Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение «Средняя общеобразовательная школа-интернат №2»

Элективный курс

Решение уравнений с параметрами для элементарных функций

Харитонова Наталья Евгеньевна учитель математики высшей категории

***Введение.***

МОУ Лыкошинская средняя школа-интернат №2 является общеобразовательным учреждением, реализующим программу среднего (полного) общего образования. Школа находится в селе Лыкошино Бологовского района Тверской области.

В настоящее время в России идёт становление новой системы образования, ориентированного на вхождение в мировое образовательное пространство. Происходит смена образовательной парадигмы: предлагаются иное содержание, иные подходы, иное право, иные отношения, иное поведение, иной педагогический менталитет. Основные задачи модернизации российского образования - повышение его доступности, качества и эффективности. Это предполагает не только масштабные структурные, организационно-экономические изменения, но в первую очередь - значительное обновление содержания образования. Главным условием решения этой задачи является введение государственного стандарта общего образования. Назначением государственного стандарта общего образования является обеспечение равных возможностей для всех в получении качественного образования, защиты обучающихся от перегрузок и сохранение их психического и физического здоровья, преемственность образовательных программ на разных ступенях общего образования, возможности получения профессионального образования. Среди основных направлений модернизации общего образования выделяются личностная ориентация содержания образования, соответствие содержания образования возрастным закономерностям развития учащихся, устранение перегрузок, подрывающих физическое и психическое здоровье, введение профильного обучения на старшей ступени школы, формирование готовности учащихся использовать усвоенные знания, умения и способы деятельности в реальной жизни для решения практических задач. Задача учителя современной школы - умение синтезировать достижения психолого-педагогической науки и практики, сочетать традиционные элементы прошлого опыта и того, что рождено общественным прогрессом, гуманизацией и демократизацией общества. И если учитель - творческая личность, настоящий профессионал своего дела, то он в постоянном поиске новых идей. Задача педагога в условиях современной школы – простроить систему преподавания, формирующую и укрепляющую психическое здоровье учащихся, дающую возможность творческого развития личности.

В условиях сельской школы, где в старших классах нет параллелей, сложно перейти на профильное обучение. Выбор одного профиля обучения делает невозможным реализацию каждым учеником своих возможностей и потребностей в образовательных услугах. Новая форма сдачи выпускных экзаменов в 9 и 11 классах требует совершенно нового подхода к обучению. В КИМы включены задания выходящие за рамки базового уровня математической подготовки. Где ученику найти материал выходящий за рамки программы, как разобраться в нём? Разрешить эту проблему можно с помощью изучения элективного курса.

**Цель деятельности**: разработать программу элективного курса, который поможет подготовить учащегося не только к успешной сдаче экзаменов, но и к успешному обучению в других учебных заведениях, поможет ответить на вопросы: «Могу ли я, хочу ли я учить это, заниматься этим?»

Программа элективного курса построена так, что может успешно использоваться как полный курс, а может усиливать отдельные темы программного материала на уроках алгебры в 8, 9, 10 и 11 классах.

***Пояснительная записка.***

«Задачи с параметрами» - одна из важных и трудных тем школьного курса математики, это связано с тем, что:

* решение таких задач требует не только знаний свойств функций, умения решать уравнения и неравенства, умения выполнять алгебраические преобразования, но также высокой логической культуры и хорошей техники исследования;
* в действующих учебниках математики нет теоретических сведений и систематизированного набора задач с параметрами.

Без данного раздела ученики не смогут успешно сдать выпускные экзамены за курс полной средней школы.

***Цель*** курса: создание целостного представления о теме и расширение спектра задач, посильных для учащихся.

***Задачи***:

* обобщение, систематизация и углубление знаний по теме «Задачи с параметрами»;
* развитие познавательных интересов и творческих способностей учащихся;
* предоставление учащимся возможностей проанализировать свои способности к математической деятельности.

***Формы и методы*** работы должны располагать к самостоятельному поиску и повышать интерес к изучению предмета, развивать интуицию, без которой немыслимо творчество.

Организация занятий несколько отличается от урочной: ученику необходимо давать время на размышление, учить рассуждать, выдвигать гипотезы.

В курсе заложена возможность дифференциации. При решении ряда задач необходимо рассмотреть несколько способов, что позволит усилить развивающую функцию задач и дифференцировать работу.

