет условию |sin x| ≤ 1**

**Ответ: п/2 + 2пk, kcZ,**

2 cos2x – 5 sin x +1 = 0

**Заменяя cos2x на 1- sin2x получаем**

**2 (1- sin2x) -5 sinx +1 = 0**

**2 sin2x + 5 sinx – 3 = 0**

**sinx = - 5 ± √25+25/4 = -5±7/4**

**откуда sinx = -3, sinx = ½**

**уравнение sinx = -3 решений не имеет, а уравнение**

**sinx = ½ имеет корни:**

**x = (-1)n arcsin 1/2 + пn = (-1)n п/6 + пn, ncZ**

**Ответ: (-1)n п/6 + пn, ncZ**

cos2x - 2cosx – 3 = 0

**cosx = 1±√1+3 = 1+2**

**cosx = 1, cosx = 3**

**уравнение cosx = 1 имеет корни x = п + 2 пn, ncZ**

**уравнение cosx = 3 корней не имеет**

**Ответ: п + 2 пn, ncZ**

2 sin2x – cosx – 1 = 0

**Используя формулу sin2x = 1– cos2x имеем**

**2(1- cos2x) - cosx – 1 = 0**

**2 cos2x+ cosx– 1 = 0, откуда**

**сosx = –1, сosx = ½**

**Ответ: x= 2пn, x=±п/3 +2пn,ncZ**

3 tg2x + 5 tgx – 2 = 0

**tgx = - 2 или tgx = 1/3**

**x = arctg2 +пn, x= arctg 1/3+ пn, ncZ**

**Ответ: arctg2 +пn, arctg 1/3+ пn, ncZ**

tgx - 2 ctgx+1 = 0

**т.к. ctgx = 1/ tgx, то**

**tgx – 2/ tgx +1 = 0**

**Заметим, что tgx≠0, ctgx≠0**

**tg2x+ tgx-2=0, откуда**

**tgx = -2 или tgx = 1**

**x = - arctg2 + пn, x=п/4+ пn, ncZ**

3 cos26x + 8 sin3xcos3x – 4 =0

**3 cos26x + 4sin6x – 4 (sin26x + cos26x) = 0**

**3-3 sin26x + 4sin6x– 4 sin26x – 4 +4sin26x = 0**

**3 sin26x - 4sin6x +1 = 0**

**Обозначим sin6x = y, получим уравнение**

**3y2- 4y +1 = 0**

**Y1=1, y2=1/3**

1. **sinx = 1, 6x = п/2+2пn, x = п/12 +пn/3,**
2. **sinx=1/3, 6x = (-1) n arcsin1/3 + пn; x = (-1) n/6 arcsin1/3 +пn, ncZ**

**Ответ: п/12 +пn/3, ncZ; (-1) n/6 arcsin1/3 +пn, ncZ.**

**Сведение к однородным уравнениям.**

4cos2 х – sin 2x =3.

**Решение:**

**Разделим обе части уравнения на cos2x≠0, получим 4 – tg2x=3, отсюда tg2x=4-3,**

 **tg2x=1,**

 **2x= arctg 1+пk, kcZ**

 **2x= п/4+ пk, kcZ**

 **x=п/8+п/2k, kcZ**

 **Ответ: п/8+п/2k, kcZ**

**Решение:**

**sin2x - √2 (cos2xcosп/4+sin2xsin п/4)=1**

**sin2x - √2 (cos2x √2/2 + √2/2 sin2x)=1**

**sin2x - cos2x - sin2x - sin2x – cos2x = 0**

**- cos2x - sin2x– cos2x=0**

**- cos2x + sin2x - 2 sinx cosx - cos2x=0**

**sin2x- 2 sinx cosx – 2 cos2x = 0| : cos2x≠0**

**tg2x – 2tgx – 2 = 0**

3sin2x + sin2x +2 cos2x = 4

**3sin2x + sin2x +2 cos2x = 4(sin2x+ cos2x)**

**sin2x - 2 sinx cosx + 2 cos2x = 0|: cos2x≠0**

**tg2x - 2 tgx + 2 = 0**

**(tgx-1)2+1 = 0**

**(tgx-1)2+1 ≠0, т.к. оба слагаемые положтельные.**

**Ответ: уравнение корней не имеет.**

**Группировка и разложение на множители**

2 cos2 *x*=√6 (cos *x* – sin *x*)

