ОСНОВНОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН

А. Р. РЯЗАНОВСКИЙ, Д. Г. МУХИН

МАТЕМАТИКА

ОГЭ

ПРАКТИКУМ

ГИА 9

2015

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЭЛЕМЕНТЫ СТАТИСТИКИ

- Необходимые сведения из теории
- Пошаговый разбор решений вероятностных задач
- Обоснование выбора метода решения
- Задачи для самостоятельного решения
- Ответы

А. Р. Рязановский, Д. Г. Мухин

МАТЕМАТИКА

9 класс

ОСНОВНОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН (ГИА-9)

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЭЛЕМЕНТЫ СТАТИСТИКИ

Необходимые сведения из теории
Пошаговый разбор решений вероятностных задач
Обоснование выбора метода решения
Задачи для самостоятельного решения
Ответы

Издательство
«ЭКЗАМЕН»

МОСКВА
2015

УДК 372.8:51
ББК 74.262.21
Р99

Рязановский А. Р.

Р99 ОГЭ (ГИА-9). Математика. Основной государственный экзамен. Теория вероятностей и элементы статистики / А. Р. Рязановский, Д. Г. Мухин. — М. : Издательство «Экзамен», 2015. — 47, [1] с. (Серия «ОГЭ (ГИА-9). Практикум»)

ISBN 978-5-377-08736-6

В предлагаемой книге, состоящей из двух частей, подробно рассмотрены основные понятия, относящиеся к теории вероятностей и математической статистике, детально, по шагам разобраны решения задач, которые обычно предлагаются в КИМах на ОГЭ. Кроме этого, подробно, на примерах излагаются простейшие понятия комбинаторики (комбинаторные числа для числа перестановок, размещений и сочетаний без повторений). С такой же подробностью ведётся изложение основных положений математической статистики, показаны на примерах отличия выборочного среднего от моды и медианы и дано пояснение, в каких случаях какое из этих средних нужно использовать.

Назначение пособия — отработка практических навыков учащихся по подготовке к экзамену (в новой форме) в 9 классе по математике. В сборнике даны ответы на все варианты заданий.

Пособие предназначено учителям и методистам, использующим тесты для подготовки к Основному государственному экзамену (ГИА-9), оно также может быть использовано учащимися для самоподготовки и самоконтроля.

Приказом № 729 Министерства образования и науки Российской Федерации учебные пособия издательства «Экзамен» допущены к использованию в общеобразовательных организациях.

УДК 372.8:51
ББК 74.262.21

Формат 70x108/16. Гарнитура «Школьная». Бумага газетная.
Уч.-изд. л. 2,14. Усл. печ. л. 4,2. Тираж 5000 экз. Заказ № 3241/14.

ISBN 978-5-377-08736-6

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Несмотря на то, что основы теории вероятностей и математической статистики уже довольно давно преподаются в школах нашей страны, основные понятия и многие положения этой интересной науки всё ещё остаются недостаточно прочно усвоенными многими учащимися средней школы. Результаты проведения ОГЭ (ГИА) для учащихся 9-х классов показывают, что примерно 30% из всех сдававших ОГЭ (ГИА) не справляются с заданиями по теории вероятностей и(или) по статистике. Более того, некоторые задачи, предлагавшиеся в ОГЭ (ГИА) и диагностических работах, вызывают определённую неуверенность у некоторых учителей.

В предлагаемой книге, состоящей из двух частей, подробно рассмотрены основные понятия, относящиеся к теории вероятностей и математической статистике, детально, по шагам разобраны решения задач, которые обычно предлагаются в КИМах на ОГЭ (ГИА). Кроме этого, подробно, на примерах излагаются простейшие понятия комбинаторики (комбинаторные числа для числа перестановок, размещений и сочетаний без повторений). С такой же подробностью ведётся изложение основных положений математической статистики, показаны на примерах отличия выборочного среднего от моды и медианы и дано пояснение в каких случаях какое из этих средних нужно использовать.

Таким образом, основное отличие нашей книжки от других, написанных по рассматриваемой тематике — подробность обоснования выбора того или иного способа решения конкретных задач теории вероятностей и математической статистики.

В книге дано большое число задач для самостоятельного решения и для каждой, без исключения, задачи дан ответ.

Мы надеемся, что предлагаемая книга будет полезна как школьникам, так и учителям математики, да и всем другим, интересующимся теорией вероятностей.

Авторы

ЧАСТЬ I. ЗАДАЧИ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1. ПОНЯТИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Каждое событие имеет определённую вероятность. В некоторых случаях мы можем легко предсказать результат опыта (испытания, соревнования и т.п.) с некоторой долей уверенности, в других случаях сделать это сложнее. Приведем примеры.

Пример 1.1. Пусть монету предполагают подбросить 1 раз. Тогда, если монета правильной формы и изготовлена честно, то разумно считать, что вероятность выпадения «орла» равна $\frac{1}{2}$ или, как часто говорят, 50%. Это означает, что, не зная наверняка исход опыта (до проведения опыта, априори) возможность выпадения либо «орла», либо — «решки» разумно оценить одинаковым числом шансов: говорят 50×50.

Пример 1.2. Пусть ученик выучил 15 вопросов из 20 и на экзамене ему достанется один из этих 20 вопросов. Ясно, что получить билет, в котором содержится один из выученных вопросов, можно оценить 15 шансами из 20, или, что то же самое, 75 из 100, или 75%, или числом 0,75.

Пример 1.3. Предположим, вам нужно открыть кодовый замок. Код замка на двери состоит из 3 цифр: 1, 2, 3. Чтобы открыть замок нужно набрать эти три цифры в определённом порядке. Каким числом можно оценить успех эксперимента: откроется ли замок с первого раза? Выпишем **все** возможные комбинации: 123, 132, 213, 231, 312, 321. Больше комбинаций нет. Понятно, что успех — открытие замка с первого раза — можно оценить числом $\frac{1}{6}$. Это означает, что *в среднем, проведя серии, например, по 6 испытаний, только в одном случае из шести замок будет открыт с первого раза.*

Пример 1.4. Рассмотрим тот же пример с открытием замка, но добавим дополнительное условие: первая цифра кода — чётная. В этом случае вероятность «открыть замок с первого раза» будет равна $\frac{1}{3}$, поскольку есть всего два варианта кода, первая цифра которого — чётная: или 213, или 231. Вы видите, что вероятность возросла в два раза.

В математике вероятность каждого события оценивают неотрицательным числом, не большим единицы (но не процентами!). Для вероятности события A принято обозначение $P(A)$, которое читается так: $P(A)$ — «вероятность события A»[1].

Итак, справедливо неравенство: $0 \le P(A) \le 1$.

Принято различать три типа событий:

♦ ***невозможное событие*** (часто обозначается символом $\varnothing$) — это такое событие, которое не может произойти в результате данного испытания. Вероятность невозможного события равна 0: $P(\varnothing)=0$. Например, при подбрасывании игрального кубика (игральной кости) с очками от 1 до 6 невозможно выпадение 10 очков при одном бросании. Вероятность события «выпало число очков, большее 10» равна 0;

♦ ***достоверное событие*** (часто обозначают символом Ω) — это такое событие, которое обязательно происходит в результате данного испытания. Вероятность достоверного события считают равной 1: $P(\Omega)=1$. Например, при бросании того же кубика вероятность события «выпало число очков, меньшего 10» равна 1;

♦ ***случайное событие*** (принято обозначать большими буквами латинского алфавита) — это такое событие, которое может произойти или не произойти в результате данного испытания. Другими словами: случайное событие можно предсказать только с некоторой *долей уверенности*, которую можно выразить вполне определённым положительным числом, меньшим 1: $0 < P(A) < 1$.

Например, публикуемый прогноз погоды следует понимать как вероятностный прогноз, а именно: если указано «погода завтра будет пасмурной», то это означает, что вероятность пасмурной погоды (по данным Гидрометеоцентра) завтра не менее 0,95. Для недельного прогноза погоды аналогичная вероятность составит уже 0,65.

Для вычисления вероятностей случайных событий используют различные модели этих событий и их исходов.

2. КЛАССИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Наиболее простой моделью события, для вычисления его вероятности, является ***классическая модель,*** или так называемое *классическое определение вероятности*.

[1] Буква P — первая буква французского слова *probabilitet* — *вероятность*. Это обозначение принадлежит великому французскому математику XVII в. Пьеру де Ферма.

Эта модель построена по следующей схеме, которую сначала поясним на примерах, рассмотренных в пункте 1.

Пример 2.1. Подбрасывая монету, как правило, не возникает сомнений, что выпадение той или иной её стороны равновозможно, а так как у обычной монеты две стороны, то вероятность выпадения одной из двух сторон монеты равна $\frac{1}{2}$.

Пример 2.2. В примере с экзаменационными билетами также ясно, что выбор «счастливого билета» можно сделать любым из 15 способов, а всего способов выбора билета — 20. Поэтому и вероятность мы оценили дробью $\frac{15}{20}=0{,}75$.

Пример 2.3. Попробуйте самостоятельно объяснить прямо сейчас, почему вероятность открыть замок с первого раза равна $\frac{1}{6}$.

Обобщим сказанное. Если в результате некоторого опыта (испытания) возможно появление одного и только одного из <u>**равновозможных событий**</u> $\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_N$ (их множество обозначают буквой Ω: $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_N\}$), то вероятность каждого из этих, так называемых элементарных, событий равна $\frac{1}{N}$: $P(\omega)=\frac{1}{N}$.

Если событие A происходит тогда и только тогда, когда происходит хотя бы одно из событий $\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_m$, $0\le m\le N$, то события $\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_m$ принято называть событиями, *благоприятствующими* событию A. В этом случае вероятность события A равна, очевидно, отношению $\frac{m}{N}$: $P(A)=\frac{m}{N}$.

В описываемую классическую схему определения вероятности входят и рассмотренные выше невозможное и достоверное события. А именно: если некоторому событию $\varnothing$ не благоприятствуют ни одно из элементарных событий $\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_N$, то это — *невозможное событие* и $P(\varnothing)=\frac{0}{N}=0$; если некоторому событию благоприятствует каждое из элементарных событий $\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_N$, то это — *достоверное событие* и $P(\Omega)=\frac{N}{N}=1$.

Классическое определение вероятности. Пусть опыт S имеет N <u>*равновозможных*</u> исходов $\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_N$, исчерпывающих все возможные элементарные исходы[1] данного опыта. Пусть событию A благоприятствуют ровно m из этих исходов. Тогда вероятностью события A называется отношение $\frac{m}{N}$: $P(A)=\frac{m}{N}$.

Из этого определения следует, что для произвольного события A выполняются следующие утверждения.