Планируемые ***результаты***:

* задачи с параметрами расширят и углубят базовые разделы «Уравнения », обеспечат усвоение важного средства математического моделирования практических задач;
* в результате изучения курса учащиеся приобретут уверенность в решении уравнений с параметрами;
* этот курс поможет ученику проверить себя и ответить на вопросы: «Могу ли я, хочу ли я учить это, заниматься этим?».

***Содержание.***

Предлагаемый курс является развитием системы ранее приобретённых программных знаний. Программа содержит 6 тем, которые связаны единой идеей. Учитель может использовать все темы в рамках дополнительных занятий или любую из них на уроках алгебры для дифференцированной работы со способными учащимися.

Первое занятие углубляет и систематизирует ранее изученные знания и несколько расширяет теоретический материал по теме «Линейная функция. Линейные уравнения». Решаются задачи с параметрами на логической основе.

Второе и третье занятия посвящены обобщению и систематизации знаний и умений по теме «Квадратичная функция в уравнениях с параметрами».

Четвёртое занятие посвящено задачам с параметрами по теме «Модуль в уравнениях с параметрами». Пятое и шестое занятия рассматривают логические приёмы и графический метод решения дробно-рациональных уравнений. Седьмое и восьмое занятия – способы решения уравнений с параметрами, содержащих квадратный корень. Последнее занятие предполагает обобщение по всем темам курса.

Программа рассчитана на 9 часов. Полный элективный курс может изучаться с 9 класса. Отдельные темы курса можно использовать на уроках в 8 классе для работы с одарёнными детьми. Естественная логика построения материала курса «от простого к сложному» позволит учителю успешно дифференцировать работу с учениками различного уровня подготовки.

***Учебно-тематическое планирование.***

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № | Наименование тем курса | Всего часов | В том числе | | | Форма контроля |
| лекция | практика | Семинар |
| 1 | Основные понятия. Линейная функция в уравнениях с параметрами | 1 | 0,25 | 0,25 |  | С.р. (20 мин.) |
| 2 | Квадратичная функция в уравнениях с параметрами | 2 | 1 | 1 |  | Дом. С.р. |
| 3. | Модуль в уравнениях с параметрами | 1 | 0,5 | 0,5 |  | Составление конспекта |
| 4 | Решение дробно-рациональных уравнений с параметрами | 2 | 1 | 0,5 |  | С.р. (30 мин.) |
| 5 | Квадратный корень в уравнениях с параметрами | 1 | 0,5 | 0,5 |  | Дом. С.р. |
| 6 | Иррациональные уравнения с параметрами | 1 | 0,5 | 0,5 |  | Составление конспекта |
| 7 | Урок-семинар | 1 |  |  | 1 | реферат |

***Занятие №1. Основные понятия. Линейная функция в уравнениях с параметрами.***

В уравнении F(x; y)=0 c двумя переменными x и y фиксированному значению соответствует частное уравнение  c переменной y. Если  - все решения частного уравнения , то - все решения уравнения F(x; y)=0 с первой координатой, равной . Изменяя значения  и решая соответствующие частные уравнения , получим другие решения исходного уравнения

F(x; y) =0. 

Поставим следующую задачу: для каждого значения  решить соответствующее частное уравнение  c переменной y. При такой постановке переменная x называется параметром, совокупность всех частных уравнений представлена в общей форме F(a; y)=0, где a – произвольное фиксированное значение переменной x.

Ясно, что переход от уравнения F(x; y)=0 к уравнению F(a; y)=0 есть способ указания всех решений в зависимости от значений первых координат. Аналогично поиск всех решений уравнения F(x; y)=0 в зависимости от фиксированных значений вторых координат приводит к уравнению

F(x; b) =0 с параметром b и переменной x.

В уравнении F(a; x)=0 частные уравнения могут быть определены не для всех значений параметра. Например, в уравнении частные уравнения не определены для . В общем случае область допустимых значений параметра уравнения F(a; x)=0 есть множество всех значений параметра, для которых частные уравнения определены. В уравнении с параметром возможны ограничения, как на множество значений параметра, так и на множество значений переменной. В качестве примера опять приведём уравнение, где для допустимого значения параметра  область определения частного уравнения имеет вид . В связи с этим, имеет смысл говорить об области определения уравнения F(a; x)=0, как о множестве всех упорядоченных пар , где  принадлежит области допустимых значений параметра, а x принадлежит области определения соответствующего частного уравнения .

