**У р о к 1 (56).  
Понятие последовательности, словесный  
и аналитический способы ее задания**

**Цели:** ввести понятие последовательности, конечной и бесконечной; рассмотреть последовательности, заданные словесно и с помощью формулы *п*-го члена; формировать умение находить *п*-й член последовательности по заданной формуле.

**Ход урока**

**I. Организационный момент.**

**II. Объяснение нового материала.**

Учение о последовательностях и их частном случае – прогрессиях – является существенной, хотя и несколько изолированной, частью курса алгебры. Для создания представления о последовательностях следует начать с рассмотрения конкретных примеров:

П р и м е р 1.

2; 4; 6; 8; …

Сразу обращаем внимание учащихся, что числа записаны в определенном порядке. Словесно эту последовательность можно описать (задать) так: «последовательность четных положительных чисел». Просим назвать число, которое будет стоять в этой последовательности на пятом месте, на восьмом, на сотом. Замечаем, что если «место» числа в последовательности обозначить натуральным числом *п*, то вычислить это число можно, оно равно 2*п*.

П р и м е р 2.



Последовательность правильных дробей с числителем равным 1. Для любого натурального числа *п* можно указать соответствующую дробь, стоящую в этой последовательности на *п*-ом месте – она равна . Теперь легко вычислить, что на седьмом месте должна стоять дробь , на тридцатом – дробь , на тысячном – дробь .

Числа, образующие последовательности, называются ***членами последовательности*** и обозначаются буквами с индексами, указывающими порядковый номер члена, например: *а*1; *а*2; *а*3; *а*4; …; *ап*; … *ап* – общий или *п*-й член последовательности.

Сама последовательность обозначается (*ап*).

Таким образом, последовательность считается заданной, если указан закон, по которому каждому натуральному числу *п* ставится в соответствие член последовательности *ап*. Обращаем внимание учащихся, что мы использовали два способа задания последовательности: словесный и аналитический (с помощью формулы *п*-го числа).

П р и м е р 3.

Последовательность двузначных чисел: 10; 11; 12; 13; …; 97; 98; 99.

В о п р о с у ч а щ и м с я: чем отличается эта последовательность от двух предыдущих? Она содержит конечное число членов и называется конечной – в отличие от предыдущих последовательностей, которые содержат бесконечно много членов и называются бесконечными.

**III. Формирование умений и навыков.**

Все задания, выполняемые учащимися на этом уроке, можно условно разбить на три группы:

1. Выписать первые несколько членов последовательности по ее словесному описанию.

2. Выписать первые несколько членов и вычислить некоторый (любой) член последовательности по формуле *п*-го члена.

3. По заданным первым членам последовательности составить формулу *п*-го члена последовательности.

*Упражнения:*

№ 560, № 562.

При выполнении первых заданий внимание следует уделить правильной записи членов последовательности, чтобы не забывали указывать индексы.

№ 563, № 564 (а, в).

При решении этих упражнений следует еще раз обратить внимание учащихся, что индексы – это натуральные числа и порядковые номера членов последовательности. Возможно устное выполнение этого задания.

№ 565 (а, в, д).

Решение у доски, с объяснениями.

№ 566.

Самостоятельное решение с устной проверкой.

№ 671.

Это задание, «обратное» предыдущим, носит развивающий характер.

**IV. Итоги урока.**

В о п р о с ы у ч а щ и м с я:

– Как называются числа, образующие последовательность?

– Что значит «задать последовательность»?

– Какие способы задания последовательности вы знаете?

**Домашнее задание:** № 561, № 564 (б, г), № 565 (б, г, е), № 572 (а).

**У р о к 2 (57).  
Рекуррентный способ задания  
последовательности**

**Цели:** рассмотреть последовательности, заданные рекуррентными формулами; формировать умения задавать последовательности различными способами; закрепить навыки использования индексных обозначений и нахождения *п*-го члена последовательности по его формуле.

**Ход урока**

**I. Организационный момент.**

**II. Устная работа.**

Назовите пропущенный член последовательности:

а) 1; 3; 5; \*; 9; …

б) –10; 10; –10; 10; \*; …

в) *а*1; …; *ап* – 2; \*; *ап*; …

Последовательность задана формулой *п*-го члена, найти ее член с заданным индексом:

г) *хп* = 5*п* – 2, *х*5 = \*

д) *уп* = *п*3 – *п*, *у*3 = \*

е) *bn* = (–1)*n* · *n*, *b*6 = \*.

Последовательность задана несколькими первыми членами, задайте формулу *п*-го члена:

ж) 4; 8; 12; 16; … *хп* = \* (О т в е т: *хп* = 4*п*.)

з) 7; 7; 7; … *ап* = \* (О т в е т: *ап* = 7.)

и) 1; … *сп* = \* (О т в е т: *сп* = .)

к) 3; 7; 11; 15; … *хп* = \*.

Последний пример оказывается проблемным. Ученики не могут придумать формулу, выражающую через *п* ее *п*-й член. Но можно заметить, что определенная закономерность все же есть – каждый член последовательности, начиная со второго, можно получить прибавлением к предыдущему числа 4. Можно ввести новый способ задания последовательности – рекуррентный.

**III. Объяснение нового материала.**

Помимо словесного и аналитического, существует еще один способ задания последовательности. Он состоит в том, что указывают ее первый член или первые несколько членов и формулу, выражающую любой член последовательности, начиная с некоторого, через предыдущие (один или несколько). Такую формулу называют рекуррентной (от латинского слова reccuro – возвращаться), а соответствующий способ задания последовательности – рекуррентным способом.

Возвращаемся к устному последнему примеру. Последовательность можно задать рекуррентно:

*х*1 = 3; *хп* + 1 = *хп* + 4.

Как уже говорилось, рекуррентно последовательность можно задать через несколько предыдущих членов. Пусть (*ип*) – последовательность, в которой *и*1 = 1; *и*2 = 1; *ип* + 1 = *ип* + *ип* – 1 при *п* > 2. Члены этой последовательности называют числами Фибоначчи. Выписываем первые ее несколько членов:

1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; 34; 55; …

Здесь возможно привести небольшую справку из истории математики, либо предложить учащимся подготовить реферат или доклад на тему «Числа Фибоначчи и золотое сечение».