1. $0 \le P(A) \le 1$.
2. $P(\varnothing)=0$.
3. $P(\Omega)=1$.

3. ПРИМЕНЕНИЕ КЛАССИЧЕСКОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТИ

Рассмотрим простейшие **примеры применения классического определения вероятности** события, которое чаще всего предлагается в экзаменационных материалах ОГЭ. Вы заметили, что для его применения необходимо выполнить некоторые шаги. Перечислим эти шаги.

Шаг 1. Перечислить все без исключения исходы эксперимента (опыта) так, чтобы эти исходы были бы естественным образом равновозможными исходами и найти их количество. Нужно знать число N всех равновозможных исходов опыта.

Шаг 2. Сформулировать, какое именно событие является рассматриваемым событием A, используя найденные в результате шага 1 элементарные события. Здесь нужно перечислить все без исключения равновозможные события, которые благоприятствуют событию A. Нужно знать число m всех равновозможных исходов опыта, благоприятствующих рассматриваемому событию A.

Шаг 3 (самый простой). Найти отношение $\frac{m}{N}$ чисел, найденных в шагах 1 и 2: $P(A)=\frac{m}{N}$.

Пример 3.1. На тарелке 20 пирожков: 2 — с мясом, 16 — с капустой и 2 — с вишней. Рома наугад выбирает один пирожок. Найдите вероятность того, что он окажется с вишней.

Решение. В результате этого опыта (испытания, эксперимента) возможны следующие исходы: $\omega_1=M$, $\omega_2=M$, $\omega_3=K$, $\omega_4=K,\ldots,\omega_{18}=K$, $\omega_{19}=B$, $\omega_{20}=B$ (обозначения выбраны по первой букве начинки пирож-

[1] Говорят, что события $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N$ образуют *полную группу событий*.

ков: M — с мясом, K — с капустой, B — с вишней). Все эти события можно, конечно, считать равновозможными, поскольку Рома выбирает пирожок ***наугад***. Именно это предположение является простейшей математической моделью данного испытания — классической моделью эксперимента. (**Шаг 1** выполнен: $N=20$.) Поскольку рассматриваемому событию, как мы видим, благоприятствует только два события: $\omega_{19}=B$, $\omega_{20}=B$, то $m=2$. (**Шаг 2** выполнен: $m=2$.) Из 20 равновозможных событий рассматриваемому событию благоприятствуют 2 события. Значит, искомая вероятность $P(B)=\frac{2}{20}=0{,}1$. (**Шаг 3** выполнен и задача решена.) **Ответ:** 0,1.

Пример 3.2. Найти вероятность того, что при двух подбрасываниях монеты выпадет два «орла».

Решение. В результате этого опыта (испытания, эксперимента) возможны следующие исходы: $\omega_1=OO$, $\omega_2=OP$, $\omega_3=PO$, $\omega_4=PP$. Все эти события можно считать равновозможными, если монета имеет форму тонкого диска и не фальшивая. Именно это предположение является простейшей математической моделью данного испытания — классической моделью эксперимента. (**Шаг 1** выполнен: $N=4$.) Поскольку рассматриваемому событию, как мы видим, благоприятствует только одно событие: $\omega_4=PP$, то $m=1$. (**Шаг 2** выполнен: $m=1$.) Из четырёх равновозможных событий рассматриваемому событию $\omega_4=PP$ благоприятствует 1 событие. Значит, искомая вероятность $P(\omega_4)=\frac{1}{4}=0{,}25$. (**Шаг 3** выполнен и задача решена.) **Ответ:** 0,25.

Замечание. Было бы ошибкой перечислить и считать равновозможными следующие **три** события: OO, OP, PP, хотя, действительно, никакого иного исхода быть не может, но... события не равновозможны: не учтен порядок монет в событиях OP и PO. Чтобы понять, почему важно рассматривать события $\omega_2=OP$, $\omega_3=PO$ как различные события, задайте себе вопрос: «Что вероятнее OO или PP»? Ответ ясен сразу: эти события равновероятны. А теперь спросите себя: «Что вероятнее OO или OP»? Ответ также ясен сразу: OP. Вот именно поэтому мы рассматривали четыре равновозможных события $\omega_1=OO$, $\omega_2=OP$, $\omega_3=PO$, $\omega_4=PP$.

Пример 3.3. Найти вероятность того, что при одном подбрасывании двух одинаковых игральных костей, сумма выпавших на них очков будет: а) не меньше 5; б) больше 12; в) кратна 5.

Решение. В задачах такого типа удобны различные схемы, таблицы и т.п., чтобы удобно было перечислять все без исключения результаты опыта. Мы воспользуемся тем, что результаты подбрасывания двух кубиков можно представить в виде таблицы:

кость 1 / 2	1	2	3	4	5	6
1	1+1	1+2	1+3	1+4	1+5	1+6
2	2+1	2+2	2+3	2+4	2+5	2+6
3	3+1	3+2	3+3	3+4	3+5	3+6
4	4+1	4+2	4+3	4+4	4+5	4+6
5	5+1	5+2	5+3	5+4	5+5	5+6
6	6+1	6+2	6+3	6+4	6+5	6+6

В 36 ячейках этой таблицы представлены все (N) элементарные исходы данного испытания. Ясно, что $N = 36$.

Для ответа на вопрос а) подсчитаем число m элементарных событий, при появлении каждого из которых сумма числа очков на обеих костях будет не меньше 5 (событие A). Из таблицы находим, что $m = 30$. Отметим, что быстрее подсчитать число неблагоприятных исходов: 1+1, 1+2, 1+3, 2+1, 2+2, 3+1. Следовательно, $P(A) = \frac{30}{36} = \frac{5}{6} \approx 0{,}83$.

Для ответа на вопрос б) число m элементарных событий, при появлении каждого из которых сумма выпавших очков больше 12 (событие B) равно нулю. Значит, искомая вероятность равна нулю: $P(B) = \frac{0}{36} = 0$.

Для ответа на вопрос в) число m элементарных событий, при появлении каждого из которых сумма выпавших очков кратна 5 (событие C) равно 7 (это число найдено по таблице. Подсчитайте сами!). Значит, искомая вероятность равна: $P(C) = \frac{7}{36} \approx 0{,}194$. **Ответ:** 0,194.

Пример 3.4. На соревнованиях по плаванию среди участников по жребию разыгрывают плавательные дорожки, по которым спортсменам предстоит проплыть. Пусть среди участников заплыва на 100 м участвуют 8 пловцов: два из команды России, три из команды Германии и по одному из Франции, Бельгии и Италии. Найдите вероятность того, что представитель России будет плыть по первой дорожке.

Решение. Выберем следующую модель. По первой дорожке может плыть любой из 8 спортсменов. Получаем 8 исходов распределения спортсменов на первой дорожке. Среди этих исходов — два благоприятных, при каждом из которых по первой дорожке будет плыть представитель России (событие A). Все исходы равновозможны: распределение дорожек происходит по результатам жеребьёвки. Следовательно, искомая вероятность равна $P(A)=\frac{2}{8}=0{,}25$. **Ответ:** 0,25.

В более сложных случаях для подсчёта общего числа исходов «опыта» и общего числа событий, благоприятствующих рассматриваемому событию, используют **всего два правила**: **Правило суммы и Правило произведения.** Рассмотрим эти правила подробнее.

3.1. Правило суммы

Сначала поясняющий пример. Пусть вам предстоит сделать выбор одного теннисного мяча, если имеется 4 мяча фирмы *Dunlop*, 6 мячей фирмы *Slazinger* и 4 мяча фирмы *Penn*. Сколькими способами вы можете выбрать один мяч? Ответ почти очевиден — 14-ю способами, поскольку $4+6+4=14$. Этот результат — сумма (получен сложением). Аналогично и в общем случае.

Формулировка правила суммы. Пусть есть три множества элементов $A=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$, $B=\{b_1,b_2,\dots,b_m\}$ и $C=\{c_1,c_2,\dots,c_k\}$, причём в множестве A содержится n элементов; в множестве B — m элементов и в множестве C — k элементов. Тогда выбрать **один элемент** из множества A, **или** из B, **или** из C можно $n+m+k$ способами.

Пример 3.5. Анатолий хочет выбрать цветок из роз и хризантем. Известно, что имеется 50 роз и 40 хризантем. Какова вероятность того, что Анатолий выберет хризантему? Результат округлите до сотых.

Решение. Понятно, что число способов выбора одного цветка равно 50+40=90. Этот результат следует из правила суммы. Итак, общее число способов выбора равно 90: $N=90$. Число благоприятствующих случаев — 40. Поэтому искомая вероятность равна $\frac{40}{90}\approx 0{,}44$. **Ответ:** $0{,}44$.

Пример 3.6. Об учениках некоторого класса известно, что 10 учеников занимаются в биологическом кружке, 8 — в математическом кружке, оставшиеся 7 учеников занимаются в музыкальной школе. Учитель попросил ученика принести классный журнал. Какова вероятность того, что журнал принесёт ученик, который занимается в музыкальной школе?

Решение. Из условия задачи следует, что журнал может принести любой из $10+8+7=25$ учеников. Следовательно, общее число вариантов выбора ученика равно 25: $N=25$. Этот результат следует из правила сложения. В музыкальную школу ходят 7 учеников. Значит, искомая вероятность равна $\frac{7}{25}=0{,}28$. **Ответ:** $0{,}28$.

Пример 3.7. В чемпионате по гимнастике участвуют 50 спортсменок: 18 из России, 14 из Украины, остальные — из Белоруссии. Порядок, в котором выступают гимнастки, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсменка, выступающая первой, окажется из Белоруссии.

Решение. Поскольку требуется выбрать одну гимнастку из 50, то общее число исходов равно 50. Найдем число спортсменок из Белоруссии: $50-18-14=18$. Требуется выбрать одну спортсменку из Белоруссии. Это можно сделать 18 способами. Следовательно, искомая вероятность $P=\frac{18}{50}=0{,}36$. **Ответ:** $0{,}36$.

3.2. Правило произведения

Опять рассмотрим поясняющий **пример.** Пусть вам предстоит сделать выбор одного теннисного мяча, одной теннисной ракетки, одной теннисной майки, если имеется 4 мяча фирмы *Dunlop*, 2 мяча фирмы *Slazinger*, 2 ракетки фирмы *Slazinger*, 1 ракетка фирмы *Head* и 2 майки фирмы *Lacoste*. Сколькими способами вы можете выбрать тройку $\langle$*мяч, ракетка, майка*$\rangle$?

Решение. Здесь разобраться сложнее. Поскольку по условию для случайного выбора тройки предметов $\langle$*мяч, ракетка, майка*$\rangle$ фирма изготовитель не важна, то у нас имеется 6 мячей, 3 ракетки и 2 майки. Сначала выберем пару (ракетка; мяч). Для этого составим таблицу.