Итак, уравнение F(a; x)=0 есть бесконечная совокупность частных уравнений  для допустимых значений параметра . Его решение осуществляется в два этапа:

1. *разбиение совокупности всех частных уравнений на непересекающиеся типы;*
2. *поиск общих решений частных уравнений каждого типа.*

В процессе разбиения частных уравнений выделяются:

*• совокупность особых частных уравнений типа - все ложные числовые равенства;*

*• совокупность особых частных уравнений типа  - все истинные числовые равенства;*

*• тип неособых частных уравнений, не имеющих решений;*

*• типы (один или несколько) частных уравнений, с одинаковыми общими решениями.*

***Линейная функция в уравнениях с параметрами.***

**Определение.** Уравнение  называется линейным, если коэффициент .

* Оно имеет единственное решение  при .
* Если оба коэффициента равны нулю( ), то уравнение превращается в тождество , и решениями его являются все действительные числа.
* Если , тогда уравнение превращается в неверное равенство b=0 и оно не имеет решений.

**Пример №1.** Решить при всех a уравнение .

Решение.

Вычитая из обеих частей уравнения x-1, получим ax-x=1. Вынесем за скобку x: (a-1)x=1.

В зависимости от значений параметра a возможны два случая:

1) a=1. В этом случае уравнение превращается в неверное равенство:  и оно не имеет решений.

1) . Уравнение имеет единственное решение .

**Ответ:** при a=1 уравнение не имеет корней,

при  .

**Пример №2.** Решить при всех a уравнение .

Решение.

Преобразуем уравнение к более удобному виду. Вычитая из обеих частей , получим . Вынесем за скобку x и 2 и запишем результат .

В зависимости от значений параметра a возможны два случая:

1) a=1. В этом случае уравнение превращается в тождество , и решениями его являются все действительные числа.

2) . Уравнение имеет единственное решение  или x=-2.

**Ответ:** при a=1 x- все действительные числа;

при  x=-2.

**Пример №3.** Решить при всех p:

Решение.

Преобразуем уравнение к более удобному виду и запишем результат: Вынесем за скобки x и поменяем знаки обеих частей уравнения: 

По формуле разности квадратов преобразуем выражение в скобке в левой части: 

В зависимости от значений параметра p возможны три случая:

1) p=1. В этом случае уравнение превращается в тождество , и решениями его являются все действительные числа.

2) p=-1. В этом случае уравнение превращается в неверное равенство:  и оно не имеет решений.

3)  и . Уравнение имеет единственное решение .

**Ответ:** при p=1 x- все действительные числа;

при p=-1 уравнение не имеет решений;

при  и  .

**Пример №4.** Найдите все a, при которых уравнение  имеет ровно одно решение.

Решение.

Преобразуем уравнение к более удобному виду и запишем результат: . Вычтем из обеих частей уравнения , тогда . Вынесем в левой части уравнения за скобку ax, а в правой части 3 получим:.

В зависимости от значений параметра a возможны три случая:

1) a=1. В этом случае уравнение превращается в тождество , и решениями его являются все действительные числа.

2) a=0. В этом случае уравнение превращается в неверное равенство:  и оно не имеет решений.

3)  и . Уравнение имеет единственное решение .

**Ответ:** при a=1 x- все действительные числа;

при a=0 уравнение не имеет решений;

при  и  .

***Задания для самопроверки.***

№1.

При каких значениях параметра **a** уравнение  имеет нулевое решение?

№2.

При каких значениях параметра р уравнение  имеет бесконечно много решений?

№3.

При каких значениях параметра p уравнение  имеет одно положительное решение?

№4.

При каких значениях параметра p уравнение  не имеет решений?

***Занятие №2***. ***Квадратичная функция в уравнениях с параметрами.***

***Уравнение  называется квадратным, если коэффициент .***

* Если дискриминант , то решения уравнения находятся по формулам

.

* Если дискриминант 0, то уравнение имеет два различных корня.
* Если дискриминант D=0, то уравнение имеет одно решение ( корень является кратным)
* Если дискриминант  - уравнение не имеет действительных корней.

**Формулы для решения приведённого квадратного уравнения .**

**Решения существуют, если .**

**Пример №1.** Решить при всех a: 

Решение.

Квадратное уравнение имеет вид приведённого. Исследуем его на существование решения. Удобно находить одну четвёртую часть дискриминанта . В зависимости от значений параметра a возможны три случая:

Случай 1.   и уравнение не имеет действительных корней.

Случай 2.   и уравнение имеет ровно одно решение (корень является кратным) .

Случай 3.   и уравнение имеет два различных корня .

Ответ: при  уравнение не имеет действительных корней;

при  ;

при  .

