ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗАВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ

ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

САНКТ–ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ

АВИАЦИОННО-ТРАНСПОРТНЫЙ КОЛЛЕДЖ

Н. А. Юновидова

М А Т Е М А Т И К А

Методические указания к выполнению

расчётно-графической работы по математической логике

для специальностей 100120 «Сервис на воздушном транспорте» и

190701 «Организация перевозок и управление на воздушном транспорте»

Санкт-Петербург

2012 г.

Пояснительная записка

 Данные методические указания составлены на основе примерной программы дисциплины «Математика», утверждённой Министерством РФ для специальностей 100120 «Сервис на воздушном транспорте» и 190701 «Организация перевозок на воздушном транспорте». Согласно программе учащиеся должны ознакомиться с методами анализа и синтеза логических устройств. Усвоение этого материала отрабатывается и контролируется выполнением расчётно-графической работы.

 В методические указания включены основные теоретические сведения по математической логике, необходимые для выполнения расчётно-графической работы. Даны методические рекомендации по выполнению задания и разобраны примеры решения задач, аналоги которых включены в расчётно-графическую работу. Приведено 60 вариантов заданий для расчётно-графической работы по синтезу логической схемы.

Введение

 Формальная логика – это наука о формах и законах правильного мышления, аналитическая теория искусства рассуждения. Математическая логика – часть формальной логики, где формы мышления изучаются с помощью специального искусственного языка. Тем самым достигается большая точность формализации, систематизации принципов рассуждения, что позволяет применять их для решения сложных задач. Математическая логика успешно используется в различных приложениях, связанных с цифровой техникой (цифровыми устройствами), в том числе связанных со средствами общения с компьютером.

 Данное пособие предназначено помочь учащимся в изучении основ математической логики и выполнении расчётно- графической работы по синтезу логических схем.

Готовясь к выполнению задания по расчётно-графической работе, учащийся должен изучить теоретическую часть, внимательно разобрать решения приведённых задач и уже только после этого приступить к выполнению своего задания. При выполнении задания рекомендуется на каждом шаге алгоритма синтеза логической схемы делать проверку выполненных операций.

**О С Н О В Ы М А Т Е М А Т И Ч Е С К О Й Л О Г И К И**

1. **ВЫСКАЗЫВАНИЯ И ЛОГИЧЕСКИЕ ПЕРЕМЕННЫЕ**

 **Высказыванием** называется повествовательное предложение, о котором в данной ситуации можно сказать, что оно истинно или ложно, но не то и другое одновременно.

Пример 1.

 1) «7 - простое число»;

2) «Киев – столица России»;

3) «x + y = 4 ».

 Первое и второе предложения являются высказываниями, причём первое из них истинно, а второе – ложно. Третье предложение высказыванием не является.

 На высказывание можно смотреть как на величину, которая принимает одно из двух значений: «истина», «ложь». Поэтому каждому высказыванию можно поставить в соответствие *логическую* переменную, которая принимает значение 1, если высказывание истинно и 0, если высказывание ложно.

 Первому высказыванию из рассмотренного выше примера можно сопоставить логическую переменную $x$, а второму – $y$ и при этом $x$ = 1, а $y$= 0.

 Будем высказывание называть **простым** (элементарным), если оно рассматривается как некоторое единое целое, и **сложным** (составным), если оно образовано из простых высказываний с помощью логических связок «не», «и», «или», «если …, то…», «тогда и только тогда»,…

 В дальнейшем высказываниями будем называть и соответствующие им логические переменные.

1. **ОСНОВНЫЕ ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ НАД ВЫСКАЗЫВАНИЯМИ**

 **Отрицанием** (инверсией) высказывания $x$ называется новое высказывание $\overline{x}$ (читается «не $x$»), которое истинно, когда $x$ ложно и ложно, когда $x$ истинно.

 **Дизъюнкцией** (логической суммой) двух высказываний $x$ и $y$ называется новое высказывание $x$ ⋁$ y$ (читается «$x$ или $y$»), которое истинно только тогда, когда хотя бы одно из данных высказываний истинно.

 **Конъюнкцией** (логическим произведением) двух высказываний $x$ и $y$ называется новое

высказывание, обозначаемое $x$ ⋀$ y$ или $x$ &$ y$ (читается «$x$ и $y$»), которое истинно только тогда, когда оба высказывания $x$ и $y$ истинны.

 **Импликацией** двух высказываний $x$ и $y$ называется новое высказывание $x$ $\rightarrow $ $y$ (читается «если $x$, то $y$»), которое ложно тогда и только тогда, когда $x$ истинно, а $y$ ложно.