**IV. Формирование умений и навыков.**

При решении следующих примеров следует требовать от учащихся не только «подставлять» числовые значения в рекуррентную формулу, но и проговаривать словесную формулировку задания последовательности.

*Упражнения:*

1. Выпишите пять первых членов последовательности (*сп*), если:

а) *с*1 = 3, *сп* + 1 = *сп* + 4;

б) *с*1 = 4, *сп* + 1 = 2 · *сп*.

2. № 568, 569 (а, б) – самостоятельное решение, одновременно решение на откидных досках и последующая проверка.

3. № 672 (а, б). Это задание повышенного уровня сложности, которое заключается в том, что формула задания последовательности записана в «непривычном» виде:

*у*1 = –3; *уп* + 1 – *уп* = 10.

Прежде чем применять ее, нужно записать ее в таком виде, чтобы последующий член явно выражался через предыдущий:

*уп* + 1 = *уп* + 10.

Дальше ученики могут продолжить работу самостоятельно с последующей устной проверкой результатов.

**V. Диктант.**

Работа выполняется по вариантам (в квадратных скобках задание, относящееся ко второму варианту).

1) Является ли конечной или бесконечной последовательность делителей [кратных] числа 1200 [8]?

2) Является ли конечной или бесконечной последовательность кратных [делителей] числа 6 [2400]?

3) Последовательность задана формулой *ап* = 5*п* + 2 [*bn* = *n*2 – 3]. Запишите, чему равен ее 3-й член.

4) Запишите последний член последовательности всех трехзначных  
[двухзначных] чисел.

5) Запишите рекуррентную формулу *ап* + 1 = *ап* – 4, где *а*1 = 5 [*bn* + 1 =  
= , где *b*1 = 8]. Найдите *а*2 [*b*2].

О т в е т ы: 1) Конечной [Бесконечной].

2) Бесконечной [Конечной].

3) 17 [6].

4) 999 [99].

5) 1 [2].

**V. Развивающие задания.**

Задайте формулой *п*-го члена последовательность (*bn*), если известно, что:

а) *b*1 = 4; *bn* + 1 = *bn*+ 4;

б) *b*1 = 1, *bn* + 1 = 5*bn*.

Это задание направлено на формирование умения задавать последовательности различными способами, что требует от учащихся умения анализировать, сопоставлять. Для решения этого задания сперва следует записать по рекуррентной формуле несколько первых членов последовательности, проанализировать ее, «увидеть» выражение каждого члена не через предыдущий, а через порядковый номер *п* и записать формулу:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 4;  *п* = 1 | 8;  *п* = 2 | 12;  *п* = 3 | 16;  *п* = 4 | 20;  *п* = 5 | … | *bn* = 4 · *n* |

**VII. Итоги урока.**

В о п р о с ы у ч а щ и м с я:

– Какие способы задания последовательности существуют?

– В чем сущность рекуррентного способа задания последовательности?

– Можно ли одну и ту же последовательность задать различными способами? Приведите примеры.

**Домашнее задание:** № 569 (в; г), № 570, № 671, № 573 (а).

**У р о к 3 (58).  
Арифметическая прогрессия.  
Формула (рекуррентная) *п*-го члена  
арифметической прогрессии**

**Цели:** ввести понятия арифметической прогрессии и разности арифметической прогрессии; вывести рекуррентную формулу *п*-го члена арифметической прогрессии; формировать умения нахождения разности и нескольких первых членов арифметической прогрессии по первому члену и разности, а также *п*-го члена по формуле.

**Ход урока**

**I. Организационный момент.**

**II. Устная работа.**

1-й б л о к. **Актуализация знаний.**

Назовите первые три члена последовательности:

а) *an* = ; б) *bn* = 3*n* – 1; в) *сп* = *п*2 + 1.

Для последовательности, заданной первым членом и рекуррентной формулой, найдите второй и третий члены:

г) *x*1 = 2, *xп* + 1 = ;

д) *у*1 = 3, *уп* + 1 = *уп*2 – 5.

2-й б л о к. **Актуализация знаний и создание проблемной ситуации.**

Задать последовательность с помощью формулы *п*-го члена или рекуррентной формулы.

|  |  |
| --- | --- |
| Последовательность | Формула |
| а) –2; 0; 2; 4; … | *х*1 = –2; *хп* + 1 = *хп* + 2 |
| б) –5; 5; –5; 5; … | *хп* = (–1)*п* · 5 |
| в) 2; 2,5; 3; 3,5; 4; … | *х*1 = 2; *хп* + 1 = *хп* + 0,5 |
| г) 1; 4; 9; 16; … | *хп* = *п*2 |
| д) 1;  … | *х*1 = 2; *хп* + 1 = |
| е) 0; 10; 20; 30; 40; … | *х*1 = 0; *хп* + 1 = *хп* + 10 |
| ж) *а*; *а* + 3; *а* + 6; *а* + 9; … | *х*1 = *а*; *хп* + 1 = *хп* + 3 |

После заполнения таблицы анализируем полученные результаты и замечаем, что последовательности а), в), е) и ж) – одинакового вида, а именно: задаются рекуррентным способом и каждый член, начиная со второго, получается прибавлением к предыдущему числа (2; 0,5; 10; 3).

Учащиеся «открыли» определенный вид последовательности. Следует сказать, что такие последовательности называются «арифметическая прогрессия», и попросить учащихся попробовать самостоятельно сформулировать определение такой прогрессии на основе выделенных ими характеристических свойств.

**III. Объяснение нового материала.**

1. *Определение.* ***Арифметической прогрессией*** называется последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, сложенному с одним и тем же числом.

(*ап*) – арифметическая прогрессия, если для любого *п* *N* выполняется условие *ап* + 1 = *ап* + *d*, где *d* – некоторое число. Число *d* называется «разностью арифметической прогрессии», так как из определения следует, что *ап* + 1 – *ап* = *d*.