**Пример №2.** Решить при всех b : .

Решение.

Вычислим для данного квадратного уравнения одну четвёртую часть дискриминанта . Так как квадрат действительного числа всегда является неотрицательным числом, то дискриминант будет положительным при произвольных значениях параметра b. Следовательно, уравнение всегда имеет два различных корня. Найдём их по формулам решения приведённого квадратного уравнения: .

Ответ: при любых b .

**Пример №3.** Решить при всех a: .

Решение.

В зависимости от значений параметра a получаем разного вида уравнения. Если a=0, то уравнение становится линейным. Если , то уравнение будет квадратным. В этом случае количество решений зависит от значения дискриминанта . Дискриминант принимает нулевое значение при a=-0,25. В зависимости от значений параметра a нужно разобрать пять возможных случаев.

1) . При этом  и уравнение не имеет действительных корней.

2) a=-0,25. При этом D=0 и уравнение имеет одно решение .

3) . При этом 0 и уравнение имеет два различных корня .

4) a=0. При этом уравнение становится линейным вида 2x-4=0. Откуда x=2.

5) . При этом 0

и уравнение имеет два различных корня .

Ответ: при  корней нет;

при a=-0,25 x=-16;

при a=0 x=2;

при  и  .

**Пример №4.** При каких значениях параметра a существует только одна общая точка для графиков функций  и ?

Решение.

Условие задачи означает, что уравнение  имеет один корень.

1) . , тогда .

Итак, при  существует единственный корень, т.е. при  существует только одна общая точка (-3;12)

2) .

Ответ: при  существует только одна общая точка для графиков функций  и .

**Пример№5.** Найдите все значения a, для которых при каждом x из промежутка  значение выражения  не равно значению .

Решение.

1. Значения указанных в задаче выражений не равны друг другу тогда и только тогда, когда выполнено условие:

, где  и .

Следовательно, в задаче требуется, чтобы уравнение не имело корней на промежутке .

2) График функции  (относительно переменной ) есть парабола, ветви которой направлены вверх, а точка пересечения с осью ординат лежит ниже оси абсцисс ( так как f(0)=-2). Поэтому квадратный трёхчлен f(t) имеет два корня  и . Если , то , а если , то , поэтому уравнение имеет корень на промежутке  тогда и только тогда, когда .



3) Решим полученную систему: . Итак, уравнение  не имеет корней на промежутке  для всех остальных значений a, т.е. тогда и только тогда, когда  или .

Ответ: , .

***Задания для самопроверки.***

1. Решить при всех a: .
2. Решить при всех a: .
3. Решить при всех a: .

***Занятие №3. Теорема Виета в уравнениях с параметрами.***

**Пусть  - корни приведённого квадратного уравнения**

**, тогда**

****

**Замечание.** Указанные формулы не обеспечивают существования корней квадратного уравнения!

Необходимо проверить **существование корней**, например так : .

.

**Выражения с корнями квадратного уравнения.**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Исходное  выражение | Действия с выражениями | Результат  подстановки  соотношений  Виета |
|  |  |  |
|  |  | **=** |
|  |  | **=** |
|  |  | **=** |
|  |  | **=** |
|  |  | **=** |
|  |  | **=** |

**Пример №1.** Найти все значения параметра a, при которых квадратное уравнение  имеет два корня различных знаков.

**Решение.**

Обозначим корни уравнения символами  и . Условие задачи можно записать неравенством 0. Используем соотношения теоремы Виета:

.

Требуется найти все значения a, при которых , то есть . Отметим, что условие  обеспечивает наличие двух различных корней квадратного уравнения , поскольку в этом случае дискриминант заведомо положителен: .

Ответ: при .

**Пример №2.** При каких значениях параметра a один из корней уравнения

 вдвое больше другого корня?

Решение.

Заметим, что подстановка x=0 в уравнение не превращает его в верное числовое равенство: x=0 влечёт , что невозможно. Поэтому, если обозначить  и  корни уравнения, то условие задачи можно записать в виде , что равносильно условию . Тогда **.**

Воспользовавшись преобразованием

**** и заменив, согласно теореме Виета,

 получаем уравнение для отыскания значений параметра:

. Решим его: . Следовательно, . Помня о том, что использование соотношений Виета ещё не гарантирует наличие корней, проверим для полученных a условие неотрицательности дискриминанта , следовательно, .

Из последнего неравенства следует, что оба значения удовлетворяют условию задачи.

Ответ: при .