Номера мячей / Номера ракеток	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)

Мы видим, что всего имеется $6\times 3=18$ возможностей выбора пары $\langle$мяч; ракетка$\rangle$.

Теперь для каждой пары мы можем выбрать одну из двух маек. Получим, очевидно, 36 троек $\langle$*мяч, ракетка, майка*$\rangle$, то есть искомый результат — произведение: $6\times3\times2=36$ (получен умножением). Аналогично и в общем случае.

Формулировка правила произведения. *Пусть есть три множества элементов* $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$, $B=\{b_1,b_2,\ldots,b_m\}$ *и* $C=\{c_1,c_2,\ldots,c_k\}$, *причём в множестве A содержится n элементов; в множестве B — m элементов и в множестве C — k элементов. Тогда можно выбрать тройку элементов (a, b, c) так, что для каждого элемента a из A можно выбрать любой элемент b из B и после этого можно выбрать любой элемент c из C. Этот выбор можно выполнить* $n\times m\times k$ *способами.*

Пример 3.8. Подбросили 4 одинаковые монеты. Найдите вероятность того, что выпадет хотя бы один «орёл». Результат округлите до сотых.

Решение. При бросании монеты может выпасть одна из двух её сторон: «орёл» или «решка». Поэтому с помощью правила произведения можем вычислить общее число всех возможных исходов: для каждой монеты — два варианта, следовательно, для четырёх монет получим $2\times2\times2\times2=16$ вариантов. Таким образом, общее число исходов подбрасывания четырёх монет равно $N=16$. Вычислим число исходов, в которых есть **хотя бы один** «орёл». Для этого представим себе пример исхода какого-либо подбрасывания, обозначая «орёл» — o и «решку» — p: (p,p,p,o) или (o,o,p,o) и т.д. Теперь видно, что результат «орёл» будет во всех исходах, кроме одного: (p,p,p,p). Итак, мы нашли, что число благоприятствующих исходов равно $16-1=15$: $m=15$. Следовательно, искомая вероятность равна отношению $\frac{15}{16}=0{,}9375\approx0{,}94$. **Ответ:** $0{,}94$.

Замечание. Если в одном и том же опыте некоторое событие A может повторяться и требуется выяснить в скольких случаях событие A появляется **хотя бы один раз,** то часто определяют в скольких случаях событие A не произошло вовсе и затем полученное число вычитают из общего числа исходов, поскольку справедливо равенство

$$N=\underbrace{\left(\textit{событие A не произошло}\right)}_{n_0(A)}+$$

$$+\underbrace{\left(\textit{событие A произошло хотя бы один раз}\right)}_{n_1(A)}$$

Пример 3.9. В случайном эксперименте правильную монету подбрасывают пять раз. Найдите вероятность того, что «орёл» выпадет хотя бы один раз. Результат округлите до сотых.

Решение. При подбрасывании пяти монет возможно $2\times2\times2\times2\times2=2^5=32$ равновозможных исхода: $N=32$. Число благоприятствующих исходов, при которых «орёл» выпадет хотя бы один раз, равно $m=32-1=31$. Следовательно, искомая вероятность $P=\frac{31}{32}=0{,}96875\approx0{,}97$. **Ответ:** 0,97.

Пример 3.10. В случайном эксперименте бросают три игральные кости. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 10 очков. Результат округлите до сотых.

Решение. При бросании трех игральных костей, по правилу произведения, всего может быть $6\times6\times6=216$ элементарных исходов: $N=216$.

Найдем число m благоприятных исходов, при каждом из которых выпадает сумма в 10 очков. Попробуем перечислить все случаи. Эта ситуация более сложная и нужно быть внимательнее.

Пусть на первой кости выпало 1 очко, тогда на двух других костях должно выпасть 9 очков. Получаем следующие исходы: 1+3+6, 1+4+5. *Мы выписываем слагаемые по возрастанию, чтобы потом учесть различные способы расположения этих слагаемых и чтобы в дальнейшем избежать повторов.* В данном случае все слагаемые каждой из сумм различны, поэтому по правилу произведения для каждой суммы получаем по 6 исходов. В самом деле, для суммы 1+3+6 слагаемое 1 можно поставить на одно из трёх мест, слагаемое 3 на одно из двух оставшихся мест и слагаемое 6 — на единственное оставшееся место. Всего получаем $3\times2\times1=6$. Аналогично и для суммы 1+4+5, можем получить 6 различных исходов. (Полезно выписать их все, чтобы ещё раз увидеть, как работает правило произведения.) Итак, с 1 имеем 12 способов.

Пусть на первой кости выпало 2 очка, тогда на двух других должно быть 8 очков. Получаем 2+2+6, 2+3+5, 2+4+4. Опять *выписываем слагаемые по возрастанию.* Сумма 2+3+5 может быть получена шестью различными способами (это мы уже считали). А вот сумму 2+2+6 получить шестью способами не удастся, поскольку в ней есть одинаковые слагаемые. Слагаемое 6 можно поставить на одно из трёх мест, а два других слагаемых только на одно (фактически на два, но эти случаи неразличимы, поскольку слагаемые одинаковые). Аналогично, сумму 2+4+4 можно получить только тремя способами. (Выпишите эти способы, чтобы увидеть как они получаются на практике). Итак, с 2-мя очками тоже имеем 12 способов.

Пусть на первой кости выпало 3 очка, тогда на двух других должно быть 7 очков. Опять *выписываем слагаемые по возрастанию*. Получаем 3+3+4. Обратите внимание, что больше комбинаций нет, поскольку невозможно получить сумму 7 с помощью возрастающих слагаемых. (Если взять, например, 3+5, то потом должны написать 2, но 2 < 5 и поэтому её написать нельзя.) Сумму 3+3+4 можно получить тремя способами, рассуждая так же как и в предыдущем случае. Итак, с 3-мя очками имеем 3 способа.

Если на первой кости будет выпадать большее, чем 3 число очков, то мы не сможем дополнить это число очков возрастающими слагаемыми. Таким образом, получаем число благоприятных исходов, равное 12+12+3=27, то есть $m=27$. Следовательно, искомая вероятность $P=\frac{m}{N}=\frac{27}{216}=\frac{1}{8}=0{,}125$. **Ответ:** $0{,}125$.

Пример 3.11. Андрей выбирает трехзначное число. Найдите вероятность того, что оно делится на 33.

Решение. Сначала нужно найти количество трёхзначных чисел. На место единиц есть 10 претендентов: 0, 1, 2,..., 9. На место десятков — тоже 10, а вот на место сотен — 9, поскольку число сотен не может равняться нулю в трёхзначном числе. Таким образом, по правилу произведения получаем всего $10\times10\times9=900$ трёхзначных чисел: $N=900$. Теперь подсчитаем, сколько из них делится на 33. Здесь удобно исходить из понятия кратного. Любое число, кратное 33, имеет вид $33k$. Найдём все такие натуральные числа k, что $33k$ есть трёхзначное число, то есть $100\le 33k\le 999$. Из этого неравенства (деля все его члены на 33) находим $\frac{100}{33}\le k\le\frac{999}{33}\Leftrightarrow 3\frac{1}{33}\le k\le 30\frac{9}{33}$. Следовательно, удовлетворяют только числа 4, 5, ..., 30. Спрашивается, а сколько здесь чисел? Ответ таков: $30-4+1=27$ чисел.

Если требуется узнать, сколько выписано последовательных натуральных чисел от n до m: $n, n+1, n+2,\dots,m$, то ответ на вопрос таков: $m-n+1$ число.

Теперь, по определению вероятности события, получаем $P=\frac{27}{900}=0{,}03$. **Ответ:** 0,03.

Пример 3.12. Телевизор у Светы сломался и показывает только один случайный канал. Света включает телевизор. В это время по 9 каналам из 30 показывают новости. Найдите вероятность того, что Света попадет на канал, где новости **не** идут.

Решение. Сначала нужно понять, что фактически не важно, что телевизор сломался, а важно то, что он показывает только один канал. Чтобы Свете не попасть на просмотр новостей, нужно, чтобы она попала на один из 21 каналов, поскольку всего каналов 30, а новости идут по 9 каналам. То есть «любимых» Светой каналов имеется 21, а всего каналов 30. Таким образом, всего исходов $N=30$, а благоприятных $m=21$. Следовательно, искомая вероятность равна отношению $\frac{21}{30}=\frac{7}{10}=0,7$.

Ответ: 0,7.

Пример 3.13. Монету бросили 3 раза. Найдите вероятность того, что при первых двух бросаниях выпала одна и та же сторона монеты.

Решение. Рассмотрим опыт, состоящий в первых двух бросаниях монеты. Количество исходов N равно четырем: орел-орел, решка-решка, решка-орел, орел-решка. Количество благоприятных исходов m равно двум. Таким образом, искомая вероятность равна отношению $\frac{m}{N}=\frac{2}{4}=0,5$. **Ответ:** 0,5.

Замечание. Условие этой задачи можно сформулировать чуть по-другому:

Монету бросили 3 раза. Найдите вероятность того, что при первых двух бросаниях выпала одна сторона монеты, а при третьем — другая.

Здесь, конечно, надо рассматривать опыт, состоящий в трех бросаниях монеты. Количество исходов N равно 8. Количество благоприятных исходов m равно двум. Таким образом, искомая вероятность равна отношению $\frac{m}{N}=\frac{2}{8}=0,25$. Как и следовало ожидать, ответ задачи изменился. Заметим также, что если монету бросили не 3 раза, а, например, 103, то ответ не изменится, так как всё равно рассматривается опыт, состоящий в первых трех бросаниях.

Интерес вызывает *обобщение* предыдущей задачи:

Пример 3.14. Пусть монету бросили n раз. Найти вероятность того, что первые m бросаний закончились одинаково. (Здесь $m \le n$.)

Решение. Рассмотрим опыт, состоящий в первых m бросаниях монеты. Количество исходов равно 2^m. Из них благоприятных ровно 2 (все орлы или все решки). Таким образом, получается ответ: $\frac{2}{2^m}=2^{1-m}$.

Обратим внимание, что итоговый ответ не зависит от общего числа бросаний n. **Ответ:** 2^{1-m}.

3.3. Задачи на вычисление вероятностей

1. Коля выбирает трехзначное число. Найдите вероятность того, что оно делится на 4.

2. Андрей выбирает трехзначное число. Найдите вероятность того, что оно делится на 10.

3. Вова выбирает трехзначное число. Найдите вероятность того, что оно делится на 49.

4. Даша выбирает четырёхзначное число. Найдите вероятность того, что оно делится на 73. Результат округлите до сотых.