Далее следует привести примеры арифметических прогрессий, причем следует варьировать значение *d* (положительные числа; отрицательные; нуль; дробные).

П р и м е р ы арифметических прогрессий:

1) *а*1 = 1, *d* = 1.

1; 2; 3; 4; … (последовательные натуральные числа).

2) *а*1 = 1, *d* = 2.

1; 3; 5; 6; … (последовательность положительных

нечетных чисел).

3) *а*1 = –2, *d* = –2.

–2; –4; –6; –8; –10; … (последовательность отрицательных

четных чисел).

4) *а*1 = 7, *d* = 0.

7; 7; 7; 7; … (постоянная последовательность).

5) *а*1 = 1, *d* = 0,3.

1; 1,3; 1,6; 1,9; 2,2; …

Обращаем внимание, что если *d* > 0, то арифметическая прогрессия возрастающая, если *d* < 0 – убывающая, если *d* = 0 – постоянная.

2. Итак, учащиеся знают, что для того чтобы найти любой член арифметической прогрессии (или задать ее), достаточно знать ее первый член и разность. Следует подвести их к мысли, что это очень трудоемко, например:

(*ап*) – арифметическая прогрессия, где *а*1 = 2, *d* = 27. Найти сотый член.

Пользуясь определением, нам нужно сделать 100 шагов. Это громоздко. Хотелось бы знать формулу для нахождения любого члена арифметической прогрессии только по первому члену, разности и порядковому номеру искомого члена.

Для вывода формулы пользуемся определением арифметической прогрессии:

*а*1

*а*2 = *а*1 + *d*

*а*3 = *а*2 + *d* = (*а*1 + *d*) + *d* = *а*1 + 2*d*

*а*4 = *а*3 + *d* = (*а*1 + 2*d*) + *d* = *а*1 + 3*d*

*а*5 = *а*4 + *d* = (*а*1 + 3*d*) + *d* = *а*1 + 4*d*

*а*6 = … = *а*1 + 5*d*

… …

|  |  |
| --- | --- |
|  | – формула *п*-го члена  арифметической прогрессии. |

П р и м е р 1. (*сп*) – арифметическая прогрессия,

*с*1 = 0,62, *d* = 0,24; *с*50 –?

*с*50 = *с*1 + *d* (50 – 1) = 0,62 + 0,24 · 49 = 12,38.

Этот пример на «прямое» использование формулы *п*-го члена арифметической прогрессии.

П р и м е р 2. Выяснить, является ли число –122 членом арифметической прогрессии (*хп*):

23; 17,2; 11,4; 5,6; …

При рассмотрении этого примера пояснить, что для решения надо доказать, что существует *п* *N*, при котором будет верна формула *п*-го члена:

–122 = 23 + (*п* – 1) · (–5,8), где

–5,8 = 17,2 – 23 – разность арифметической прогрессии.

**IV. Формирование умений и навыков.**

Все задания, выполняемые учащимися на этом уроке, можно разбить на 3 типа:

1) На «узнавание» арифметической прогрессии, определение ее первого члена и разности.

2) На нахождение *п*-го члена арифметической прогрессии по определению и по формуле.

3) На запись формулы *п*-го члена по первому члену и разности, решение задач на «косвенное» использование формулы *п*-го члена (например, нахождение *п*).

*Упражнения:*

**1.** Решить устно:

а) Является ли последовательность арифметической прогрессией:

–3,5; –7; –10,5; –14; –17,5; … *(Да.)*

5; 5; 5; 5; … *(Да.)*

2; 12; 22; 23; 32; … ? *(Нет.)*

б) Найти члены арифметической прогрессии, обозначенные буквами:

–10; –7; *с*3; *с*4; *с*5; *с*6

–3,4; –1,4; *а*3; *а*4

12; *у*2; 20; *у*4.

в) (*ап*) – арифметическая прогрессия. Является ли арифметической прогрессией последовательность:

12*а*1; 12*а*2; …; 12*ап*; …

3*а*1 + 1; 3*а*2 + 1; …; 12*ап* + 1; … ?

**2.** № 575 (а, б), № 576 (а, в, д). Самостоятельное решение с последующей проверкой.

№ 577. Решение у доски с объяснением.

№ 579. Самостоятельное решение и одновременно на скрытых досках с проверкой.

**3.** № 584. Задание на «не прямое» применение формулы. Еще раз подчеркнуть, что с помощью этой формулы можно находить следующие величины: *ап*; *а*1; *d*; *п*.

**V. Итоги урока.**

В о п р о с ы у ч а щ и м с я:

– Что называется арифметической прогрессией?

– Как задается арифметическая прогрессия?

– Назовите формулу *п*-го члена арифметической прогрессии.

**Домашнее задание:** № 575 (в, г); № 576 (б, г, е); № 586; № 599.

**У р о к 4 (59).  
Свойство арифметической прогрессии**

**Цели:** вывести и доказать характеристическое свойство арифметической прогрессии; формировать умения применять свойство арифметической прогрессии при решении задач; продолжить формирование навыков применения определения арифметической прогрессии и формулы *п*-го члена.

**Ход урока**

**I. Организационный момент.**

**II. Математический диктант.**

*Работа выполняется по вариантам (в квадратных скобках задание, относящееся ко второму варианту).*

1) У арифметической прогрессии первый член 4 [6], второй член 6 [2]. Найдите разность *d*.

2) У арифметической прогрессии первый член 6 [4], второй член 2 [6]. Найдите третий член.

3) Найдите десятый [восьмой] член арифметической прогрессии, если ее первый член равен 1, а разность 4 [5].

4) Является ли последовательность четных [нечетных] чисел арифметической прогрессией?

5) *ап* – арифметическая прогрессия. Выразите через *а*1 и *d:*

*а*10; *а*2*k*; *ak* + 3 [*a*20; *ak*; *a*2*k* + 1].