**Пример №3.** Определить, при каких значениях параметра a расстояние между корнями уравнения  не превосходит двух.

Решение.

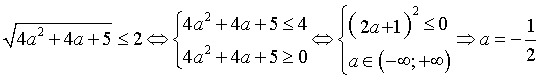
Запишем условие задачи неравенством |x1 – x2| ≤ 2, где x1 и x2 — корни уравнения. Выполним преобразование

3-3-1.

Коэффициенты p и q имеют вид: p = 2a + 3, q = 2a + 1. Решим неравенство |x1 – x2| ≤ 2, то есть неравенство

3-3-2.

Получаем

.

Существование корней уравнения при 3-3-5 обеспечивает уже наложенное выше условие:

D = p2 – 4q ≥ 0 3-3-44a2 + 4a + 5 ≤ 0 3-3-4a — любое.

[Ответ:](javascript:hide8()) при

3-3-5.

**Пример №4.**

При каких значениях параметра а отношение корней уравнения

5x2 – 5ax + a 2 + 1 = 0 является натуральным числом?

**Решение**

Перепишем заданное уравнение в приведенном виде:

3-4-1,

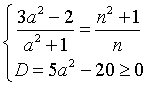
обозначим корни уравнения символами  x1 и x2 и воспользуемся преобразованием:

3-4-2.

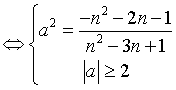
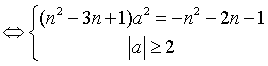
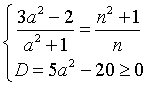
По условию должно выполняться равенство

3-4-4.

Тогда остается решить систему условий:

.

Второе неравенство в этой системе выражает неотрицательность дискриминанта квадратного уравнения и обеспечивает существование его корней. Решим эту систему:

.

Первое уравнение этой системы влечет неравенство n2 –3n + 1 < 0, то есть, n = 1, 2. Перебор этих двух значений показывает, что неравенство |a| ≥ 2 для них выполняется , и тогда a =  ± 2, ± 3.

[Ответ:](javascript:hide8()) при a =  ± 2, ± 3.

**Задания для самопроверки.**

1. Определить, при каких значениях параметра a расстояние между корнями квадратного уравнения  не превосходит двух.
2. При каких положительных значениях параметра a один из корней уравнения  вдвое больше другого корня?
3. При каких неположительных значениях параметра a один из корней уравнения  вдвое больше другого его корня?
4. Найти наименьшее целое значение параметра a, при котором квадратное уравнение  имеет два корня различных знаков.

**Занятие №4. Модуль в уравнениях с параметрами**.

**Модуль  числа x равен:**

**=x, если **

** = x, если **

**Модуль  всегда неотрицательное число.**

Уравнение  имеет решения только при :

при  есть только одно решение: ;

при  есть два решения: .

**Пример 1**

Решить при всех a: |x – 1| = 2x + a.

Решение

В зависимости от знака выражения x – 1 рассмотрим два случая.

[Случай 1:](javascript:hide1()) x – 1 ≥ 0.

Тогда 

[Случай 2:](javascript:hide2()) x – 1 < 0.

Тогда .

Ответ: .

**Пример 2**

Решить при всех b: |x + b| = x – 2.

Решение

Так как в правой части уравнения параметра нет, то удобно разобрать два случая в зависимости от знака правой части x – 2.

[Случай 1:](javascript:hide1()) x – 2 < 0.

В этом случае уравнение не имеет решений.

[Случай 2:](javascript:hide2()) x – 2 ≥ 0.

Тогда . Откуда при ;.

Или . Откуда при .

Ответ: при ; ,

при .

**Пример №3.** Решить уравнение  для всех значений параметра a.

Решение.



1) Пусть , тогда 

Если , то .

Если , то .

Если , то .

Следовательно,  является общим решением уравнения при .

1. Пусть  , тогда



Если , то .

Если , то .

Если , то .

Следовательно,  является общим решением уравнения при .

Графическая модель решения.

—————o o—————————————— 

——————————o o—————————— 

——————|—————|————|——————————>

-1 1 3

Выделим все типы решений:

1) при  , ;

2) при  ;

3) при  ;

4) при  , .

Ответ: при  ;

при  ;

при  , .

**Задания для самопроверки.**

1. Решить при всех a: .
2. Решить при всех p: .
3. Решить при всех a: .
4. Найти все a, при которых уравнение .