 **Эквивалентностью** двух высказываний $x$ и $y$ называется новое высказывание $x$ $\~$ $y$ ($x$ $≡$ $y$, $x$ $\leftrightarrow y$ ), которое истинно тогда и только тогда, когда $x$ и $y$ одновременно либо истинны либо одновременно ложны (читается «$x$ эквивалентно $y$»).

 Введённые операции можно проиллюстрировать с помощью таблицы истинности, которая содержит количество строк равное $2^{n}$, где **n** – число участвующих в операциях

переменных.

Таблица № 1

Пере Наборы переменных в таблице истинности располагаются в лексикографическом порядке, т.е. в порядке возрастания.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| $x$  | $$ y$$ | $$\overline{x}$$ | $x$ ⋁$ y$  | $x$ ⋀$ y$  | $x\rightarrow y$  | $ x \~ y$  |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |

1. **ФОРМУЛЫ И ФУНКЦИИ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ**

 **Формулой алгебры логики** называется всякое сложное высказывание, которое может быть получено из элементарных высказываний посредством применения логических операций и круглых скобок, регламентирующих порядок их выполнения; при этом сами элементарные высказывания, а также постоянные 0 и 1 тоже являются высказываниями (простейшими).

 Если скобок нет, то операции выполняются в следующем порядке: ⋀,⋁,$\rightarrow $,$\~$, $-$.

 Две формулы называются **равносильными**, если они принимают одинаковые значения на одних и тех же наборах входящих в них элементарных высказываниях.

 Функция f($x\_{1}$,$x\_{2}$,…,$x\_{n}$) от n переменных называется **булевой**, если она и каждая из её переменных могут принимать только одно из двух значений 1 или 0.

 Число булевых функций от **n** переменных равно $2^{2^{n}}$**.** Так функций одной переменной будет 4 (таблица № 2), а двух переменных - 16.

Таблица № 2

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| $$ x$$ | $f\_{1}$ = 0 | $f\_{2}$ = $x$ | $f\_{3}$ = $\overline{x}$ | $f\_{4}$ = 1 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
|  |  |  |  |  |

 В таблице №3 приведём наиболее важные функции двух переменных (из 16 возможных в ней представлено 7).

таблицa № 3

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| $x$ $y$ | $f\_{1}$=$ x$ ⋁$y$ | $f\_{2}$=$ x$ ⋀$ y$ | $f\_{3}$=$ x\rightarrow y$ | $f\_{4}$=$ x \~ y$ | $f\_{5}$=$ x⊕y$ | $f\_{6}$=$ x$ |$ y$ | $f\_{7}$=$ x$ $\downright y$ |
| 0 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |

$f\_{1}$ =$ x$ ⋁$ y$ – дизъюнкция («$x$ или $y$»),

$f\_{2}$ = $x$ ⋁ $y$ – дизъюнкция («$x$ и $y$»),

$f\_{3}$ = $x$ $\rightarrow $ $y$ – импликация («если $x$, то $y$»),

$f\_{4}$ = $x \~$ $y$ – эквивалентность («$x$ эквивалентно $y$»),

$f\_{5}$ = $\overline{x \~y}$ = $x$ $⊕$ $y$ – сложение по модулю два («или $x$, или $y$»),

$f\_{6}$= $\overline{x \bigwedge\_{}^{}y}$ = $x$ |$ y$ – штрих Шеффера («$x$ не совместимо с $y$»),

$f\_{7}$ = $\overline{x\bigvee\_{}^{}y}$ = $x$ $\downright $ $y$ – стрелка Пирса («ни $x$, ни $y$»).

Две булевы функции называются **равными**, если на всех одинаковых наборах значений переменных обе функции принимают одинаковые значения.

Пример 2. Рассмотрим две функции

 $f\_{1}$($x, y,$ $z$)= ($\overline{y }\downright $ $\overline{z }$) ⋁ $y$⋀ ($x$ $⊕$ $z$) и $f\_{2}$($x, y,$ $z$) = $y$ ⋀ ($ x⋁z$ )⋀($ x⋁y ⋁ \overline{z}$ ).