О т в е т ы: 1) 2 [–4];

2) –2 [8];

3) 37 [36];

4) Да [Да];

5) *а*10 = *а*1 + 9*d* [*а*20 = *а*1 + 19*d*];

*а*2*k* = *а*1 + *d* (2*k* – 1) [*аk* = *а*1 + *d* (*k* – 1)];

*ak* + 3 = *а*1 + *d* (*k* + 2) [*a*2*k* + 1 = *а*1 + 2*dk*].

**III. Объяснение нового материала.**

У с т н о е з а д а н и е:

Дана арифметическая прогрессия (*хп*): 2; 5; 8; 11; 14.

Вычислить:  = *(5.)*

 = *(8.)*

 = *(11.)*

Замечаем интересное свойство и формируем его – «Каждый член арифметической прогрессии, начиная со второго, равен среднему арифметическому предыдущего и последующего членов».

Так как мы это предположили исходя из рассмотрения конкретной последовательности, данное утверждение следует доказать:

 Пусть (*хп*) – арифметическая прогрессия, тогда

*хп* – *хп* – 1 = *хп* + 1 – *хп*, то есть

2*хп* = *хп* – 1 + *хп* + 1,

|  |  |
| --- | --- |
| *хп* = |  |

Следует обратить особое внимание учащихся, что это утверждение – *свойство* арифметической прогрессии. А если мы сформулируем обратное утверждение и сможем его доказать, то как будет оно называться? Это будет *признак* арифметической прогрессии: «Если в последовательности (*хп*) каждый член, начиная со второго, равен среднему арифметическому предыдущего и последующего членов, то эта последовательность является арифметической прогрессией».

 Пусть *хп* = , где *п* ≥ 2, тогда 2*хп* = *хп* – 1 + *хп* + 1,

*хп* – *хп* – 1 = *хп* + 1 – *хп*, то есть разность между последующим и предыдущим членами последовательности (*хп*) остается постоянной. Значит, (*хп*) – арифметическая прогрессия .

**IV. Формирование умений и навыков.**

Задачи, решаемые на этом уроке, более разнообразны по сравнению с предыдущим уроком. Теперь мы можем использовать определение арифметической прогрессии, ее свойство и признак, формулу *п*-го члена.

Кроме того, появляются задачи, в тексте которых не задана арифметическая прогрессия в явном виде. Нужно «перевести» условие на математический язык, «увидеть» арифметическую прогрессию, решить задачу и формулировку ответа опять «перевести» на язык условия.

*Упражнения:*

**1.** № 580, № 585. Самостоятельное решение заданий на «прямое» применение формулы *п*-го члена и нахождения разности.

№ 582. Решение у доски с объяснениями. Необходимо самостоятельно задать арифметическую прогрессию (*хп*), где

*х*1 = 50 (м/мин) – скорость поезда в конце первой минуты;

*d* = 50 (м/мин) – увеличение скорости;

*х*20 –?

*х*20 = *х*1 + *d* (20 – 1);

*х*20 = 50 + 50 · 19 = 50 · 20 = 1000 (м/мин).

Обращаем внимание, что скорость принято выражать в км/ч, значит, ответ  · 60 = 60 (км/ч).

№ 587.

**2.** № 589, № 593. Эти упражнения на неоднократное применение формулы *п*-го члена арифметической прогрессии, сводящиеся к решению системы уравнений либо неравенства.

Особое внимание следует уделить анализу условия. Решение полученной системы уравнений и неравенства ученики могут осуществить самостоятельно.

**3.** Упражнение на применение свойства арифметической прогрессии носит развивающий характер.

Первый член арифметической прогрессии равен 7. Найдите второй и третий ее члены, если известно, что они являются квадратами двух последовательных натуральных чисел.

Р е ш е н и е

Пусть (*ап*) – арифметическая прогрессия, где

*а*1 = 7;

*а*2 = *п*2;

*а*3 = (*п* + 1)2, *п* *N*.

По свойству арифметической прогрессии:

*а*2 = ;

*а*1 + *а*3 = 2*а*2;

7 + (*п* + 1)2 = 2*п*2;

*п*2 – 2*п* – 8 = 0;

*п* = 4 или *п* = –2. Так как *п* *N*, то –2 – не удовлетворяет условию.

*а*2 = 42 = 16;

*а*3 = 52 = 25.

**V. Итоги урока.**

В о п р о с ы у ч а щ и м с я:

– Сформулируйте свойство арифметической прогрессии.

– Сформулируйте признак арифметической прогрессии.

**Домашнее задание:** № 581, № 588, № 591; 594; № 595\*.

**У р о к 5 (60).  
Формула *п*-го члена арифметической прогрессии  
(аналитическая)**

**Цели:** вывести аналитическую формулу *п*-го члена арифметической прогрессии; формировать умения задавать арифметическую прогрессию аналитической и рекуррентной формулами; закрепить умения и навыки применения формул *п*-го члена и свойства арифметической прогрессии.

**Ход урока**

**I. Организационный момент.**

**II. Проверка домашней работы.**

**1.** № 594. У доски – решение с комментариями ученика.

Р е ш е н и е

*d* = –18,7 – (–20,3) = 1,6;

*ап* = –20,3 + 1,6 (*п* – 1);

*ап* = –21,9 + 1,6*п*.

Пусть *ап* > 0, тогда –21,9 + 1,6*п* > 0;

*п* > ;

*п* > 13,6875.

Значит, *п* = 14 – порядковый номер первого положительного члена арифметической прогрессии.

*а*14 = –21,9 + 1,6 · 14 = 0,5.

**2.** Ответы учащихся на вопросы по домашней работе.

**III. Объяснение нового материала.**

1. *ап* = *а*1 + *d* (*п* – 1) – формула *п*-го члена арифметической прогрессии. Запишем ее в виде *ап* = *d* · *п* + (*а*1 – *d*), так как (*а*1 – *d*) – некоторое число, то обозначим его *b* = *а*1 – *d* и *k* = *d*, тогда получаем, что любая арифметическая прогрессия может быть задана формулой вида , где *k* и *b* – некоторые числа. Такие формулы мы встречали при изучении последовательностей. Делаем вывод, что арифметическую прогрессию можно задать не только рекуррентной, но и аналитической формулой.