**Занятие №5 и №6**. **Решение дробно-рациональных уравнений с параметрами.**

**Пример 1.**

Решить при всех a: *5-1_clip_image002*.

Решение

Так как знаменатель в дроби *5-1_clip_image002_0000* не может принимать нулевых значений, то получаем ограничение  *5-1_clip_image004*или *5-1_clip_image006*. Умножая обе части уравнения на *5-1_clip_image008*, находим *5-1_clip_image010* Вычитая из обеих частей уравнения *5-1_clip_image012*, получим *5-1_clip_image014* Так как *5-1_clip_image006_0000*, то *5-1_clip_image016*, значит, *5-1_clip_image018*.

**Пример 2.**

Решить при всех b: *5-2_clip_image002*.

Решение

Знаменатели в дробях 5-2_clip_image002_0000, 5-2_clip_image004не могут обращаться в нуль, поэтому запишем ограничения 5-2_clip_image006и 5-2_clip_image008, или 5-2_clip_image010 и 5-2_clip_image012.  
Умножая обе части уравнения на общий знаменатель 5-2_clip_image014, получим 5-2_clip_image016  
Раскрывая скобки и сокращая, получим 5-2_clip_image018Вынесем за скобку x:5-2_clip_image020.

В зависимости от значений параметра b возможны два случая.

[Случай 1:](javascript:hide1()) b + 1 = 0.

[Случай 2:](javascript:hide2()) b + 1 ≠ 0.

**Пример 3 .**

Решить при всех p  *5-3_clip_image002*.

Решение

Так как знаменатель в дроби 5-3_clip_image002_0000 не может принимать нулевых значений, то получаем ограничение  5-3_clip_image004, значит, 5-3_clip_image006. Умножая обе части уравнения на 5-3_clip_image008, находим 5-3_clip_image010Раскрывая скобки, запишем квадратное уравнение 5-3_clip_image012  
Вычислим одну четвертую часть дискриминанта уравнения 5-3_clip_image014.

В зависимости от значений параметра p возможны три случая:

[Случай 1:](javascript:hide1()) p > 1.

[Случай 2:](javascript:hide2()) p = 1.

[Случай 3:](javascript:hide3()) .

**Пример 4.**

Решить при всех a: *5-4_clip_image002*.

Решение

Знаменатели в дробях 5-4_clip_image002_0000,5-4_clip_image004не могут обращаться в нуль, поэтому запишем ограничения  5-4_clip_image006и 5-4_clip_image008, или 5-4_clip_image010 и 5-4_clip_image012. Умножая обе части уравнения на общий знаменатель 5-4_clip_image014, получим5-4_clip_image016 Применяя формулу для разности квадратов 5-4_clip_image018 и раскрывая скобки, получим квадратное уравнение 5-4_clip_image020Вычислим одну четвертую часть дискриминанта уравнения 5-4_clip_image022.

В зависимости от значений параметра a возможны три случая.

[Случай 1:](javascript:hide1()) a > 2.

[Случай 2:](javascript:hide2()) a = 2.

[Случай 3:](javascript:hide3()) a < 2.

Пример 4

Решить при всех a: *5-4_clip_image002*.

Решение

Знаменатели в дробях 5-4_clip_image002_0000,5-4_clip_image004не могут обращаться в нуль, поэтому запишем ограничения  5-4_clip_image006и 5-4_clip_image008, или 5-4_clip_image010 и 5-4_clip_image012. Умножая обе части уравнения на общий знаменатель 5-4_clip_image014, получим5-4_clip_image016 Применяя формулу для разности квадратов 5-4_clip_image018 и раскрывая скобки, получим квадратное уравнение 5-4_clip_image020Вычислим одну четвертую часть дискриминанта уравнения 5-4_clip_image022.

В зависимости от значений параметра a возможны три случая.

[Случай 1:](javascript:hide1()) a > 2.

[Случай 2:](javascript:hide2()) a = 2.

[Случай 3:](javascript:hide3()) a < 2.

**Задания для самопроверки.**

1. Решить уравнение  при всех a.
2. Решить уравнение  при всех p.
3. Решить уравнение  при всех a.
4. Решить уравнение  при всех a.

**Занятие №7. Квадратный корень в уравнениях с параметрами.**

**Функция определена при  и принимает**

**неотрицательные значения.**

В зависимости от параметра уравнение :

• при  не имеет решений;

•при  имеет единственное решение .

**Пример 1.**

Решить при всех a: 6-1_clip_image002.