Построим для них таблицы истинности:

Таблица № 4

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| $ x$ $y$ $z$  | $$\overline{y}$$ | $$\overline{z}$$ | $\overline{y }\downright $ $\overline{z }$ | $x$ $⊕$ *z* | $$y⋀(x⊕z)$$ | $$f\_{1}$$ |
| 0 0 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 0 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 1 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 01 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 0 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 0 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 1 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 1 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |

Таблица №5

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| $x$ $y$ $z$  | $x $⋀ $z$ | $$\overline{z}$$ | $$x ⋁ y ⋁ \overline{z}$$ | $$f\_{2}$$ |
| 0 0 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 0 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 1 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 1 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 0 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 0 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 1 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 1 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |

Сравнивая таблицы истинности (последние столбцы), видим, что функции равны. Этот факт можно записать $f\_{1}$($x, y,$ $z$) = $f\_{2}$($x, y,$ $z$) или $f\_{1}$($x, y,$ $z$) $≡$ $f\_{2}$($x, y,$ $z$).

1. **НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ**

 **Функционально полной системой** называются такие наборы логических функций (операций), с помощью которых можно выразить любые другие логические функции.

 **Базисом** называетс**я** функционально полная система функций, которая становится неполной при удалении из неё любой функции**.**

Примеры функционально полных систем:

$\left\{⋀,⋁,-\right\}$, $\left\{⋀ ,\right.\left.-\right\}$, $\left\{⋁\right.,\left.-\right\}$, $\left\{|\right\}$, $\left\{\downright \right\}$, $\left\{\bigwedge\_{}^{}, ⊕,1\right\}$, $\left\{\rightarrow ,-\right\}$, $\left\{⋁,⊕,\~\right\}, \left\{\bigwedge\_{}^{}, \~, ⊕\right\}$,…

 Все системы, кроме первой, являются базисами. Избыточную функционально полную систему $\left\{\bigwedge\_{}^{},\bigvee\_{}^{},-\right\}$,называемую *стандартной*, используют чаще всего, т.к. любая логическая система, построенная на её основе, является наиболее простой.

 Формулы, содержащие кроме переменных и скобок только операции $\left\{\bigwedge\_{}^{}, \bigvee\_{}^{}, -\right\}$ называются **булевыми**. Так как система $\left\{\bigwedge\_{}^{},\bigvee\_{}^{}, -\right\}$ является функционально полной, то для любой логической функции переход к булевой формуле всегда возможен.

 *Способ перехода от табличного задания логической функции к булевой формуле*:

1. Для любого набора значений переменных $x\_{1}$, $x\_{2}$, …,$x\_{n }$, на которых функция f($x\_{1}$,$x\_{2}$, … ,$x\_{n}$) равна 1, выписываются конъюнкции всех переменных, над теми переменными, которые в этих наборах равны 0, ставится отрицание; все такие конъюнкции соединяются знаком дизъюнкции. Полученная таким образом формула называется **совершенной дизъюнктивной нормальной формой** (СДНФ) логической функции f($x\_{1}$,$x\_{2}$,… ,$x\_{n}$).

Для любой функции СДНФ *единственна* (с точностью до перестановок переменных или конъюнкций).

 В записи нормальных форм, как и в алгебраических выражениях, будем опускать знак логического умножения, то есть конъюнкции.

Пример 3.

Таблица № 6

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| $x$  | $$y$$ | $z$  | $$f\_{1}$$ | $$f\_{2}$$ |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |

Для функции $f\_{1}$, заданной таблицей № 6, руководствуясь правилом 1, запишем СДНФ:

$f\_{1}$($x$,$ y$,z) = $\overline{x}$ $\overline{y} \overline{z}$ ⋁ $\overline{x}$ $\overline{y}$ $z$ ⋁ $\overline{x}$ y$ \overline{z}$ ⋁ $ x$ $\overline{y} z$ ⋁ $x$ $y \overline{z}$ ⋁ $x y$ $z$ .

1. Если для каждого набора значений переменных $x\_{1}$, $x\_{2 }$,… ,$x\_{n}$, на котором функция f($x\_{1}$,$x\_{2}$, … ,$x\_{n}$) равна 0, выписать дизъюнкции всех переменных и над теми переменными, которые в этих наборах равны 1, поставить отрицание, а затем все такие дизъюнкции соединить знаком конъюнкции, то полученная таким образом формула называется **совершенной конъюнктивной нормальной формой** (СКНФ) логической функции

*f* ($x\_{1}$,$x\_{2}$, … ,$x\_{n}$).

 Пользуясь вторым правилом, получаем СКНФ для функции $f\_{1}$ , заданной таблицей №6:

$f\_{1}$= ($x$ ⋁ $\overline{y}$ ⋁ $\overline{z}$) ( $\overline{x}$ ⋁ $y$ ⋁ z).

СКНФ также как и СДНФ единственна. Так как совершенные нормальные формы единственны, то используя их можно установить, являются ли рассматриваемые функции равными.