Более того, верно и обратное утверждение: последовательность (*ап*), заданная формулой вида *ап* = *k* · *п* + *b*, где *k* и *b* – некоторые числа, является арифметической прогрессией.

 Найдем разность (*п* + 1)-го и *п*-го членов последовательности (*ап*):

*ап* + 1– *ап* = *k* (*п* + 1) + *b* – (*kп* + *b*) = *kп* + *k* + *b* – *kп* – *b* = *k*. Значит, при любом *п* справедливо *ап* + 1 = *ап* + *k* и по определению (*ап*) – арифметическая прогрессия с разностью *k*. 

**IV. Формирование умений и навыков.**

*Упражнения:*

№ 597. Можно решать устно.

№ 583. При решении этой задачи необходимо использовать сведения из курса геометрии (подобие треугольников). Обозначив *А*1*В*1 = *х*, получим *А*2*В*2 = 2*х*; *А*3*В*3 = 3*х*; … *АпВп* = *п* · *х*, где *х* = 1,5 (см), получим последовательность, заданную формулой *АпВп* = 1,5 · *п*, то есть формула имеет вид *ап* = *kп* + *b*, где *k* = 1,5; *b* = 0. Дальнейшие вычисления проводим, используя формулу *п*-го члена арифметической прогрессии.

**V. Самостоятельная работа.**

**В а р и а н т 1**

1. Зная первые два члена арифметической прогрессии 3,4; –0,2; …, найдите следующие за ними четыре ее члена.

2. В арифметической прогрессии (*bп*) известны *b*1 = –0,8, *d* = 4. Найдите *b*3; *b*24.

3. В арифметической прогрессии (*хп*) известны *х*1 = 14 и *d* = 0,5. Найдите номер члена прогрессии, равного 34.

4.\* Мастерская изготовила в январе 106 изделий, а в каждый следующий месяц изготовляла на 12 изделий больше, чем в предыдущий. Сколько изделий изготовила мастерская в июне?

**В а р и а н т 2**

1. Зная первые два члена арифметической прогрессии 2,8; –0,4; …, найдите следующие за ними четыре ее члена.

2. В арифметической прогрессии (*ап*) известны *а*1 = –1,2, *d* = 3. Найдите *а*4; *а*21.

3. В арифметической прогрессии (*bп*) известны *b*1 = 12 и *d* = 3. Найдите номер члена прогрессии, равного 27.

4.\* Бригада стеклодувов изготовила в январе 80 изделий, а в каждый следующий месяц изготовляла на 17 изделий больше, чем в предыдущий. Сколько изделий изготовила мастерская в августе?

*Упражнения под звездочкой не обязательны для выполнения.*

О т в е т ы:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Задание | I вариант | II вариант |
| 1 | –3,8; –7,4; –11; –14,6 | –3,6; –6,8; –10; –13,2 |
| 2 | *b*3 = 7,2; *b*24 = 71,2 | *а*4 = 7,8; *а*21 = 58,8 |
| 3 | *п* = 41 | *п* = 6 |
| 4 | 166 | 199 |

Так как самостоятельная работа носит обучающий характер, то целесообразно проверить ее на этом уроке.

**VI. Итоги урока.**

Анализ результатов самостоятельной работы.

**Домашнее задание:** № 590, № 592, № 594; № 598.

**У р о к 6 (61).  
Нахождение суммы первых *п* членов  
арифметической прогрессии**

**Цели:** вывести формулу суммы первых *п* членов арифметической прогрессии; формировать умение применять эту формулу при решении задач.

**Ход урока**

**I. Организационный момент.**

**II. Актуализация знаний.**

У с т н о:

1. Сформулируйте определение арифметической прогрессии.

2. Приведите пример арифметической прогрессии.

3. Сформулируйте определение разности арифметической прогрессии.

4. Назовите формулу *п*-го члена арифметической прогрессии.

П и с ь м е н н о:

|  |  |
| --- | --- |
| **В а р и а н т 1.**  № 578 (а). | **В а р и а н т 2.**  № 578 (б). |

**III. Объяснение нового материала.**

**1. Создание проблемной ситуации.**

З а д а ч а. Ученик мастера изготовил в первую неделю работы 15 гончарных изделий, а в каждую следующую неделю изготовлял на 5 изделий больше, чем в предыдущую. Сколько изделий ученик изготовил за восьмую неделю? Сколько изделий ученик изготовил всего в течение десяти недель?

Ответ на первый вопрос ученики знают, как получить, такие задачи решались ими на прошлых занятиях. Количество изготовленных изделий в первую, вторую и т. д. недели можно обозначить *а*1, *а*2,… *ап*, …, причем (*ап*) – арифметическая прогрессия с разностью *d* = 5 и первым членом *а*1 = 15. За восьмую неделю ученик изготовил гончарных изделий:

*а*8 = 15 + 5 (8 – 1) = 50.

Для ответа на второй вопрос ученики могут предложить только такой способ решения: подсчитать количество изделий, выполненных за 2-ю, 3-ю, …, 10-ю неделю, и сложить. Это очень долго. А если в задаче нужно будет найти сумму ста членов арифметической прогрессии, тысячи? Возникает проблема – нужна общая формула.

**2. Пример из истории математики.**

С формулой суммы *п* первых членов арифметической прогрессии связан эпизод из жизни немецкого математика Карла Гаусса (1777–1855). Маленькому Карлу было 9 лет, когда учитель, занятый проверкой работ учеников, предложил классу сложить все натуральные числа от 1 до 100, рассчитывая надолго занять детей. Каково же было удивление преподавателя, когда через несколько минут Гаусс подошел к нему с верным ответом! Он подошел к решению творчески, заметив, что можно складывать числа не подряд, а парами: 1 + 100, 2 + 99, 3 + 98 … и т. д. Легко увидеть, что сумма чисел в каждой паре равна 101, а таких пар 50, значит общая сумма равна 101 · 50 = 5050.