5. Маша выбирает четырёхзначное число. Найдите вероятность того, что оно делится на 125.

6. Катя выбирает четырёхзначное число. Найдите вероятность того, что оно делится на 479.

7. Телевизор у Марины сломался и показывает только один случайный канал. Марина включает телевизор. В это время по восьми каналам из пятидесяти показывают кинокомедии. Найдите вероятность того, что Марина попадет на канал, где комедия **не** идет.

8. Телевизор у Глеба сломался и показывает только один случайный канал. Глеб включает телевизор. В это время по восьми каналам из сорока показывают кинокомедии. Найдите вероятность того, что Глеб попадет на канал, где комедия **не** идет.

9. Телевизор у Саши сломался и показывает только один случайный канал. Саша включает телевизор. В это время по двенадцати каналам из тридцати показывают кинокомедии. Найдите вероятность того, что Саша попадет на канал, где идет комедия.

10. Телевизор у Толи сломался и показывает только один случайный канал. Толя включает телевизор. В это время по пяти каналам из пятидесяти показывают футбол. Найдите вероятность того, что Толя попадет на канал, где футбол **не** идет.

11. В случайном эксперименте бросают **две** игральные кости. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 5 очков. Результат округлите до сотых.

12. В случайном эксперименте бросают **три** игральные кости. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 16 очков. Результат округлите до сотых.

13. В случайном эксперименте симметричную монету бросают **трижды**. Найдите вероятность того, что орел выпадет ровно два раза.

14. В случайном эксперименте симметричную монету бросают **четырежды**. Найдите вероятность того, что орел не выпадет ни разу. Результат округлите до сотых.

15. В случайном эксперименте симметричную монету бросают **четырежды**. Найдите вероятность того, что орел выпадет хотя бы один раз. Результат округлите до сотых.

16. В чемпионате по гимнастике участвуют 40 спортсменок: 12 из Аргентины, 9 из Бразилии, остальные — из Парагвая. Порядок, в котором выступают гимнастки, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсменка, выступающая первой, окажется из Парагвая.

17. В соревнованиях по толканию ядра участвуют 4 спортсмена из Аргентины, 7 спортсменов из Бразилии, 10 спортсменов из Парагвая и 4 — из Уругвая. Порядок, в котором выступают спортсмены, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсмен, который выступает последним, окажется из Парагвая.

18. Научная конференция проводится в 5 дней. Всего запланировано 75 докладов — первые три дня по 11 докладов, остальные распределены поровну между четвертым и пятым днями. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Какова вероятность, что доклад профессора М. окажется запланированным на последний день конференции?

19. Конкурс исполнителей проводится в 3 дня. Всего заявлено 55 выступлений — по одному от каждой страны. В первый день 33 выступления, остальные распределены поровну между оставшимися днями. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Какова вероятность, что выступление представителя России состоится в третий день конкурса?

20. На семинар приехали 7 ученых из России, 7 из Швеции и 6 из Сербии. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что седьмым окажется доклад ученого из Швеции.

21. Перед началом первого тура чемпионата по теннису участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвуют 46 теннисистов, среди которых 19 участников из России, в том числе Ярослав Исаков. Найдите вероятность того, что в первом туре Ярослав Исаков будет играть с каким-либо теннисистом из России?

22. В сборнике билетов по химии всего 50 билетов, в 20 из них встречается вопрос по углеводородам. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику достанется вопрос по углеводородам.

23. В сборнике билетов по математике всего 20 билетов, в 13 из них встречается вопрос по производной. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику не достанется вопроса по производной.

24. На чемпионате по прыжкам в воду выступают 25 спортсменов, среди них 7 прыгунов из России и 10 прыгунов из Парагвая. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что четырнадцатым будет выступать прыгун из России.

4. СТАТИСТИЧЕСКИЙ МЕТОД

Рассмотрим иной подход к определению вероятности события — ***статистический метод*** определения вероятности события, то есть подход, который основан на использовании результатов большого числа однотипных испытаний[1].

В этом случае *за вероятность события принимают отношение частоты появления наблюдаемого исхода к общему числу всех проведённых испытаний.*

Например, пусть в результате проверки 1000 микрофонов некоторого производителя 5 из них оказываются бракованными. Тогда можно сказать, что вероятность изготовления данным производителем микрофона хорошего качества (то есть без брака), приближённо равна отношению $\frac{995}{1000} = 0{,}995$.

Пусть определённое событие A происходит n_A раз в серии из N одинаковых испытаний. Число n_A естественно назвать ***частотой появления события*** A. По частоте появления события невозможно судить о вероятности этого события. (Точно так же как о величине ошибки при

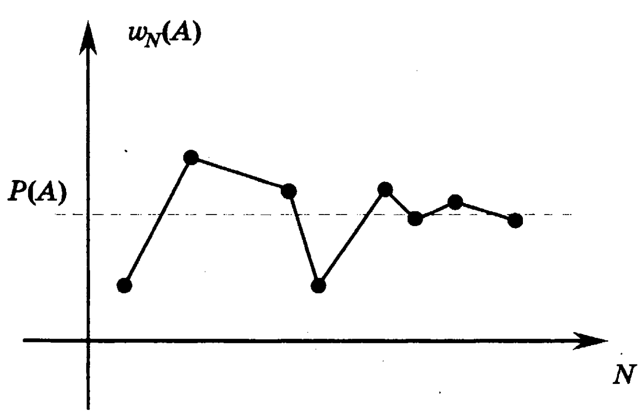
[1] Слово «статистика» происходит от латинского «*status*» — состояние дела, которое можно охарактеризовать сбором определённого вида данных, которые и образуют *статистику состояния дел*. Термин «статистика» появился в XVIII веке.

измерении нельзя судить о точности этого измерения.) Всё дело в относительной частоте появления события. Если, например, известно, что работник допускает брак в работе — изготовил 10 бракованных изделий, то мы не сможем оценить качество его работы. Нужно знать, сколько всего изделий он сделал. Если, например, 20 изделий, то он плохой работник — каждая вторая его деталь бракованная. Если же изготовлено 200 изделий, то качество его работы значительно выше, а если им было изготовлено 1000 изделий, то работа высокого качества.

Отношение $\frac{n_A}{N} = w_N(A)$ называют ***относительной частотой события*** A в серии из N испытаний. Вероятность события A равна (приближённо) относительной частоте события A при достаточно большом числе N проведённых испытаний.

4.1. Статистическое определение вероятности

Вероятностью события A называется число $P(A)$, к которому стремится относительная частота $w_N(A)$ появления этого события в N испытаниях, проводимых в одинаковых условиях, при неограниченном увеличении числа N этих испытаний: $w_N(A) \underset{N\to\infty}{\to} P(A)$.



Пример 4.1. Фабрика выпускает сумки. В среднем на 190 качественных сумок приходится восемь сумок со скрытыми дефектами. Найдите вероятность того, что купленная сумка окажется качественной. Результат округлите до сотых.

Решение. В данной задаче приходится использовать статистический подход к определению вероятности. Из условия задачи следует, что в среднем из $190+8=198$ сумок качественными являются 190, потому, что сказано: ***на*** *190 сумок приходится 8 с браком*, а не ***из*** *190 сумок 8* *с браком*. Значит, вероятность того, что купленная сумка окажется качественной, равна $P=\frac{190}{198}\approx 0,96$. **Ответ:** $0,96$.

Пример 4.2. При испытании прибора оказалось, что относительная частота появления некачественного прибора равна 0,05. Найдите число исправных приборов в партии из 500 приборов.

Решение. В данной задаче приходится также использовать статистический подход и определение относительной частоты события. Из приведённого выше определения, можем написать $0,95=\frac{n_A}{500}$, где n_A — количество исправных приборов, которое и требуется найти. Получаем $n_A=0,95\times 500=475$. **Ответ:** 475.

4.2. Задачи на вычисление вероятностей

1. В среднем из 1400 садовых насосов, поступивших в продажу, 7 подтекают. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает.

2. Фабрика выпускает сумки. В среднем на 180 качественных сумок приходится пятнадцать сумок со скрытыми дефектами. Найдите вероятность того, что купленная сумка окажется качественной — без скрытых дефектов. Результат округлите до сотых.

3. В среднем из 200 велосипедов, поступивших в продажу, 4 имеют дефект по окраске. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный велосипед не имеет дефектов по окраске.

4. В некотором регионе в течение 120 дней в году относительная частота ливневых дождей составила 0,05. Сколько дней в этом регионе в течение этих 120 дней не было ливневых дождей?

5. В некотором регионе в течение 200 дней в году относительная частота грозовых дождей составила 0,09. Сколько дней в этом регионе в течение этих 200 дней были грозовые дожди?

6. В некотором городе его жителям поступают заказы, сделанные ими в интернет-магазине *Amazon*, и в среднем на 500 заказов приходится 2 недоброкачественных: со скрытыми дефектами. Найдите вероятность того, что полученный Вами заказ, будет без скрытых дефектов.

7. В некотором регионе в течение 210 дней в году относительная частота снегопадов составила 0,2. Сколько дней в этом регионе в течение этих 210 дней шёл снег?

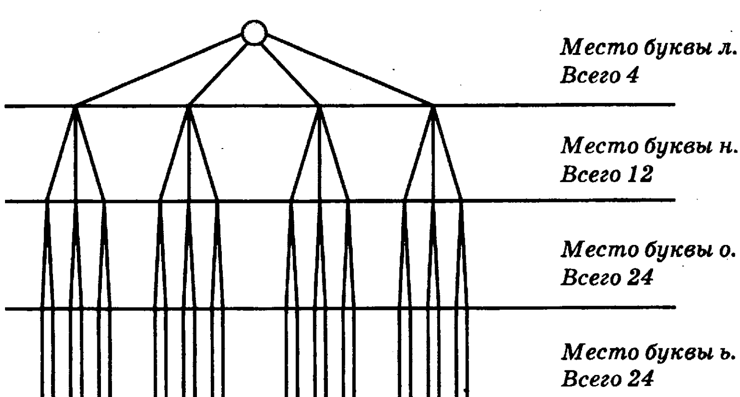
5. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КОМБИНАТОРНЫХ ЧИСЕЛ

В более сложных случаях для вычисления числа исходов данного испытания можно использовать *комбинаторные числа*, позволяющие найти число исходов испытания в зависимости от ситуации. Всего таких чисел шесть: число P_n перестановок n элементов, число A_n^k размещений n элементов по k местам $(k \le n)$, число C_n^k сочетаний из n элементов по k $(k \le n)$, причем эти перестановки, размещения и сочетания рассматриваются как без учёта повторения данных элементов, так и, наоборот, с повторениями. Заметим, что применение готовых схем подсчета вариантов (комбинаторных чисел) требует известного опыта, который приобретается с увеличением числа решенных задач.