5. **МИНИМИЗАЦИЯ БУЛЕВЫХ ФОРМУЛ**

 СДНФ и СКНФ булевых функций обеспечивают единственность представления функций, но они, как правило, неудобны для технической реализации, поскольку приводят к излишне громоздким и сложным логическим устройствам (схемам). Поэтому стараются получить более простые формы, минимизируя СДНФ и СКНФ (что можно сделать различными способами). Ограничимся рассмотрением лишь одного из них, а именно, графического, выполняемого с помощью карт Карно.

 **Картами Карно** называются определенные таблицы, в которые заносятся соответствующие значения логической функции. Для функций двух и трёх переменных их можно взять в следующем виде:

 Карта Карно для функции двух переменных Карта Карно для функции трёх переменных

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  $ z u$ $x$ $ y$  | 1 0 | 1 1 | 0 1 | 0 0 |
| 1 0 |  |  |  |  |
| 1 1 |  |  |  |  |
| 0 1 |  |  |  |  |
| 0 0 |  |  |  |  |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  $ z$ $x y$ | 1 | 0 |
| 1 0 |  |  |
| 1 1 |  |  |
| 0 1 |  |  |
| 0 0 |  |  |

 **Соседними** называются клетки не только расположенные рядом по горизонтали и вертикали, но и клетки, на противоположных границах карты Карно. Соседние единичные клетки можно склеивать, то есть объединять их по 2, по 4 , по 8 и т. д. При этом одна и та же клетка может входить в несколько групп.

 Отыскание МДНФ сводится к определению наиболее *рационального* варианта, при котором все единицы карт Карно данной функции накрываются *наименьшим* количеством коротких конъюнкций. При объединении двух соседних единичных клеток вместо двух конъюнкций получаем одну с числом переменных на единицу меньше; при объединении четырёх соседних клеток получается одна конъюнкция, содержащая на две переменных меньше. В полученной при склеивании соседних единичных клеток конъюнкции остаются лишь те переменные, которые принимают одно и то же значение на всех склеиваемых клетках.

 Пример 4.

1. Минимизация СДНФ.

 Заносим в клетки карты КАРНО значения функции $f\_{1}$ из таблицы № 6, затем соседние клетки, которые подлежат склеиванию, обводим.

Таблица № 7

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  $z$ $ x$ y | 1 | 0 |
| 1 0 | 1 | 0 |
| 0 1 | 1 | 1 |
| 0 1 | 0 | 1 |
| 0 0 | 1 | 1 |

В результате склеивания получаем минимальную дизъюнктивную нормальную форму (МДНФ): $f\_{1}$= $x$ $y$ ⋁ $\overline{y} $z ⋁ $\overline{x}$ $\overline{z}$.

 Если склеивание единичных клеток проводить согласно таблице № 6, то получим вторую МДНФ для рассматриваемой функции.

Таблица № 8

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  $z$ $ xy$ | 1 | 0 |
| 1 0 | 1 | 0 |
| 1 1 | 1 | 1 |
| 0 1 | 0 | 1 |
| 0 0 | 1 | 1 |

$f\_{1}$= $\overline{x}$ $\overline{y}$ ⋁ y $\overline{z}$ ⋁ $x$ $z$.

 Из данного примера видно, что минимальных нормальных форм для функции может быть несколько (в данном случае - две).

1. При отыскании МКНФ поступают аналогично, но склеиванию подлежат нулевые клетки.

Таблица № 9

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  $z$$ x $ $y$  | 1 | 0 |
| 1 0 | 1 | 0 |
| 1 1 | 1 | 1 |
| 0 1 | 0 | 1 |
| 0 0 | 1 | 1 |

 Из таблицы № 9 видно, что нулевые клетки не имеют соседних клеток. Поэтому СКНФ не допускает упрощения, то есть, она сама уже является минимальной формой (МКНФ).

МКНФ:

$f\_{1}$= ($x$ ⋁ $\overline{y}$ ⋁ $\overline{z}$) ( $\overline{x}$ ⋁ y ⋁ z).

Для функции $f\_{2}$провести минимизацию самостоятельно.

1. **РЕАЛИЗАЦИЯ ОСНОВНЫХ ЛОГИЧЕСКИХ ОПЕРАЦИЙ**

 Любая информация, представленная в двоичном коде, в цифровом дискретном устройстве представляется в виде набора 0 и 1. Пусть символу 0 соответствует, например, отсутствие тока в электрической цепи, а символу 1 – наличие тока. Такого рода сигнал легко формируется с помощью электрического последовательного ключа:

?

 A

y

5в

 Рис. 1.

 Когда переключатель А разомкнут, сигнал на выходе имеет значение 0, когда замкнут – значение 1.