Решение

Так как левая часть уравнения неотрицательная 6-1_clip_image002_0000, уравнение имеет решения только при 6-1_clip_image004. Возведем в квадрат обе части уравнения 6-1_clip_image006. Решениями исходной задачи будут корни уравнения 6-1_clip_image006_0000, удовлетворяющие неравенству 6-1_clip_image004_0000.  
Раскроем скобку в правой части уравнения 6-1_clip_image008и перенесем все слагаемые в левую часть 6-1_clip_image010. Умножая обе части уравнения на –1 и складывая коэффициенты при x, получим приведенное квадратное уравнение 6-1_clip_image012. Вычислим дискриминант уравнения 6-1_clip_image014. Дискриминант обращается в нуль при 6-1_clip_image016.

В зависимости от значений параметра a возможны три случая.

[Случай 1:](javascript:hide1()) 6-1_clip_image002_0001.

[Случай 2:](javascript:hide2()) 6-1_clip_image002_0002.

[Случай 3:](javascript:hide3()) 6-1_clip_image002_0003.

**Пример 2.**

Решить при всех b:  6-2_clip_image002.

Решение

Правая часть уравнения неотрицательная (6-2_clip_image002_0000), значит, 6-2_clip_image004.  
Возведем в квадрат обе части уравнения 6-2_clip_image006.  
Вычтем из обеих частей уравнения 6-2_clip_image008 и сократим подобные члены: 6-2_clip_image010.

[Случай 1:](javascript:hide1()) b = 0.

[Случай 2:](javascript:hide2()) b ≠ 0.

**Пример 3**.

Найти все q, при которых уравнение6-3_clip_image002 имеет ровно два различных корня.

Решение

Добавляя к обеим частям уравнения x + 2, запишем6-3_clip_image004. Правая часть уравнения неотрицательная6-3_clip_image006, поэтому x + 2 ≥ 0. Возведем в квадрат обе части уравнения, перенесем все члены уравнения в левую часть и умножим их –1, получим 2x2 + 4x + 4 – q =0.

Вычислим дискриминант квадратного уравнения D/4 = –4 – 2q. Так как по условию задачи уравнение должно иметь два решения, то дискриминант должен быть положительным, значит, –4 – 2q > 0 или q < –2. Тогда квадратное уравнение имеет два решения: Eqn7. Учитывая неравенство x1 > x2, остается проверить выполнение ограничения x + 2 ≥ 0 для x = x2. Имеем Eqn8, после возведения в квадрат и преобразований получим q > –4. Вспоминая ограничение на дискриминант, получим –4 < q < –2.

Ответ: при –4 < q < –2.

**Пример 4**.

Найти все a, при которых уравнение6-4_clip_image002 имеет ровно одно решение.

Решение

Введем новую переменную 6-4_clip_image002_0000. Тогда 6-4_clip_image004или 6-4_clip_image006. Отметим, что 6-4_clip_image008.   
Производя замену переменной в уравнении, получим 6-4_clip_image010или 6-4_clip_image012.

Переформулируем задачу:   
Нужно найти все  a, при которых уравнение 6-4_clip_image012_0000 имеет ровно одно неотрицательное решение.

Вычислим дискриминант квадратного уравнения 6-4_clip_image014.

В зависимости от значений параметра a возможны три случая.

[Случай 1:](javascript:hide1()) 6-4_clip_image002_0001.

[Случай 2:](javascript:hide2()) *6-4_clip_image002_0002*.

[Случай 3:](javascript:hide3()) *6-4_clip_image002_0003*.

**Задания для самопроверки.**

1. Найти все a, при которых уравнение  имеет ровно два различных корня..
2. Найти все q, при которых уравнение  имеет ровно два различных корня..
3. Найти все a, при которых уравнение  имеет ровно два различных корня..
4. Найти все a, при которых уравнение  имеет ровно одно решение.

**Занятие №8. Иррациональные уравнения с параметрами.**

**Область определения и область значений функции  зависят от**

**чётности натурального числа n.**

1. Если число n чётное, т.е. n=2k, где k – натуральное число, то функция  определена при  и принимает неотрицательные значения.

Уравнение 

• при a<0 не имеет решений;

• при  имеет единственное решение .

1. Если число n – нечётное, т.е. n=2k+1, то функция  определена на всей вещественной прямой и принимает все вещественные значения.

Уравнение  всегда имеет единственное решение .

**Пример 1.**

Решить при всех a: 7-1_clip_image002.