Часто результат испытания можно представить в виде некоторой комбинации элементов, записанных в виде последовательности элементов: $(a,b,...,c)$ Комбинаторные числа, перечисленные выше, помогают найти количество таких комбинаций. Будем рассматривать пока только такие комбинации, в которых не допускаются повторения элементов.

5.1. Перестановки без повторений

Рассмотрим пример. Пусть требуется 4 буквы *л, н, о, ь* расположить в один ряд. Нас интересует вопрос о том, сколькими способами это можно сделать. Если порядок расположения букв безразличен, то их можно расположить одним способом, например, так как они написаны: *л, н, о, ь*. Если порядок букв важен, то число способов можно представить в виде следующей схемы, которая называется *деревом выбора*.



В самом деле, первую букву можно расположить на одном из четырех мест. Вторую — на любом из трех оставшихся. Всего получим

12 вариантов. После этого третью букву можно расположить на одном из двух оставшихся мест. Получим 24 варианта раскладки. И, наконец, последнюю букву можно поместить на одно оставшееся место — выбора уже нет! Итак, существует всего 24 варианта расположения четырех букв.

Если обобщить задачу на случай перестановок n различных элементов (букв) по n местам, то получим число P_n различных вариантов, равное $n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1$. Это произведение для краткости записи принято записывать в виде $n!$ (читается: «эн факториал»).

Таким образом, общее число P_n перестановок из n элементов без повторений равно $n!$:

$$P_n = n!.$$

Пример 5.1. На 4 карточках написаны буквы *л, н, о, ь*. Эти карточки раскладывают на столе в ряд. Какова вероятность того, что получим слово «ноль»? Результат округлите до тысячных.

Решение. Все четыре буквы различны. Поэтому существует $4! = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 24$ способа их раскладки. Все раскладки равновозможны. Благоприятных раскладок одна. Следовательно, на основании классического определения вероятности получим искомую вероятность $P = \frac{1}{24} \approx 0{,}042$. (Дробь $\frac{1}{24} = 0{,}041666\ldots = 0{,}041(6)$ при округлении до тысячных, то есть до «сомнительного» десятичного знака в разряде тысячных даёт $0{,}042$ и мы пишем $\frac{1}{24} \approx 0{,}042$). **Ответ:** $0{,}042$.

Пример 5.2. На соревнованиях по плаванию среди участников разыгрывают плавательные дорожки, по которым предстоит плыть спортсменам. Пусть среди участников заплыва участвуют 5 пловцов: два из команды России и по одному из США, Франции и Италии. Найдите вероятность того, что представители России будут плыть по соседним дорожкам.

Решение. Пловцы — различные люди. Поэтому существует $5! = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 120$ способов их перестановок по дорожкам бассейна. Все эти перестановки — равновозможны. Найдём число благоприятных исходов, то есть число всех вариантов из 120 возможных, в каждом из которых пловцы из России плывут по соседним дорожкам. Поступим так: сначала найдем число способов выбора двух соседних дорожек. Этих вариантов 4: (12), (23), (34), (45). В каждом из этих случаев наших пловцов можно распределить двумя способами. Получим 8 вариантов.

Возьмем один из этих 8 вариантов и найдем число способов распределения оставшихся трех пловцов по трем местам. Этих способов $3!=6$. Таким образом, для каждого из 8 вариантов распределения пловцов из России получаем 6 различных вариантов распределения всех пловцов по дорожкам бассейна, причем в каждом из этих вариантов наши пловцы плывут по соседним дорожкам. Получаем всего $8\cdot 6=48$ вариантов.

Теперь, пользуясь классическим определением вероятности, найдем, что искомая вероятность равна $P=\frac{48}{120}=\frac{2\cdot 24}{5\cdot 24}=\frac{2}{5}=0{,}4$. **Ответ:** 0,4.

Определение. Перестановкой из n элементов множества $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ *без повторений* (все элементы множества A различны) называется комбинация, содержащая все n элементов множества A, при этом две перестановки отличаются только порядком элементов, входящих в эти комбинации. Число P_n всех перестановок из n элементов множества A равно $P_n=n!$.

5.2. Задачи, в которых используется формула для числа перестановок без повторений

1. Найдите вероятность того, что в результате случайной расстановки всех цифр 1, 2, 3, 4, 5 (повторения цифр не допускаются) получится нечётное пятизначное число.

2. Найдите вероятность того, что в результате случайной расстановки всех цифр 1, 2, 3, 4, 5 (повторения цифр не допускаются) получится пятизначное число, делящееся на 4.

3. Найдите вероятность того, что в результате случайной расстановки букв *г, л, о, у* получится слово «*угол*». Результат округлите до сотых.

4. Найдите вероятность того, что в результате случайной расстановки букв *б, г, л, о, с, у* получится слово «*глобус*». Результат округлите до тысячных.

5. Найдите вероятность того, что в результате случайной расстановки букв *а, б, е, и, к, л, п, р, с, у* получится слово «*республика*».

6. Работник архива расставляет рабочие папки с номерами от 1 до 4 на полку. Какова вероятность того, что при случайной расстановке номера папок будут либо возрастать, либо убывать? Результат округлите до сотых.

7. Секретарь отправляет 5 писем по пяти адресам, раскладывая эти письма в конверты с написанными адресами случайным образом. Какова вероятность того, что **все** письма будут отправлены по правильным адресам? Результат округлите до сотых.

8. Секретарь отправляет 5 писем по пяти адресам, раскладывая эти письма в конверты случайным образом. Какова вероятность того, что хотя бы одно письмо будет отправлено по правильному адресу?

9. Секретарь отправляет 5 писем по пяти адресам, раскладывая эти письма в конверты случайным образом. Какова вероятность того, что ровно одно письмо будет отправлено по правильному адресу? Результат округлите до сотых.

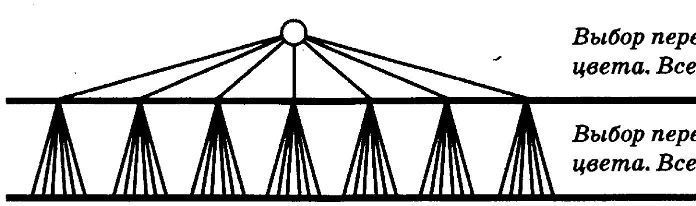
5.3. Размещения без повторений

Опять рассмотрим пример.

Пример 6. Пусть требуется нарисовать двухцветный флаг с горизонтальными линиями одной ширины, используя 7 цветов.

Важно понимать, что в нашем примере важны не только сами цвета полос, но и их расположение. Принято говорить: «*порядок важен и выбираем 2 из 7*». В подобных случаях имеем дело с ***размещениями* из 7 по 2**.

Подсчитаем, сколько требуемых флагов можно нарисовать. Для этого удобно использовать *дерево выбора* (см. выше)



Пояснения. Первый цвет можно выбрать семью способами. Второй — только шестью, поскольку флаг должен быть двуцветным. Всего, как видим, получим 42 варианта.

Если обобщить задачу на случай размещений n различных элементов(цветов) по k местам $(k \le n)$, то получим число A_n^k, равное числу различных размещений «***из n элементов по k***», которое равно $n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)$. Это произведение можно дополнить до факториала, если его умножить и, конечно, разделив на произведение $(n-k)(n-k-1)\ldots2\cdot1=(n-k)!$. Тогда получим, что общее число размещений A_n^k из n элементов по k местам без повторений равно $\frac{n!}{(n-k)!}$:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Замечание. Напомним, что $0! = 1$ и при $n = k$ получаем

$$A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n! = P_n .$$

Пример 7. Автомат случайным образом рисует двухцветный флаг с горизонтальными цветными линиями одной ширины, используя 7 цветов: темно-синий, синий, голубой, темно-зеленый, салатный, розовый и фиолетовый. Какова вероятность того, что получим флаг, составленный из холодных цветов: темно-синий, синий, голубой?

Решение. Общее число расцветок флага равно $A_7^2 = 7 \cdot 6 = 42$. Общее число флагов с холодной раскраской равно $A_3^2 = 3 \cdot 2 = 6$. Считаем, что все расцветки равновозможны. Поэтому используя классическое определение вероятности, получаем $P = \frac{6}{42} = \frac{1}{7} \approx 0{,}143$. **Ответ:** 0,143.

Определение. Размещением n элементов множества $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ *без повторений* (все элементы множества A различны) по k местам $(k \le n)$ называется комбинация, содержащая k элементов множества A, при этом два размещения отличаются либо порядком элементов, либо составом элементов, входящих в эти комбинации. Число A_n^k всех размещений n элементов множества A по k равно

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} .$$

5.4. Сочетания без повторений

Опять начинаем с примера. Пусть требуется выбрать три розы, безразлично какие, только именно розы, из корзины, в которой 5 роз и 10 хризантем. Сколькими способами это можно сделать? Во-первых, мы понимаем, что хризантемы не причём. Выбирать следует из роз. Понятно также, что все розы различны. Природа не любит повторений! Поэтому нужно выбрать три элемента из пяти и, как мы знаем (см. выше размещения без повторений), это можно сделать $A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ способами. Однако заметим, что по условию, нам безразлично, в каком порядке расположены розы. Поэтому число 60 нужно уменьшить, а именно во столько раз, сколькими способами можно переставить 3 элемента, то есть в $3! = 6$ раз. Тогда получим число способов выбора 3 элементов из 5 без учета порядка, а именно $\frac{60}{3!} = \frac{60}{6} = 10$ способов.

Если подумать, то нас интересует, сколько множеств из трех элементов можно составить из 5 элементов данного множества. Пусть есть эти пять элементов (различных роз): a,b,c,d,e. Сначала возьмем по одному элементу. Это можно сделать пятью способами: a,b,c,d,e. Теперь к каждому будем подбирать второй, без повторений. Получим

$$ab,ac,ad,ae,bc,bd,be,cd,ce,de$$

и теперь — третий:

$$abc,abd,abe,acd,ace,ade,bcd,bce,bde,\ cde\ .$$

Получили десять комбинаций или, как принято говорить, десять *сочетаний без повторений* из 5 элементов по 3. Принято говорить: «*порядок* ***не*** *важен и выбираем 3* ***из*** *5*» — значит это сочетания.