 Используя различное соединение ключей можно получить схемы, которые называются **логическими** или переключательными, поскольку процесс их функционирования сводится к выполнению операций «или», «и» и «не», которые являются операциями алгебры высказываний. С помощью этих трёх простейших схем (дизъюнктора, конъюнктора, инвертора) можно образовывать сколь угодно сложные логические схемы (ЛС), соответствующие достаточно сложным логическим функциям.

 Согласно ГОСТу ЕСКД логические схемы обозначаются следующим образом:

Дизъюнктoр Конъюнктор Инвертор

 A

 A

 $\overline{A}$

 A

 B

 B

 A ⋁ B

 A & B

1

&

1

Это основные логические операции. Следует отметить, что дизъюнкторы и конъюнкторы могут иметь более двух входов. В некоторых устройствах иногда используются:

 Стрелка Пирса Штрих Шеффера

 A

1

 &

 B

 B

 A $\downright $ B

 A | B

1. **СИНТЕЗ ЛОГИЧЕСКОЙ СХЕМЫ**

 **Синтез** – это соединение разрозненных частей в единое целое.

Синтез ЛС - представляет собой проектирование этой схемы с целью реализации заданного закона её функционирования. Общей задачей такого синтеза является построение ЛС, реализующей заданные алгоритмы с помощью простых логических элементов.

 Методика синтеза логических схем

1. Формализация словесного задания схемы (сводится к выявлению набора переменных, на которых функция равна 1 и 0, разумеется, если задача задана корректно).
2. Составление таблицы истинности.
3. Стандартное каноническое описание функционирования схемы с помощью логических функций, т.е. запись в СДНФ (СКНФ).
4. Выбор базиса.
5. Минимизация логической функции.
6. Построение ЛС, соответствующей логической функции (построение ЛС по минимизированной логической функции включает в себя выполнение всех логических операций, указанных в выражении функции).
7. Проверка правильности работы ЛС (возможна частичная или полная проверка).

В зависимости от конкретной задачи некоторые этапы могут быть опущены.

Пример 5.

 Для функции $f\_{1}$, заданной таблицей № 6 и рассмотренной ранее, уже были найдены минимальные нормальные формы:

МДНФ:

$ f\_{1}$= $x$ $y$ ⋁ $\overline{y} $z ⋁ $\overline{x}$ $\overline{z}$.

МКНФ:

$f\_{1}$= ($x$ ⋁ $\overline{y}$ ⋁ $\overline{z}$) ( $\overline{x}$ ⋁ y ⋁ z).

 Строим по ним соответствующие схемы.

 $x$

 $y$

 z

 1

 $ f\_{1}$= $x$ $y$ ⋁ $\overline{y} $z ⋁ $\overline{x}$ $\overline{z}$

1

1

&

&

1

&

Рис. 2.

 $z$

 $y$

 $x$

1

 1

 1

1

 &

$f\_{1}$= ($x$ ⋁ $\overline{y}$ ⋁ $\overline{z}$) ( $\overline{x}$ ⋁ y ⋁ z)

1

Рис. 3.

При выполнении задания необходимо:

1. Для заданной функции составить таблицу истинности.
2. Записать СДНФ и СКНФ.
3. С помощью карт Карно минимизировать нормальные формы.
4. Построить логические схемы.

Пример 6.

 Для булевой функции *f(*$x$*,* $y$*,* $z$*, u*) =(( $\overline{y \rightarrow \overline{u}}\rightarrow x$) ⋀ ($y$ $\rightarrow $ ($z$ ⋁u)) в наборе $\left\{\bigwedge\_{}^{}, ⋁,-\right\}$ синтезировать логическую схему.

Решение

1. Ради удобства записи в таблице истинности обозначим

$A\_{1}$ = $\overline{u}$,

$A\_{2}$ = $y$ $\rightarrow \overline{u}$ = $y$ $\rightarrow A\_{1}$,

$А\_{3}$ = $\overline{y \rightarrow \overline{u}}$ = $\overline{A\_{2}}$,

$A\_{4}$ = ( $\overline{y \rightarrow \overline{u}}\rightarrow $ $x$) = $A\_{3}\rightarrow $ $x$,

$A\_{5}$ = $z$ ⋁ u,

$A\_{6}$ = $y$ $\rightarrow $ $z$ ⋁u = $y$ $\rightarrow A\_{5}$,

$f$ = $A\_{4}$ ⋀ $A\_{6}$.