**Решение:**

**2 cos2x-2 sin2x -** √6 **cosx +** √6 **sinx =0| :2**

**(cosx- sinx) (cosx+ sinx)=** √6/2**(cosx- sinx)**

**(cosx- sinx) (cosx+ sinx -** √6/2)=0

**cosx- sinx = 0|: cosx≠0 или cosx+ sinx =** √6/2

1 – tg x=0 Возведем обе части

tg x = 1 уравнения в квадрат

x =**arctg 1+пk, kcZ 1+ 2sinx cosx =**√6/2

**x= п/4+ пk, kcZ 1+ sin2x=6/4**

 **sin2x = 6/4 – 1**

 **sin2x = 3/2 – 1**

 **sin2x = 1/2**

 **2x = (-1)n arcsin1/2+пn, ncZ**

 **2x = (-1)nп/6 + пn, ncZ**

 **X=(-1)nп/12+п/2n, ncZ**

**Ответ: п/4+ пk, kcZ**

2 sin3 *x* – cos 2*x* – sin *x* = 0

**Решение:**

**2 sin3 *x*- cos2x sin2x- sinx = 0**

**(2 sin3 *x* – 1 + sin2x+ sin2x- sinx=0**

**2 sin3 *x*+2 sin2x – 1 – sinx=0**

**2 sin2x (sinx+1) - (sinx+1)=0**

**2(sinx+1) (2sin2x-1)=0**

**sinx+1=0 или 2sin2x-1=0**

**sinx = -1 sin2x=1/2**

**x= -п/2 + 2пk, kcZ sinx=1/√2 или sinx=1/-√2**

 **x=(-1)narcsin1/√2+пn x=(-1)n+1arcsin1/√2+пk, kcZ**

 **x=(-1)nп/4+ пn, ncZ x=(-1)n+1п/4+ пk, kcZ**

**Ответ: -п/2 + 2пk, kcZ; (-1)nп/4+ пn, ncZ;**

**(-1)n+1п/4+ пk, kcZ**

sin3 *x* + cos3 *x* = ½ sin2 *x*

**Решение:**

**(sinx+cosx)(sin2x – sinx cosx +cos2x) = sinx cosx**

**Пусть sinx + cosx = t, а (sinx + cosx)2=t2, откуда**

**sinx cosx = (t2-1)/2, тогда данное уравнение примет вид t (1-t2) = t2 -1**

**(1- t) (t+1)2 =0**

**t= 1 или t = -1**

1. **sinx + cosx = 1**
2. **sinx + cosx = -1**

**Решаем первое уравнение**

**2 sinx/2 cosx/2 + cos2x/2 – sin2x/2 - sin2x/2 - cos2x/2 = 0, |: cos2x/2≠0**

**2tgx/2 - 2 tg2x/2 = 0**

**2tgx/2 (1 - tgx/2) = 0**

**tgx/2 = 0 или tgx/2 = 1**

**x/2 = пn, ncZ x/2 =п/4 + пn, ncZ**

**x = 2пn, ncZ x = п/2 + 2пn, ncZ**

 **Решаем второе уравнение sinx + cosx = -1**

**2 sinx/2 cosx/2 + cos2x/2 – sin2x/2 + sin2x/2 +cos2x/2 = 0, |: cos2x/2≠0**

**2tgx/2 + 2 tg2x/2 = 0**

**2tgx/2 (1 + tgx/2) = 0**

**tgx/2 = 0 или tgx/2 = - 1**

**x/2 = пn, ncZ x/2 = - п/4 + пn, ncZ**

**x = 2пn, ncZ x = - п/2 + 2пn, ncZ**

**Ответ: x=2пn, ncZ; x = п/2 + пn, ncZ**

**Преобразование сумм в произведения и произведений в суммы**

cos3 *x*+cos *x*=4cos2 *x*

**Решение:**

**2cos2x cosx = 4cos2x**

**2cos2x cosx-4cos2x=0**

**2cos2x (cosx-2)=0**

**cos2x=0 или cosx-2≠0 т.к. |cosx|≤1**

**2x = п/2+пn, ncZ**

**x=п/4+п/2n, ncZ**

**Ответ: п/4+п/2n, ncZ**

sin *x*+sin3 *x*=4cos3 *x*

**Решение:**

**2sin2x cosx – 4cos3x=0**

**2.2 sinx cos2x - 4cos3x=0**

**2.2 cos2x (sinx-cosx)=0**

**cos2x=0 или sinx-cosx=0 |: cosx**

**cosx=0 tgx-1=0**

**x=п/2+ пn, ncZ tgx=1**

 **x=arctg1+ пk, kcZ**

 **x= п/4 + пk, kcZ**

**Ответ: п/2+ пn, ncZ; п/4 + пk, kcZ**

cos3*x*cos4*x*+sin2*x*sin5*x*=½(cos2*x*+cos4*x*)