А можно ли с помощью рассуждений, аналогичных тем, что проводил маленький Гаусс, найти сумму первых *п* членов любой арифметической прогрессии?

**3. Вывод формулы.**

Пусть (*ап*) – арифметическая прогрессия.

Обозначим *Sn* сумму *п* первых членов арифметической прогрессии.

*Sn* = *а*1 + *а*2 + *а*3 + *а*4 + … + *ап* – 1 + *ап* (1)

*Sn* = *ап* + *ап* – 1 + *ап* – 2 + *ап* – 3 + … + *а*2 + *а*1 (2)

Докажем, что сумма каждой пары членов прогрессии, расположенных друг под другом, равна *а*1 + *ап*.

*a*2 + *an* – 1 = (*a*1 + *d*) + (*an* – *d*) = *a*1 + *an*;

*a*3 + *an* – 2 = (*a*2 + *d*) + (*an* – 1 – *d*) = *a*2 + *an* – 1 = *a*1 + *an*;

*a*4 + *an* – 3 = (*a*3 + *d*) + (*an* – 2 – *d*) = *a*3 + *an* – 2 = *a*1 + *an* и т. д.

Число таких пар равно *п*. Складываем почленно (1) и (2) и получаем

2*Sn* = (*a*1 + *an*) · *n.*

|  |  |
| --- | --- |
|  | – формула суммы *п* первых членов  арифметической прогрессии. |

Обычно арифметическая прогрессия задается первым членом и разностью, поэтому удобно иметь еще формулу суммы *п* первых членов, выраженную через *а*1 и *d* арифметической прогрессии.

*Sn* =  · *n*, *ап* = *а*1 + *d* (*п* – 1);

*Sn* =  · *n*;

|  |  |
| --- | --- |
|  | – формула суммы *п* первых членов  арифметической прогрессии. |

**4. Пример.**

Вернемся к задаче про ученика мастера. В течение 10 недель ученик мастера изготовил

*S*10 =  · 10 = 375 изделий.

**IV. Формирование умений и навыков.**

Так как формул суммы *п* первых членов арифметической прогрессии две, то необходимо сперва выяснить, в заданиях какого вида лучше использовать каждую из них, а затем при решении упражнений анализировать условие и выбирать формулу.

*Упражнения:*

1) Найти сумму первых тридцати членов арифметической прогрессии 4; 5,5; …

Р е ш е н и е

*а*1 = 4, *d* = 1,5, значит, по формуле II:

*а*30 =  · 30 = 772,5.

2) Найти сумму первых сорока членов последовательности (*ап*), заданной формулой *ап* = 5 · *п* – 4.

Последовательность (*ап*) задана формулой вида *ап* = *kn* + *b*, где *k* = 5 и *b* = –4, значит, (*ап*) – арифметическая прогрессия. Если применять формулу II, то для этого сперва надо найти *а*1, *а*2 , затем *d* как разность *а*1 – *а*2. Это неудобно, проще сразу найти *а*1, *а*40 и подставить в формулу I.

*а*1 = 5 · 1 – 4 = 1; *а*4 = 5 · 40 – 4 = 196;

*S*40 =  = 3940.

3) № 603, № 604. На «прямое» применение формул I и II. Самостоятельное решение с последующей проверкой.

№ 606.

№ 608 (а). У доски с объяснением. Здесь необходимо «увидеть», что последовательность слагаемых – арифметическая прогрессия, где *а*1 = 2, *d* = 2 и количество слагаемых равно *п*, можно применить формулу II. А можно задать эту прогрессию формулой *ап* = 2*п* и применить формулу I.

**V. Итоги урока.**

В о п р о с ы у ч а щ и м с я:

– Назовите формулу суммы первых *п* членов арифметической прогрессии (2 вида).

– В каких случаях удобнее применять формулу I, II?

**Домашнее задание:** № 605, № 607, № 608 (б), № 621 (а).

**У р о к 7 (62).  
Применение формулы суммы первых *п* членов  
арифметической прогрессии**

**Цели:** закреплять умения и навыки применения формулы суммы первых *п* членов арифметической прогрессии при решении задач; провести подготовку к контрольной работе.

**Ход урока**

**I. Организационный момент.**

**II. Устная работа.**

1. Является ли арифметической прогрессией последовательность, заданная формулой:

а) *хп* = 2*п* + 1;

б) *уп* = *п*2 – *п*;

в) *zn* = –64?

2. Найдите разность арифметической прогрессии:

г) 17; 13; 9; …

д) (*хп*), если *х*10 = 4, *х*12 = 14;

е) (*уп*), если *уп* = 3*п* – 0,5.

3. (*ап*) – арифметическая прогрессия, вычислите:

ж) *а*7, если *а*1 = 1, *d* = –2;

з) *а*10, если *ап* = 17 · *п* – 100;

и) *а*12, если *а*1 = 0, *а*2 = 3.

**III. Проверочная работа.**

Работа проводится по вариантом, задания на «прямое» применение формулы суммы *п* первых членов арифметической прогрессии.

**В а р и а н т 1**

1) Найдите сумму первых двенадцати членов арифметической прогрессии, если *а*1 = 16,5; *d* = –1,5.

2) Найдите сумму первых сорока членов последовательности, заданной формулой *ап* = 3*п* + 2.

3) Найдите сумму десяти первых членов арифметической прогрессии (*ап*), если *а*1 = 8, *а*7 = 26.

**В а р и а н т 2**

1) Найдите сумму первых десяти членов арифметической прогрессии, если *а*1 = 18,5; *d* = –2,5.

2) Найдите сумму первых двадцати членов последовательности, заданной формулой *хп* = 4*п* + 5.

3) Найдите сумму двенадцати первых членов арифметической прогрессии (*ап*), если *а*1 = 6, *а*11 = 46.