Составляем таблицу истинности для функции *f(*$x$*,* $y$*,* $z$*, u*):

Таблица № 10

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| $$x$$ | $$y$$ | $$z$$ | u  | $$A\_{1}$$ | $$A\_{2}$$ | $$A\_{3}$$ | $$A\_{4}$$ | $$A\_{5}$$ | $$A\_{6}$$ | f |  |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |  |
|  0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |  |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |  |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |  |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |  |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |  0 |  |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |  |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |  |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |  |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |  |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |  |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |  |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |  |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |  |
| 1 |  1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |  |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

1. Из таблицы истинности легко получаем совершенные нормальные формы для нашей функции:

СДНФ:

 *f* = $\overline{x}$ $\overline{y}$ $\overline{z}$ $\overline{u}$ ⋁ $\overline{x}$ $\overline{y}$ $\overline{z}$ $u$ ⋁ $\overline{x}$ $\overline{y}$ $z$ $\overline{u}$ ⋁ $\overline{x}$ $\overline{y}$ $z$ $u$ ⋁ $\overline{x}$ $y$ $z \overline{u}$ ⋁ $x$ $\overline{y}$ $\overline{z}$ $\overline{u}$ ⋁ $x$ $\overline{y}$ $\overline{z}$ $u$ ⋁$x$ $\overline{y}$ $z$ $\overline{u}$ ⋁$x$ $\overline{y}$ $z$ $u$ ⋁ ⋁ $x$ $y \overline{z}$ $u$ ⋁ $x$ $y$ $z$ $\overline{u}$ ⋁$ x$ $y z u$;

СКНФ:

*f* = ($x$ ⋁ $\overline{y}$ ⋁$ z$ ⋁ $u$) ($x$ ⋁ $\overline{y}$ ⋁ z ⋁ $\overline{u}$ ) ($x$ ⋁ $\overline{y}$ ⋁ $\overline{z}$ ⋁ $\overline{u}$ ) ( $\overline{x}$ ⋁ $\overline{y}$ ⋁ z ⋁ $u$).

1. Минимизируем полученные совершенные нормальные формы с помощью карты Карно.

Таблица № 11

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  $z$ $u$ $x$ y | 1 0 | 1 1 | 0 1 | 0 0 |
| 1 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 0 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Склеивая единичные соседние клетки, как это показано в таблице № 11, получаем минимальную дизъюнктивную нормальную форму (МДНФ) функции:

*f* = $\overline{y}$ ⋁$z$ $\overline{u}$ ⋁$x u$.

Таблица № 12

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| $ z$ $u $ $ x y$ | 1 0 | 1 1 | 0 1 | 0 0 |
| 1 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 0 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Минимальная конъюктивная нормальная форма получается склеиванием (см. таб. № 11) соседних нулевых клеток:

*f* = (x ⋁ $\overline{y}$ ⋁ $\overline{u}$ ) ( $\overline{y}$ ⋁ z ⋁ u).

 Видим, что нормальные формы данной функции при минимизации существенно упростились.

1. Строим схему для МДНФ (рис. 9) схему для МКНФ (рис. 10).

 $u$

 z

 $y$

 $x$

1

 1

1

*f* = $\overline{y}$ ⋁$z$ $\overline{u}$ ⋁$x u$

&

&

Рис. 9.

 $x$

 $y$

 $u$

 z

1

1

1

 1

 &

 1

 *f* = (x ⋁ $\overline{y}$ ⋁ $\overline{u}$ ) ( $\overline{y}$ ⋁ z ⋁ u)

Рис. 10.

Расчётно-графическая работа

 Синтезировать логическую схему для заданной булевой функции *f* = *f* ($x$,$ y$,$ z$) в системе функций $\left\{\bigwedge\_{}^{},\bigvee\_{}^{},-\right\}$.