Решение

Возведем обе части уравнения в третью степень: *7-1_clip_image002_0000* Вычитая из обеих частей уравнения единицу, получим *7-1_clip_image004*

В зависимости от значений параметра a возможны два случая.

[Случай 1:](javascript:hide1()) a = 0.

[Случай 2:](javascript:hide2()) a ≠ 0.

**Пример 2.**

Решить при всех a: *7-2_clip_image002*.

Решение

Так как левая часть уравнения неотрицательная*7-2_clip_image002_0000*, то уравнение имеет решения только при *7-2_clip_image004*. Возведем обе части уравнения в четвертую степень: *7-2_clip_image006*.  
Следовательно, решениям исходной задачи будут неотрицательные корни уравнения *7-2_clip_image006_0000*. Вычитая из обеих частей уравнения *7-2_clip_image008*, получим *7-2_clip_image010*.

В зависимости от значений параметра a возможны два случая.

[Случай 1:](javascript:hide1()) 7-2_clip_image002_0001.

[Случай 2:](javascript:hide2()) *7-2_clip_image002_0002*.

**Пример 3.**

Решить при всех p: *7-3_clip_image002*.

Решение

Вынесем –1 из кубического корня *7-3_clip_image002_0000*и положим *7-3_clip_image004*, тогда *7-3_clip_image006*. Производя замену переменной в уравнении, получим *7-3_clip_image008*. Вынесем t за скобки: *7-3_clip_image010*. Следовательно, находим первое решение: *7-3_clip_image012*. Остальные решения являются корнями уравнения *7-3_clip_image014*.

В зависимости от значений параметра p возможны три случая.

[Случай 1:](javascript:hide1()) 7-3_clip_image002_0001.

[Случай 2:](javascript:hide2()) 7-3_clip_image002_0002.

[Случай 3:](javascript:hide3()) 7-3_clip_image002_0003.

**Пример 4.**

Найти все a, при которых уравнение *7-4_clip_image002* имеет ровно одно решение.

Решение

Так как левая часть уравнения неотрицательная *7-4_clip_image002_0000*, то решениями уравнения являются неотрицательные *7-4_clip_image004*. Возведем обе части уравнения в четвертую степень: *7-4_clip_image006*.  
Положим *7-4_clip_image008*, и произведем замену переменной в уравнении *7-4_clip_image010*. Так как каждому неотрицательному x соответствует единственное неотрицательное t, то можно переформулировать задачу: Найти все a, при которых уравнение *7-4_clip_image010_0000*имеет ровно одно неотрицательное решение.  
Вычитая *7-4_clip_image012* из обеих частей уравнения *7-4_clip_image010_0001* и умножая на –1, получим квадратное уравнение.  
Вычислим дискриминант уравнения *7-4_clip_image014*. Дискриминант обращается в нуль при 7-4_clip_image016.

В зависимости от значений параметра a разберем пять случаев.

[Случай 1:](javascript:hide1()) a < –2.

[Случай 2:](javascript:hide2()) a = –2.

[Случай 3:](javascript:hide3()) –2 < a < 2.

[Случай 4:](javascript:hide4()) a = 2.

[Случай 5:](javascript:hide5()) a > 2.

**Задания для самопроверки.**

1. Найти все p, при которых уравнение  имеет ровно одно решение.
2. Найти все a при которых уравнение  имеет ровно одно решение.
3. Найти все a при которых уравнение  имеет ровно два решения.
4. Найти все a при которых уравнение  имеет ровно одно решение.

**Литература.**

1. Журналы «Математика в школе». 2006г., 2008 г. 2009 г. № 2,3,6
2. Математика. Приложение к газете «Первое сентября» 2007г. 2008 г. № 17, 21,22.31,32.
3. Шахмейстер А.Х. Задачи с параметрами в ЕГЭ. – С.- Петербург, Москва: ЧеРо на Неве, 2004.
4. Чаплыгин В.Ф., Чаплыгина Н.Б. Задачи с параметрами по алгебре и анализу. Ярославль, 1998.
5. ЕГЭ. Универсальные материалы для подготовки учащихся. Математика. «Интеллект-Центр», 2009.
6. 1С: Образование. Алгебраические задачи с параметрами 9-11 классы. ООО «1С- Паблишинг», 2009.
7. Решебник по математике для поступающих в ВУЗы. «Бествей», 2009.
8. Крейнин Я.Л. Функции. Пределы. Уравнения и неравенства с параметрами: Теория и решение задач: Кн.для учащихся.- М.: Просвещение, 1995.