О т в е т ы:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Задание | I вариант | II вариант |
| 1 | 99 | 72,5 |
| 2 | 2540 | 940 |
| 3 | 215 | 336 |

**IV. Формирование умений и навыков.**

Все упражнения, решаемые на этом уроке, можно условно разделить на следующие виды:

1) На вычисление суммы первых *п* членов арифметической прогрессии по двум формулам (требует выбора формулы в зависимости от условия задачи).

2) На вычисление отдельных членов, числа членов, разности арифметической прогрессии по формулам суммы первых *п* членов.

3) На нахождение вышеперечисленных величин при наличии дополнительных условий и ограничений, сводящиеся к решению систем уравнений, неравенств.

Задания первого вида были выполнены в ходе проверочной работы.

*Упражнения:*

№ 609 (в), № 610, № 612, № 614, № 616. Решение у доски с комментариями.

Р е ш е н и е

**№ 609 (в).**

(*ап*) – арифметическая прогрессия;

*ап* = 4*п*, *ап* ≤ 300;

4*п* ≤ 300;

*п* ≤ 75, значит, *п* = 75 – количество таких чисел.

*а*1 = 4; *а*75 = 4 · 75 = 300;

*S*75 =  · 75 = 11400.

О т в е т: 11400.

**№ 610.**

В этом упражнении задана арифметическая прогрессия (*ап*), где  
*а*1 = 10; *d* = 3. Наши формулы позволяют находить сумму с первого по *п*-й член включительно, а требуется найти с 15-го по 30-й включительно. Заметим, что мы можем найти суммы членов арифметической прогрессии с 1-го по 30-й и с 1-го по 14-й включительно, их разность и даст искомый результат.

*S*30 =  · 30; *S*30 =  · 30 = 1605.

*S*14 =  · 14; *S*14 =  · 14 = 413.

*S*30 – *S*14 = 1192.

О т в е т: 1192.

**№ 612.**

(*сп*) – арифметическая прогрессия;

*с*7 = 18,5; *с*17 = –26,5.





*S*20 =  · 20; *S*20 =  · 20 = 55.

О т в е т: 55.

**№ 616.**

Количество шаров в каждом ряду можно представить в виде арифметической прогрессии (*ап*), где *а*1 = 1; *d* = 1.

1. *Sn* = 120. Найти *п*.

*Sn* =  · *п*; 120 =  · *п*;

240 = (*п* + 1) · *п*;

*п*2 + *п* – 240 = 0;

*п* = 15 или *п* = –16, так как *п* *N*, то выбираем *п* = 15.

2. *п* = 30. Найти *S*30.

*S*30 =  · 30; *S*30 =  · 30 = 465.

О т в е т: 15 рядов, 465 шаров.

**V. Итоги урока.**

Ответить на контрольные вопросы *(учебник, с. 153).*

**Домашнее задание:** № 609 (б; г), № 611, № 613, № 617\*.

**У р о к 8 (63).  
Контрольная работа № 4**

**В а р и а н т 1**

1. Найдите двадцать третий член арифметической прогрессии (*ап*), если *а*1 = –15 и *d* = 3.

2. Найдите сумму шестнадцати первых членов арифметической прогрессии: 8; 4; 0; …

3. Найдите сумму шестидесяти первых членов последовательности (*bп*), заданной формулой *bп* = 3*п* – 1.

4. Является ли число 54,5 членом арифметической прогрессии (*ап*), в которой *а*1 = 25,5 и *а*9 = 5,5?

5. Найдите сумму всех натуральных чисел, кратных 3 и не превосходящих 100.

**В а р и а н т 2**

1. Найдите восемнадцатый член арифметической прогрессии (*ап*), если *а*1 = 70 и *d* = –3.

2. Найдите сумму двадцати первых членов арифметической прогрессии: –21; –18; –15; …

3. Найдите сумму сорока первых членов последовательности (*bп*), заданной формулой *bп* = 4*п* – 2.

4. Является ли число 30,4 членом арифметической прогрессии (*ап*), в которой *а*1 = 11,6 и *а*15 = 17,2?

5. Найдите сумму всех натуральных чисел, кратных 7 и не превосходящих 150.

**В а р и а н т 3**

1. Найдите тридцать второй член арифметической прогрессии (*ап*), если *а*1 = 65 и *d* = –2.

2. Найдите сумму двадцати четырех первых членов арифметической прогрессии: 42; 34; 26; …

3. Найдите сумму восьмидесяти первых членов последовательности (*bп*), заданной формулой *bп* = 2*п* – 5.

4. Является ли число 6,5 членом арифметической прогрессии (*ап*), в которой *а*1 = –2,25 и *а*11 = 10,25?

5. Найдите сумму всех натуральных чисел, кратных 9 и не превосходящих 80.

**В а р и а н т 4**

1. Найдите сорок третий член арифметической прогрессии (*ап*), если *а*1 = –9 и *d* = 4.

2. Найдите сумму четырнадцати первых членов арифметической прогрессии: –63; –58; –53; …

3. Найдите сумму ста двадцати первых членов последовательности (*bп*), заданной формулой *bп* = 3*п* – 2.

4. Является ли число 35,8 членом арифметической прогрессии (*ап*), в которой *а*1 = –23,6 и *а*22 = 11?

5. Найдите сумму всех натуральных чисел, кратных 6 и не превосходящих 150.

В контрольной работе задания 1 и 2 обязательного уровня.

**Решение вариантов контрольной работы**

**В а р и а н т 1**

1. (*ап*) – арифметическая прогрессия; *а*1 = –15, *d* = 3.

*а*23 = *а*1 + 22*d*; *а*23 = –15 + 22 · 3 = –15 + 66 = 51.

О т в е т: 51.

2. 8; 4; 0; … – арифметическая прогрессия;

*а*1 = 8, *d* = – 4.

*Sn* =  · *п*; *S*16 =  · 16 = (16 – 60) · 8 =  
= –44 · 8 = –352.

О т в е т: –352.

3. *bп* = 3*п* – 1, значит, (*bп*) – арифметическая прогрессия.

*b*1 = 3 · 1 – 1 = 2; *b*60 = 3 · 60 – 1 = 179;

*Sn* =  · *п*; *S*60 =  · 60 = 181 · 30 = 5430.