1. *f* ($x$,$ y$,$ z$) = $\overline{\left((y\rightarrow (\overline{x }\bigvee\_{}^{} \overline{z}\right))}$
2. *f* ($x$,$ y$,$ z$) = ($x$ ⋀$ y$ $\rightarrow z$ $\~ \overline{y }$)$⊕z$;
3. *f* ($x$,$ y$,$ z$) = $\overline{y ⋀ \overline{z}}\rightarrow \overline{x \~ y}$;
4. *f* ($x$,$ y$,$ z$) = $\overline{x\rightarrow y}$ ⋀ $x$⋁( $\overline{y}⊕z$);
5. *f* ($x$,$ y$,$ z$) = $\overline{x}$ $⊕$ ($y$⋁ ($z$ ⋀ ($ x⊕\overline{z}$)));
6. *f* ($x$,$ y$,$ z$) = ($\overline{x\rightarrow y}$ ⋁ $\overline{y}$ ) $⊕$ z;
7. *f* ($x$,$ y$,$ z$) = $\overline{z}\rightarrow \overline{\overline{x} | y}$;
8. *f* ($x$,$ y$,$ z$) = ($x$⋀$y$ $⊕$ z) $\rightarrow \overline{x}$;
9. *f* ($x$, $y$, z) = $\overline{x}\rightarrow \left(\left(z\right)\right)$;
10. *f* ($x$,$ y$,$ z$) = ($x\downright y$) $\~ z⊕$ $y$;
11. *f* ($x$,$ y$,$ z$) = $\left( y\right)$ ⋀ z ⋁ $\overline{x}$;
12. *f* ($x$,$ y$,$ z$) = ($x$ $\rightarrow $ $y$)⋀$\left( \overline{x}\right)\bigwedge\_{}^{}(y\rightarrow x)$;
13. *f* ($x$,$ y$,$ z$) = z ⋀ ($x$ $⊕$ y) ⋁ $\overline{x}$;
14. *f* ($x$,$ y$,$ z$) = ($x$ $\rightarrow $ z) ⋀ $\overline{x\downright y}$;
15. *f* ($x$,$ y$,$ z$) = $x$ $\~$ $y$ $⊕(z\bigvee\_{}^{}\overline{y}$);
16. *f* ($x$,$ y$,$ z$) = $\overline{y }\rightarrow ( \overline{x}\downright \overline{z}$);
17. *f* ($x$,$ y$,$ z$) = ($x$ $\downright $ $z$) $⊕$ ($z$ ⋁ $\overline{x}$);
18. *f* ($x$,$ y$,$ z$) = $\overline{\left(\overline{y} \~ z\right)\downright x}$;
19. *f* ($x$,$ y$,$ z$) = ($x$ ⋁ y)$ \rightarrow $ ($\overline{z}⊕$ y);
20. *f* ($x$,$ y$,$ z$) = $\overline{x \bigwedge\_{}^{}z}$ | $\overline{y \downright z}$;
21. *f* ($x$,$ y$,$ z$) = $\overline{\left( y \bigwedge\_{}^{}\overline{z}\right) \bigvee\_{}^{}\left( \overline{x} \bigwedge\_{}^{}z\right) }$ $\rightarrow $ ($x$ ⋀ $\overline{y}$);
22. *f* ($x$,$ y$,$ z$) = ( $\overline{x}$ ⋁ $y$) $\rightarrow $ (z ⋀ y);
23. *f* ($x$,$ y$,$ z$) = $\overline{\overline{y}\bigwedge\_{}^{} ( \overline{x} \~ z)}$;
24. *f* ($x$,$ y$,$ z$) = ($x$ ⋁$y$) $⊕\overline{z }\~$ $y$;
25. *f* ($x$,$ y$,$ z$) = $\left((\overline{x \bigwedge\_{}^{} z}\right)$;
26. *f* ($x$,$ y$,$ z$) = ($\left( y\right) \rightarrow (\overline{z}\bigwedge\_{}^{}y))⊕ x$;
27. *f* ($x$,$ y$,$ z$) = ( $\overline{y}\rightarrow $ $z$) | $\overline{x}$;
28. *f* ($x$,$ y$,$ z$) = $y$ $⊕$ ($x$ ⋁ ($y$ ⋀ $\overline{z}$));
29. *f* ($x$,$ y$,$ z$) =($ x$|($y$ ⋀ $z$)) ⋀ ($x$ $\rightarrow $ ( $\overline{y}\rightarrow $ $z$)) ⋀ ( $\overline{x}$ |($y\downright \overline{z}$);
30. *f* ($x$,$ y$,$ z$) = ($x$ $\downright y) ⋁ \overline{y\rightarrow z}$;
31. *f* ($x$,$ y$,$ z$) = $\overline{\left( y \~ z\right)\bigwedge\_{}^{}(y \rightarrow x)}$;
32. *f* ($x$,$ y$,$ z$) = ($x$ $\rightarrow $ $y$) $⊕$ $z$ $\~ \overline{y}$;