**Решение:**

**½(cos7x+cosx) - ½(cos7x-cos3x)= ½(cos2x+cos4x)**

**cos7x+cosx- cos7x+cos3x = cos2x+cos4x**

**cosx+cos3x= cos2x+cos4x**

**2 cos2x cosx=2 cos3xcosx**

**cosx (cos2x - cos3x) = 0**

**cosx=0 или sin5x/2=0 или sinx/2=0**

**x=п/2 +пn, ncZ 5x/2=пn, ncZ x/2= пn, ncZ**

 **x=2п/5 n, ncZ x= 2пn, ncZ**

**Ответ: п/2 +пn, ncZ ; x=2п/5 n, ncZ**

**Метод вспомогательного угла**

√3 sin *x* – cos *x* = 2

**Решение:**

√3/2 sinx-1/2cosx=1

cos п/6 sinx – sin п/6 cosx=1

sin (x- п/6)=1

x-п/6=п/2 + 2пk,kcZ

x= п/6+п/2 + 2пk,kcZ

x=4п/6+ 2пk,kcZ

x=2п/3+2пk,kcZ

Ответ: 2п/3+2пk,kcZ

5 sin *x* = 3 – 2 cos *x*

**Решение:**

**5 sinx + 2 cosx = 3**

**cos α = 5 /√29;**

**sin α = 2/ √29**

**C = 3/√29**

**5/√29 sinx +2√29 cosx =3/√29**

**cos α sinx + sin α cos x = 3/√29**

**sin (x+ α) = 3/√29**

**x+ α = (-1)n arcsin 3/√29 + пn, ncZ**

**x = - α + (-1)n arcsin 3/√29+ пn, ncZ**

**т.к. cos α = 5 /√29; sin α = 2/ √29 ≥ 0, то α с I четверти.**

 **α = arcsin 2/√29**

**Ответ: x= - arcsin 2/√29 + (-1)n arcsin 3/√29 + пn, ncZ**

√2 sin *x* + cos *x* = 7

 4

**Решение:**

**cos α = √2/√3;**  **sin α = 1/√3**

**С = 7/4√3 = √49/48**

**cos α sin x + sin α cos x = 7/4√3**

**sin (x+ α) = 7/4√3**

**т.к. 7/4√3= √49/48 ≥ 1, то данное уравнение решение не имеет.**

**Метод замены неизвестного**

**sin2x – sinx – cosx – 1 = 0**

**2x = (sinx + cosx)2-1**

**(sinx + cosx)2-(sinx + cosx)- 2 = 0, sinx + cosx=t**

**t2 – t – 2 = 0**

**t = -1, t=2**

**Задача свелась к решению следующих уравнений**

**sinx + cosx = -1 или sinx + cosx = 2**

**1/√2sinx+1|√2 cosx = -1/√2**

**sin(x+п/4) = √2/2**

**x+п/4 = (-1)k+1 п/4+пk, kcz**

**x= - п/4 + (-1)k+1 п/4+пk, kcz,**

**при k-четном x= - п/4- п/4 +2пn=-п/2 +2пn, ncZ**

**при k-не четном x = - п/4 + п/4 +п +2пn, ncZ**

**Второе уравнение sinx + cosx = 2 решение не имеет т.к. sinx = cosx = 1 одновременно не могут**

**Ответ: п+2пn, -п/2 +2пn, ncZ**

sin2x +3(sinx – cosx) = 1

**Пусть sinx – cosx = t, тогда (sinx – cosx)2 =t2, данное уравнение примет вид**

**1-t2+3t=1**

**t2-3t=0**

**t(t-3)=0**

**t=0 или t=3**

**sinx – cosx =0 или sinx – cosx = 3**

**tgx=1 , x= п/4 +пn,ncZ корней нет, т.к.**

 **|sinx|≤1,|cosx|≤1,**

 **sinx – cosx≤2≤3**

**Ответ: п/4 +пn,ncZ**

**Уравнения, решаемые понижением их порядка**

cos2x + cos2x = 5/4

**т.к. cos2x =1/2 (1- cos2x), то данное уравнение примет вид 6 cos2x +2 = 5**

**cos2x = ½**

**2x = ±п/3 +2пk**

**X = ± п/6 + пn, ncZ**

**Ответ: ± п/6 + пn, ncZ**

**Метод мажорант**