О т в е т: 5430.

4. (*ап*) – арифметическая прогрессия; *а*1 = 25,5; *а*9 = 5,5.

Пусть *ап* = 54,5.

*d* = ; *d* =  =  = –2,5;

*ап* = *а*1 + *d* (*п* – 1); 54,5 = 25,5 – 2,5 (*п* – 1); 2,5 (*п* – 1) = –29;

*п* – 1 = –11,6; *п* = –10,6, *п* *N*, значит, 54,5 не является членом арифметической прогрессии (*ап*).

О т в е т: нет.

5. (*ап*) – арифметическая прогрессия; *ап* = 3*п*; *ап* ≤ 100;

3*п* ≤ 100; *п* ≤ 33, так как *п* *N*,то *п* = 33.

*Sn* =  · *п*; *а*1 = 3; *а*33 = 99, тогда

*S*33 =  · 33 = 1683.

О т в е т: 1683.

**В а р и а н т 2**

1. (*ап*) – арифметическая прогрессия; *а*1 = 70, *d* = –3.

*а*18 = *а*1 + 17*d*; *а*18 = 70 + 17 · (–3) = 70 – 51 = 19.

О т в е т: 19.

2. –21; –18; –15; … – арифметическая прогрессия;

*а*1 = –21, *d* = 3.

*Sn* =  · *п*; *S*20 =  · 20 =  · 20 =  
= 15 · 10 = 150.

О т в е т: 150.

3. *bп* = 4*п* – 2, значит, (*bп*) – арифметическая прогрессия.

*b*1 = 2; *b*40 = 4 · 40 – 2 = 160 – 2 = 158;

*Sn* =  · *п*; *S*40 =  · 40 = 160 · 20 = 3200.

О т в е т: 3200.

4. (*ап*) – арифметическая прогрессия; *а*1 = 11,6; *а*15 = 17,2.

Пусть *ап* = 30,4.

*d* = ; *d* =  =  = 0,4;

*ап* = *а*1 + *d* (*п* – 1); 30,4 = 11,6 + 0,4 (*п* – 1); 0,4 (*п* – 1) = 18,8;

*п* – 1 = 47; *п* = 48, *п* *N*, значит, 30,4 является членом арифметической прогрессии (*ап*).

О т в е т: да.

5. (*ап*) – арифметическая прогрессия; *ап* = 7*п*; *ап* ≤ 150;

7*п* ≤ 150; *п* ≤ 21, так как *п* *N*,то *п* = 21.

*Sn* =  · *п*; *а*1 = 7; *а*21 = 147, тогда

*S*21 =  · 21 = 77 · 21 = 1617.

О т в е т: 1617.

**В а р и а н т 3**

1. (*ап*) – арифметическая прогрессия; *а*1 = 65, *d* = –2.

*а*32 = *а*1 + 31*d*; *а*32 = 65 + 31 · (–2) = 65 – 62 = 3.

О т в е т: 3.

2. 42; 34; 26; … – арифметическая прогрессия;

*а*1 = 42, *d* = –8.

*Sn* =  · *п*; *S*24 =  · 24 =  · 24 =  
= –100 · 12 = –1200.

О т в е т: –1200.

3. *bп* = 2*п* – 5, значит (*bп*) – арифметическая прогрессия.

*b*1 = –3; *b*80 = 2 · 80 – 5 = 160 – 5 = 155

*Sn* =  · *п*; *S*30 =  · 80 = 152 · 40 = 6080.

О т в е т: 6080.

4. (*ап*) – арифметическая прогрессия; *а*1 = –2,25; *а*11 = 10,25.

Пусть *ап* = 6,5.

*d* = ; *d* =  = 1,25.

*ап* = *а*1 + *d* (*п* – 1); 6,5 = –2,25 + 1,25 (*п* – 1);

1,25 (*п* – 1) = 8,75;

*п* – 1 = 7; *п* = 8, *п* *N*, значит, число 6,5 является членом арифметической прогрессии (*ап*).

О т в е т: да.

5. (*ап*) – арифметическая прогрессия, *ап* = 9*п*; *ап* ≤ 80;

9*п* ≤ 80; *п* ≤ 8, так как *п* *N*,то *п* = 8.

*а*1 = 9; *а*8 = 72, *Sn* =  · *п*; *S*8 =  · 8 = 324.

О т в е т: 324.

**В а р и а н т 4**

1. (*ап*) – арифметическая прогрессия; *а*1 = –9, *d* = 4.

*а*43 = *а*1 + 42*d*; *а*43 = –9 + 42 · 4 = –9 + 168 = 159.

О т в е т: 159.

2. –63; –58; –53; … – арифметическая прогрессия;

*а*1 = –63, *d* = 5.

*Sn* =  · *п*; *S*14 =  · 14 =  · 14 =  
= –61 · 7 = –427.

О т в е т: –427.

3. *bп* = 3*п* – 2, значит (*bп*) – арифметическая прогрессия.

*b*1 = 1; *b*120 = 3 · 120 – 2 = 358

*Sn* =  · *п*; *S*120 =  · 120 = 359 · 60 = 21540

О т в е т: 21540.

4. (*ап*) – арифметическая прогрессия, *а*1 = –23,6; *а*22 = 11.

Пусть *ап* = 35,8.

*d* = ; *d* =  =  = 1;

*ап* = *а*1 + *d* (*п* – 1); 35,8 = –23,6 + (*п* – 1);

(*п* – 1) = –59,4; *п* – 1 = ; *п* – 1 = 36;

*п* = 37, *п* *N*, значит, число 35,8 не является членом арифметической прогрессии (*ап*).

О т в е т: нет.

5. (*ап*) – арифметическая прогрессия; *ап* = 6*п*; *ап* ≤ 150;

6*п* ≤ 150; *п* ≤ 25, так как *п* *N*, то *п* = 25.

*Sn* =  · *п*; ; *а*1 = 6; *а*25 = 150, тогда

*S*25 =  · 25 = 78 · 25 = 1950.

О т в е т: 1950.