Если обобщить задачу на случай сочетаний по k элементов из данных n различных элементов (цветов) $(k \le n)$, то получим число C_n^k различных сочетаний, равное $\dfrac{A_n^k}{P_k} = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Определение. Сочетанием **из n** элементов множества $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ *без повторений* (все элементы множества A различны) **по k** $(k \le n)$ называется комбинация, содержащая k элементов множества A, при этом два сочетания отличаются только составом входящих элементов, но не их порядком (порядок не важен). То есть сочетанием из n элементов множества $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ *без повторений* по k называется любое множество, содержащее k элементов, взятых из множества $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Число C_n^k всех сочетаний из $\boldsymbol{n}$ элементов множества A по $\boldsymbol{k}$ без повторений равно

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Пример 8. В кошельке лежат 3 пятирублевые монеты и семь десятирублевых. Какова вероятность того, что, взяв случайным образом (например, в темноте и в грубых перчатках) две монеты, обе они окажутся десятирублевыми?

Решение. Общее число способов взять две монеты из 10 равно $C_{10}^2 = \dfrac{10!}{2!(10-2)!} = \dfrac{10!}{2!8!} = \dfrac{10 \cdot 9}{2} = 45$ способам. Число благоприятных способов выбрать две десятирублевые монеты равно $C_7^2 = \frac{7!}{2!(7-2)!} = \frac{7!}{2!5!} = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21$. Следовательно, искомая вероятность равна $P = \frac{C_{10}^2}{C_7^2} = \frac{21}{45} = \frac{7}{15} \approx 0{,}467$. **Ответ:** 0,467.

5.5. Выбор пары

Еще один тип задач по теории вероятностей, примыкающий к понятию «Число сочетаний», можно решать с помощью комбинаторного числа C_n^k так, как это сделано выше, но можно и по-другому, **более просто**.

Суть таких задач такова: множество людей или предметов, о которых идет речь, разбивается на несколько групп, и требуется найти вероятность того, что два человека или предмета попали в одну группу (если речь идет о соревновании — сыграли между собой) или наоборот, попали в разные группы. Можно условно назвать такие задачи задачами на «выбор пары». Рассмотрим несколько примеров:

Пример 1. В классе 26 человек, из них 2 блондина. Класс разбили на две равные подгруппы по английскому языку. Найти вероятность того, что оба блондина окажутся в одной группе.

Решение. Рассмотрим одного из блондинов. Он совершенно точно окажется в одной из подгрупп, назовем её 1-й подгруппой. Куда может попасть второй?

1 подгруппа	Б												
2 подгруппа													

Для второго существует ровно 25 исходов: 12 мест в первой подгруппе (одно уже занято!) и 13 мест во второй. Все они (места), конечно, равновероятны. Поэтому вероятность того, что оба блондина попадут в одну подгруппу, равна $\frac{12}{25}$=0,48. Обратим внимание, что заодно мы выяснили и вероятность того, что блондины попадут в разные группы, она равна $\frac{13}{25} = 0{,}52$.

Обратим внимание, что подобный способ решения работает только в том случае, если класс делится на группы одинакового размера (см. также Пример 3).

Пример 1а. В классе 25 человек, из них 2 блондина. Класс разбили на две подгруппы по английскому языку — 12 и 13 человек. Найти вероятность того, что оба блондина окажутся в одной группе.

Решение. Здесь, к сожалению, аналогичное предыдущему решение не проходит, ведь группы разной величины! Приходится использовать общий подход.

Сначала найдём общее число способов разделения 25 учеников на две подгруппы по 12 и 13 человек. Если выбрать 12 человек в одну подгруппу, то вторая подгруппа по составу определится однозначно. То же самое, если выбрать 13 человек в одну подгруппу, то вторая подгруппа по составу определится однозначно. Поэтому число способов разделения 25 учеников на две подгруппы по 12 и 13 человек равно $C_{25}^{12}=C_{25}^{13}=\dfrac{25!}{12!\times 13!}$ (пока вычислять не будем). Итак, $N=\dfrac{25!}{12!\times 13!}$.

Теперь найдём число m благоприятных разделений класса, при котором 2 блондина окажутся в одной подгруппе. Это число m складывается из всех первых подгрупп по 12 человек, в которых записаны эти наши блондины и из всех вторых подгрупп по 13 человек, среди которых 2 блондина. Число подгрупп по 12 человек равно $C_{23}^{10}=\dfrac{23!}{10!\times 13!}$ (берём сочетания ***из*** 23 ***по*** 10, поскольку 2 блондина уже записаны в первую подгруппу), а число подгрупп по 13 человек — $C_{23}^{11}=\dfrac{23!}{11!\times 12!}$.

Следовательно, искомое число благоприятных исходов равно

$$m=C_{23}^{10}+C_{23}^{11}=\frac{23!}{10!\times 13!}+\frac{23!}{11!\times 12!}=\frac{23!(11\times 12+12\times 13)}{12!\times 13!}=\frac{23!\times 288}{12!\times 13!}.$$

Чтобы найти искомую вероятность, осталось найти отношение

$$\frac{\dfrac{23!\times 288}{12!\times 13!}}{\dfrac{25!}{12!\times 13!}}=\frac{(23!\times 288)\cdot(12!\times 13!)}{(12!\times 13!)\cdot 25!}=\frac{288}{25\times 24}=\frac{48}{100}=0{,}48.$$

Возможен и **иной подход** для вычисления искомой вероятности.

В классе 25 человек. Занумеруем всех учеников числами от 1 до 25. Пусть в первую группу попадут номера от 1 до 12, а во вторую — от 13 до 25. Рассмотрим число способов присвоить двум блондинам два номера в пределах от 1 до 12: это будет число сочетаний $C_{12}^{2}=\dfrac{12\cdot 11}{2}=66$. Количество способов присвоить двум блондинам два номера в пределах от 13 до 25 $C_{13}^2 = \frac{13 \cdot 12}{2} = 78$. И, наконец, общее число способов присвоить двум блондинам какие-то два номера от 1 до 25 равно $C_{25}^2 = \frac{25 \cdot 24}{2} = 300$. Значит, всего исходов 300, из которых благоприятствуют нашему событию 66+78=144, и ответ получается такой: $\frac{144}{300} = 0{,}48$. **Ответ:** 0,48.

Пример 2. В турнире по шахматам участвуют 56 гроссмейстеров, из них 12 россиян. Найти вероятность того, что в первом туре Степан Лиходеев сыграет со своим соотечественником.

Решение. Будем исходить из того, что пары в первом туре выбираются жеребьевкой, то есть случайно. Зафиксируем Степана за одним из игровых столиков, и будем искать ему пару. Ясно, что выбирать надо из 55 участников (сам с собой он не может играть!), а россиян среди них будет 11. Таким образом, получается ответ: $\frac{11}{55} = 0{,}2$. **Ответ:** 0,2.

Пример 3. В классе 21 ученик, для составления графика дежурств их разбили на 7 групп по 3 человека случайным образом. Найдите вероятность того, что учащиеся Таня и Даня попали в одну группу.

Решение. Таня совершенно точно попала в одну из групп. Пусть это группа номер 1. Тогда посчитаем количество различных вариантов для Дани. В первой группе для него есть два места (одно уже занято Таней), а всего вариантов 20.

1 группа	**Таня**		
2 группа			
3 группа			
4 группа			
5 группа			
6 группа			
7 группа			

Поэтому всего исходов 20, а благоприятных из них 2. Получаем ответ: $\frac{2}{20} = 0{,}1$. **Ответ:** 0,1.

Для сравнения приведём решение последней задачи с помощью понятия числа сочетаний.

Всего в классе 21 человек, поэтому количество способов выбрать два места в таблице дежурств для Тани и Дани равно $C_{21}^2 = \frac{21 \cdot 20}{2} = 210$. Сколько из этих способов являются благоприятными? Найдем сколькими способами можно разместить Таню и Даню в первой группе: это число равно $C_3^2 = 3$. Но групп всего семь, поэтому существует 7·3=21 возможность поместить Таню и Даню в одной группе. Таким образом, получаем ответ: $\frac{21}{210} = 0{,}1$. **Ответ:** 0,1.

5.6. Дополнительные задачи

1. Вычислить $C_{2013}^1 + C_{2013}^{2012}$.

2. Вычислить $C_{2013}^2 - C_{2012}^2$.

3. Докажите, что $C_{2013}^2 + C_{2014}^2 = 2013^2$.

4. Решите уравнение: $C_n^3 + C_n^2 = 15(n-1)$. (n — натуральное число).

5. Решите уравнение: $C_n^2 = 66$. (n — натуральное число.)

6. Что больше — P_6 или C_{12}^6?

7. В классе учатся Коля и Вася. Класс случайным образом делят на группы по физкультуре (11 и 13 человек). Найдите вероятность, что Коля и Вася попадут в одну группу.

8. В классе учатся две подруги — Света и Даша. На школьных соревнованиях класс разделили на 4 группы по 5 человек каждая. Найдите вероятность того, что Света и Даша попадут в одну группу.

9. В заявке сборной России 23 футболиста. Сколькими способами можно выбрать 11 человек стартового состава?

10. В заявке сборной России 23 футболиста. Найдите вероятность угадать 11 человек стартового состава, если известно, что все могут выйти на поле с равной вероятностью.

11. Тест состоит из 5 заданий. Какова вероятность угадать правильный ответ хотя бы в одном задании теста, если к каждому заданию дано по четыре варианта ответа, из которых только один верный?

12. Тест состоит из 5 заданий. Какова вероятность угадать правильные ответы ровно в двух заданиях теста, если к каждому заданию дано по четыре варианта ответа, из которых только один верный?

13. Тест состоит из 5 заданий. Какова вероятность угадать правильные ответы ровно в трех заданиях теста, если к каждому заданию дано по четыре варианта ответа, из которых только один верный?

14. Ученики 9-го класса изучают 10 предметов. Сколькими способами можно составить расписание уроков на один день так, чтобы было 7 различных уроков?

15. Ученики 9-го класса изучают 10 предметов. Какова вероятность угадать расписание на один день, если известно, что в этот день будет 7 уроков, и все они различны?

16. Собрание сочинений Джека Лондона состоит из 8 томов. Сколькими способами можно расставить эти тома на книжкой полке?

17. Решите уравнение: $A_x^5 = 42A_x^3$ (x — натуральное число).

18. На полке стоит 30 книг, 10 из которых я раньше читал. Не глядя, я снимаю с полки 3 книги. Найдите вероятность того, что я уже читал каждую из них.