33. *f* ($x$,$ y$,$ z$) =(($ x$ $\downright $ $y$) $⊕z$) $\rightarrow x$;
34. *f* ($x$,$ y$,$ z$) = (($x$ $⋁y$) $⊕$ $z$) $\rightarrow y$;
35. *f* ($x$,$ y$,$ z$) = ($x$ $\rightarrow y$) ⋀ ($z$ $\rightarrow x);$
36. *f* ($x$,$ y$,$ z$) = ($x$ $⊕$ ($y$ $\downright $ $z$)) $⊕$ $y$;
37. *f* ($x$,$ y$,$ z$) = ($x$ $\~\overline{y}$) $\rightarrow $ ($x$ $\downright $ $z$);
38. *f* ($x$,$ y$,$ z$) = $y$ $⊕$ $z$ $\~$ ($x$ ⋁ ($z$ ⋀ $ x$));
39. *f* ($x$,$ y$,$ z$) = $\overline{x \rightarrow y}$ ⋁ $\overline{y }⊕$ $z$;
40. *f* ($x$,$ y$,$ z$) = ($x$ $\rightarrow \overline{y}$) $⊕$ ($z$ ⋁$ x$);
41. *f* ($x$,$ y$,$ z$) = ($x\~$ $y$) $\rightarrow $ ($y$ $\downright $ $z$);
42. *f* ($x$,$ y$,$ z$) = ($x$ ⋁ $\overline{y \rightarrow z}$) $⊕$ $y$;
43. *f* ($x$,$ y$,$ z$) = ($ x \~$ $z$) $\rightarrow (\overline{z}$ ⋀$y$);
44. *f* ($x$,$ y$,$ z$) = ($x$ $\downright $ $y$) ⋁ $\overline{x \rightarrow z}$;
45. *f* ($x$,$ y$,$ z$) = ($y$ $\~$ $z$) $\rightarrow $($ x\downright $ $y$);
46. *f* ($x$,$ y$,$ z$) = ($x$⋁$y$) $⊕$ ($z$ $\rightarrow \overline{y}$);
47. *f* ($x$,$ y$,$ z$) = $y$ $\rightarrow $ ($x$ $\downright \overline{z}$ );
48. *f* ($x$,$ y$,$ z$) = (($x$ ⋁$y$) $\rightarrow \overline{z} )⊕$ $y$;
49. *f* ($x$,$ y$,$ z$) = ($x$ $⊕\overline{z}$ ) ⋁ ($x$ $\downright $ $y$);
50. *f* ($x$,$ y$,$ z$) =($ x$ $\~$ $y$ $⊕$ $z$) ⋁ $\overline{y}$;
51. *f* ($x$,$ y$,$ z$) = $ x$ ⋀ ($z$ | $y$) ⋁ ($y$ $\downright $ $z$);
52. *f* ($x$,$ y$,$ z$) = $ x$ ⋁ ( $\overline{y\rightarrow z}⊕$ $y$);
53. *f* ($x$,$ y$,$ z$) = ($\overline{y \bigwedge\_{}^{} z }\downright $ $ x$) ⋁ ($y$ $\downright \overline{x}$);
54. *f* ($x$,$ y$,$ z$) = ($ x$ ⋁$y$) $⊕$ ($z$ $\rightarrow $ $y$);
55. *f* ($x$,$ y$,$ z$) =$ x$ ⋀ ($y$ $⊕z$) ⋁ $\overline{x}$ ⋀ ($\overline{y}⊕$ $z$);
56. *f* ($x$,$ y$,$ z$) = $ x $⋁ ($y⊕$ $z$ $\~$ $z$⋀$ x$);
57. *f* ($x$,$ y$,$ z$) = ($x$ ⋀ $y$ $\rightarrow $ $z$) ⋀ ($x$ ⋀ $z$ $\rightarrow y$) ⋀ ($y\downright z$ $\rightarrow $ $ x$);
58. *f* ($x$,$ y$,$ z$) = ($x$|$y$ ) $\rightarrow $ ( $\overline{z}$ ⋀ y $⊕ x$);
59. *f* ($x$,$ y$,$ z$) = ($x$⋁ ($y$ $⊕$ $z$)) $\rightarrow \overline{y}$;
60. *f* ($x$,$ y$,$ z$) = $\overline{x \rightarrow y}$ ⋁ ( $\overline{y}⊕$ $z$).

 Литература

1. Осипова В.А.

 Основы дискретной математики. М.: ФОРУМ - ИНФРА-М, 2006.

1. Москинова Г.И.

 Дискретная математика. М.: Логос, 2004.

1. Макоха А.Н., Сахнюк П.А., Червяков Н.И.

 Дискретная математика. М.:ФИЗМАТЛИТ, 2005.

Оглавление

1. Введение
2. Высказывания и логические переменные.
3. Основные логические операции над высказываниями
4. Формулы и функции алгебры логики
5. Нормальные формы
6. Минимизация булевых формул
7. Реализация основных логических операций
8. Синтез логической схемы
9. Варианты задания для расчётно-графической работы

Список литературы