ЧАСТЬ II. ЭЛЕМЕНТЫ СТАТИСТИКИ, ТАБЛИЦЫ, ОБРАБОТКА ДАННЫХ

1. СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Рассмотрим статистические характеристики данных, полученных в результате измерения некоторых величин таких, как *температура, давление, длина, площадь, объем, баллы рейтинга и т.п.*

Пусть, например, известны замеры температуры в течение одного дня в определенном месте. Пусть эти данные (в градусах Цельсия), они образуют *выборку*, таковы

1	2	2,3	1,8	1,5	2	2,1	2,2	2,2	2,5	2,4	2,1
2	2,2	2,1	1,9	1,9	1,8	1,9	1,7	1,5	1,5	1,2	1,1

Если расположить эти числа в порядке возрастания, то полученный ряд

1	1,1	1,2	1,5	1,5	1,5	1,7	1,8	1,8	1,9	1,9	1,9
2	2	2	2,1	2,1	2,1	2,2	2,2	2,2	2,3	2,4	2,5

чисел называется ***вариационным рядом*** *(упорядоченной выборкой, статистической выборкой)*; члены вариационного ряда иногда называются *вариантами.*

Мы видим, что некоторые варианты повторяются. Число таких повторений называется ***частотой варианты.*** Например, варианта 1,2 имеет частоту 1, а варианта 2,2 — 3. Используя понятие частоты (точнее *абсолютной частоты варианты*) вариационный ряд иногда можно сократить, дополнив его строкой с частотами, которые обозначаются буквой n_i, где i — порядковый номер варианты. В нашем примере получим

t_i	1	1,1	1,2	1,5	1,7	1,8	1,9	2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5
t_i	1	1	1	3	1	2	3	3	3	3	1	1	1

Сумма всех частот равна ***объему выборки:***

$$1+1+1+3+1+2+3+3+3+3+1+1+1=24.$$

Среднее арифметическое всех вариант называется *средним значением выборки* или ***выборочным средним***, которое обозначается $\overline{t}$. В нашем случае среднее значение равно

$$\bar{t} = \frac{1+1{,}1+1{,}2+3\cdot 1{,}5+1{,}7+2\cdot 1{,}8+3\cdot 1{,}9+3\cdot 2+3\cdot 2{,}1+3\cdot 2{,}2+2{,}3+2{,}4+2{,}5}{24} = \frac{44{,}9}{24} = 1{,}9.$$

Полученный результат означает, что в течение дня средняя температура в данном месте составила 1,9 °C .

Мы видим, что в течение дня температуры (варианты) отклонялись от среднего значения. Среднее значение квадрата отклонения варианты от среднего значения называется ***дисперсией*** выборки. Дисперсия обозначается буквой D_t и показывает, каково ***среднее значение квадрата отклонения*** величины от ее среднего значения.

Таким образом, чтобы найти дисперсию выборки нужно:
найти отклонения всех вариант от среднего значения,
возвести эти отклонения в квадрат и
найти среднее полученных значений.

Обычно все вычисления проводят в таблице.

t_i	1	1,1	1,2	1,5	1,7	1,8	1,9	2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5
$t_i-\bar{t}$	–0,9	–0,8	–0,7	–0,4	–0,2	–0,1	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
n_i	1	1	1	3	1	2	3	3	3	3	1	1	1
$(t_i-\bar{t})^2$	0,81	0,64	0,49	0,16	0,04	0,01	0	0,01	0,04	0,09	0,16	0,25	0,36

Теперь находим дисперсию

$$D_t = \frac{0{,}81+0{,}64+0{,}49+3\cdot 0{,}16+0{,}04+2\cdot 0{,}01+3\cdot 0}{24} + \frac{3\cdot 0{,}01+3\cdot 0{,}04+3\cdot 0{,}09+0{,}16+0{,}25+0{,}36}{24} = \frac{3{,}67}{24} \approx 0{,}15 .$$

Итак, дисперсия — среднее значение квадрата отклонения температуры $(t_i-\bar{t})^2$ в данный момент от среднего значения $\bar{t}$ температуры составляет $0{,}15(градЦ)^2$. Обратите внимание на размерность: квадратные градусы Цельсия! Эта величина не показывает линейное среднее значение отклонения. Для устранения такой странной размерности обычно вычисляют *рассеяние* вариант от среднего значения, равное квадратному корню из дисперсии. Рассеяние принято обозначать буквой σ_t. В нашем примере $\sigma_t = \sqrt{D_t} = \sqrt{0{,}15} \approx 0{,}39$.

При некоторых исследованиях используются другие средние: **медиана** M_e и **мода** M_o.

Определение. *Медианой* M_e *упорядоченной выборки называется число, равное значению варианты, которое делит выборку на две, содержащие одинаковое число вариант.*

Пример. Рассмотрим упорядоченную варианту среднего роста учащихся 11 класса:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
h_i	1,74	1,76	1,76	1,76	1,77	1,77	1,78	1,8	1,81	1,81	1,82	1,84	1,85

Выборка содержит 13 вариант, поэтому варианта, делящая выборку пополам, равна $h_7 = 1{,}78$. Следовательно, медиана $M_e = h_7 = 1{,}78$.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
h_i	1,74	1,76	1,76	1,76	1,77	1,77	1,78	1,8	1,81	1,81	1,82	1,84

Если бы выборка содержала 12 вариант, то медиана равнялась бы **любому числу,** лежащему между h_6 и h_7.

Например, для упорядоченной выборки $h_6 = 1{,}77$, $h_7 = 1{,}78$, поэтому медиана выборки есть любое число, лежащее между ними. **Обычно выбирают среднее арифметическое этих вариант**: $M_e = 0{,}5(h_6 + h_7) = 1{,}775$. Но это необязательно, можно взять, например, и $1{,}772$.

Отметим, что вероятность того, что значение варианты больше медианы равна вероятности того, что значение варианты меньше медианы и равно 0,5.

Определение. *Модой* M_o *упорядоченной выборки называется число, равное значению варианты, которое имеет наибольшую частоту (чаще других встречается в вариационном ряде).*

Например, для выборки, приведенной выше, мода равна $M_o = h_2 = h_3 = h_4 = 1{,}76$, поскольку другие значения встречаются реже.

Выборка может иметь несколько различных мод. Примером может служить следующая выборка,

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
h_i	1,74	1,76	1,76	1,76	1,77	1,77	1,77	1,8	1,81	1,81	1,82	1,84

которая имеет две моды:

$$M_o' = h_2 = h_3 = h_4 = 1{,}76 \text{ и } M_o'' = h_5 = h_6 = h_6 = 1{,}77.$$

Важно знать, что вероятность того, что случайно выбранное число а равно моде: $a = M_o$ *— наибольшая из всех вероятностей того, что это число а равно некоторому иному значению варианты. Например,* *вероятность того, что случайно выбранное число* $a = h_1 = 1{,}74$ *равна* $1/12$, *а вероятность того, что* $a = M_o' = 1{,}76$ *равна* $1/4$ *и мы видим, что j больше, чем 1/12 втрое.*

2. ЗАДАЧИ О СРЕДНЕМ АРИФМЕТИЧЕСКОМ И МЕДИАНЕ

Часто сложность представляют чисто логические задачи на среднее значение и медиану, то есть задачи, где ничего считать не надо, а требуется только четко знать определение соответствующей характеристики. Добавляет сложности и часто несколько запутанное условие. Например:

Задача 1. Средний рост ученика в классе составляет 171 см (то есть среднее арифметическое значений роста для всех учеников класса равно 171 см). Известно, что в классе учится Вася Васин, чей рост равен 180 см. Выберите верное утверждение:

А. В классе есть ученик ростом 162 см.

Б. В классе есть ученик ростом ровно 171 см.

В. В классе есть ученик ростом менее 171 см.

Г. Вася Васин — самый высокий ученик класса.

Решение. Рассмотрим все утверждения по очереди:

«А» — это утверждение, очевидно, неверно, так как про значения роста остальных учеников (кроме Василия) ничего не сказано. В классе может быть ученик ростом 162 см, а может и не быть, информации у нас недостаточно.

«Б» — этот ответ довольно часто выбирают школьники при решении данной задачи, но он, конечно, тоже неверен. Ведь из того, что среднее значение некоторой величины равно a, не следует, что эта величина хотя бы раз принимает значение a. К примеру, класс мог состоять из девяти человек ростом 170 см, и Васи Васина. Тогда среднее арифметическое равно $\frac{170 \cdot 9 + 180}{10} = 171$ см, но в классе нет никого ростом **ровно** 171 см.

«В» — пусть это не так, и в классе нет учеников ниже 171 см. Тогда среднее арифметическое будет **больше** 171 см (все ученики не ниже 171 см и есть еще Вася Васин!), что противоречит условию задачи. Значит, ответ «В» верен.

«Г» — довольно правдоподобное утверждение, но как и в пункте «А» у нас нет стопроцентной уверенности, так как информации слишком мало. В классе могут быть и более высокие ученики. Значит, утверждение «Г» неверно. **Ответ:** В.

Задача 2. Стюардесса должна иметь рост не менее 170 см. Есть четыре группы кандидаток в стюардессы: А, Б, В, Г. В какой из них, по крайней мере, половина девушек, может работать стюардессами, если выполнены следующие условия:

А — рост самой высокой девушки равен 185 см;

Б — средний рост девушек равен 171 см;

В — рост самой невысокой девушки 168 см;

Г — медиана роста девушек равна 170,5 см.

Решение. Рассмотрим все возможности по очереди:

А — из того, что самая высокая девушка имеет рост 185 см, не следует никакой информации о росте остальных. Поэтому про группу А ничего определенного утверждать нельзя.

Б — пусть в этой группе всего 3 девушки: две ростом по 169 см, и одна 175 см. Тогда их средний рост равен $\frac{169+169+175}{3}=171$ см, однако две из трех кандидаток не подходят под условие. Поэтому про эту группу нельзя утверждать, что хотя бы половина ее участниц не ниже 170 см.

В — про эту группу тоже ничего не понятно, как и про А. Рост одной девушки ничего не говорит нам об остальных.

Г — по определению, если медиана набора чисел равна 170,5, то, по крайней мере, половина чисел этого набора не меньше 170,5. А значит не менее половины девушек из группы Г не ниже 170,5 см, что вполне удовлетворяет условию. Поэтому верный ответ: «Г». **Ответ:** Г.

Рассмотрим традиционные задачи на вычисление среднего арифметического и медианы.

Задача 3. В таблице показано время (в минутах), которое тратил Петя на дорогу из школы домой каждый день в течение недели. Найдите среднее время, которое он тратил каждый день на дорогу из школы домой.

пн	вт	ср	чт	пт	сб
10	12	18	8	6	9

Решение. В задаче просто требуется найти среднее арифметическое набора чисел 10,12,18,8,6,9. Вычисляем: $\frac{10+12+18+8+6+9}{6}=10{,}5$.

Ответ: 10,5 минут.

Задачи могут быть усложнены, в таких случаях приходится вычислять медиану и среднее арифметическое не один, а два или более раз.

Задача 4. В таблице показано время (в минутах), которое тратили Петя и Паша на дорогу из школы домой каждый день в течение недели.

Найдите, кто из мальчиков в среднем тратил больше времени на дорогу, и на сколько минут.

	пн	вт	ср	чт	пт	сб
Петя	10	12	18	8	6	9
Паша	13	7	8	9	11	9

Решение. Петя в среднем тратит на дорогу домой $\frac{10+12+18+8+6+9}{6}=10{,}5$ минут каждый день. Паша в среднем тратит на дорогу домой $\frac{13+7+8+9+11+9}{6}=9{,}5$ минут. 10,5–9,5=1. **Ответ:** Петя, на одну минуту.

Задача 5. Костя в течение первой четверти получил следующие оценки по математике: 2,3,3,2,2,2,2,5,2,5. Найдите, насколько отличается медиана его оценок от его среднего балла.

Решение. Вычислим средний балл:

$$\frac{2+3+3+2+2+2+2+5+2+5}{10}=2{,}8.$$

Теперь упорядочим оценки по возрастанию: 2,2,2,2,2,2,3,3,5,5. Медиана этого набора чисел равна, конечно, двум. Таким образом, медиана меньше, чем среднее арифметическое на 2,8–2=0,8. **Ответ:** Медиана меньше на 0,8.

3. ВЫБОР СТАТИСТИЧЕСКОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДЛЯ ОЦЕНКИ ЯВЛЕНИЯ

Среднее арифметическое, медиана, мода, взвешенное среднее и многие другие «средние» призваны показать некоторое «характерное», «типичное» значение варианты для данной выборки. Как мы видели в различных задачах, значения этих характеристик могут отличаться друг от друга, притом значительно. Обычно, когда в задачах говорят о среднем значении какой-то величины, имеется в виду именно среднее арифметическое значений этой величины. Как правило, более разумно «характеризующей» данную выборку величиной является среднее арифметическое, однако это не всегда так. В некоторых случаях медиана является более адекватной оценкой. Это происходит в тех случаях, когда данные содержат так называемые *выбросы*, то есть отдельные значения вариант, резко отличающиеся от остальных, например, в большую сторону. Эти выбросы заметно влияют на среднее арифметическое, а на медиану вследствие своей малочисленности влияния практически не оказывают. Рассмотрим популярный пример:

Пример 1. Пусть на некотором предприятии трудятся 5 рабочих с месячной зарплатой — 25 тысяч рублей каждый, уборщица с зарплатой

15 тысяч рублей, бухгалтер с зарплатой 30 тысяч рублей и генеральный директор с зарплатой 230 тысяч рублей. Сколько в среднем зарабатывает сотрудник данного предприятия?

Средняя зарплата, если считать ее как среднее арифметическое, равна $\frac{5 \cdot 25+15+30+230}{8}=50$ тысяч рублей. Конечно, это число служит плохой оценкой средней зарплаты в коллективе. Ведь 7 из восьми сотрудников получают намного меньше, чем 50 тысяч. Значительно разумнее в данной задаче рассмотреть медиану. Упорядочим зарплаты: 15, 25, 25, 25, 25, 25, 30, 230. Медиана равна 25, и действительно можно сказать, что заработок среднего сотрудника этого предприятия равен 25 тысячам рублей. То же самое значение даст мода — значение зарплаты, которое встречается чаще всего.

Пример 2. В таблице показано количество драматических театров в российских городах-миллионерах.

Город	Кол-во театров
Москва	120
Санкт-Петербург	80
Казань	12
Новосибирск	9
Нижний Новгород	8
Омск	7
Пермь	7
Самара	5
Волгоград	5
Ростов-на-Дону	4
Екатеринбург	4
Челябинск	4

Решение. Среднее арифметическое числа драматических театров для российских городов-миллионеров равно

$$\frac{120+80+12+9+8+7+7+5+5+4+4+4}{12} \approx 22.$$

Но такое количество театров явно не характерно для среднего города-миллионера. Медиана же для этого набора чисел равна 7, что значительно лучше дает представление о типичном количестве театров в российском городе-миллионере.

Пример 3. В школе, где учится Илья, принята десятибалльная система оценивания.

В классе Ильи годовые оценки учеников по геометрии — следующие: 8, 5, 4, 10, 4, 4, 4, 5, 4, 10, 4, 4, 6, 4, 4. Найдите медиану, моду и среднее арифметическое этого набора оценок. Какая из этих характеристик, на Ваш взгляд, лучше отражает среднюю оценку по геометрии в этом классе? Ответ обоснуйте.

Решение. Упорядочим оценки: 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 8, 10, 10.

Медиана данного набора оценок равна 4. Мода тоже равна 4.

Среднее арифметическое равняется $\frac{9\cdot 4+2\cdot 5+6+8+2\cdot 10}{15}=5\frac{1}{3}$.

В данном случае, конечно, медиана и мода лучше отражают ситуацию с оценками по геометрии в классе.

Вообще, часто в задачах, где измеряется некоторый рейтинг (например, оценки в школе, или места в спортивных состязаниях), лучше характеризует среднюю ситуацию именно мода. А в случае, ***когда мод несколько*** (такие распределения чисел называются *полимодальными*), ***корректнее всего использовать медиану***.

4. ЗАДАНИЯ НА ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК

1. В ящике лежит 12 белых и 18 черных шаров. Случайным образом из этого ящика извлекают 5 шаров. Какова вероятность того, что эти шары одного цвета? Результат округлите до тысячных.

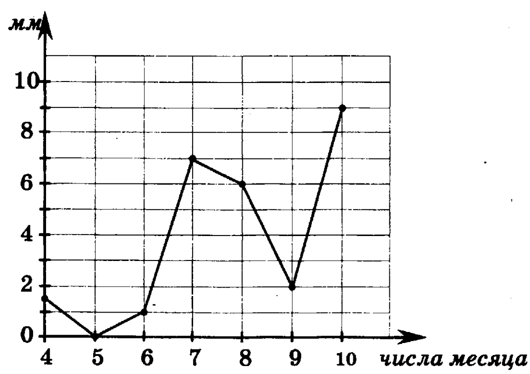
2. В ящике лежит 12 белых и 18 черных шаров. Случайным образом из этого ящика извлекают 5 шаров. Какова вероятность того, что среди этих шаров три белых и два черных шара? Результат округлите до тысячных.

3. В ящике лежит 12 белых и 18 черных шаров. Случайным образом из этого ящика извлекают 5 шаров. Какова вероятность того, что среди этих шаров не менее трех белых шаров? Результат округлите до тысячных.

4. В кармане Паши лежит 7 монет: три по 5 руб. и 4 по 10 руб. Паша случайно достал из кармана три монеты. Какова вероятность того, что в кармане Паши осталось одинаковое число монет каждого вида? Результат округлите до сотых.

5. В кармане Паши лежит 7 монет: три по 5 руб. и 4 по 10 руб. Паша случайно достал из кармана пять монет. Какова вероятность того, что в кармане Паши осталось всего две монеты разного достоинства? Результат округлите до сотых.

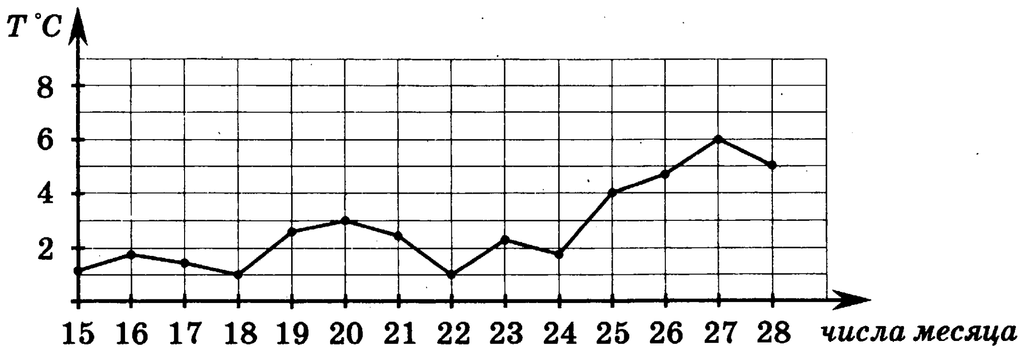
6. На рисунке изображен график осадков в г. Калининграде с 4 по 10 февраля. На оси абсцисс откладываются дни, на оси ординат — осадки в мм. Определите по рисунку, сколько дней из данного периода выпадало от 2 до 8 мм осадков. Вычислите среднее количество (в мм) осадков за все время наблюдений, вычислите дисперсию и рассеяние, медиану и моду. Вычисления округляйте до десятых[1].



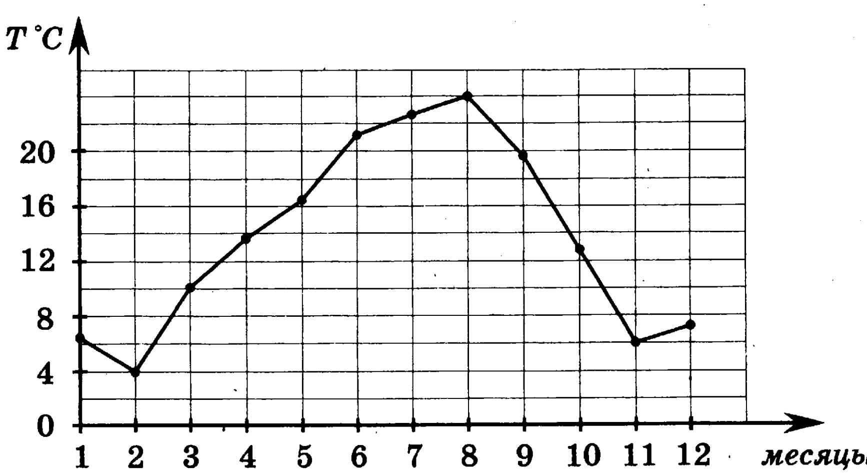
7. На рисунке жирными точками показана среднесуточная температура воздуха в Бресте каждый день с 6 по 19 июля. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Для наглядности жирные точки соединены линией. Определите по рисунку, какого числа среднесуточная температура была наименьшей за указанный период. Вычислите среднюю температуру за все время наблюдений, вычислите дисперсию и рассеяние, медиану и моду. Вычисления округляйте до десятых.

[1] Если отбрасываемая цифра равна 5, то предыдущая цифра увеличивается на 1.

8. На рисунке жирными точками показана среднесуточная температура воздуха в Пскове каждый день с 15 по 28 марта 1995 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Для наглядности жирные точки соединены линией. Определите по рисунку, какой была наибольшая среднесуточная температура за указанный период. Вычислите среднюю температуру за все время наблюдений, вычислите дисперсию и рассеяние, медиану и моду[1]. Вычисления округляйте до десятых.

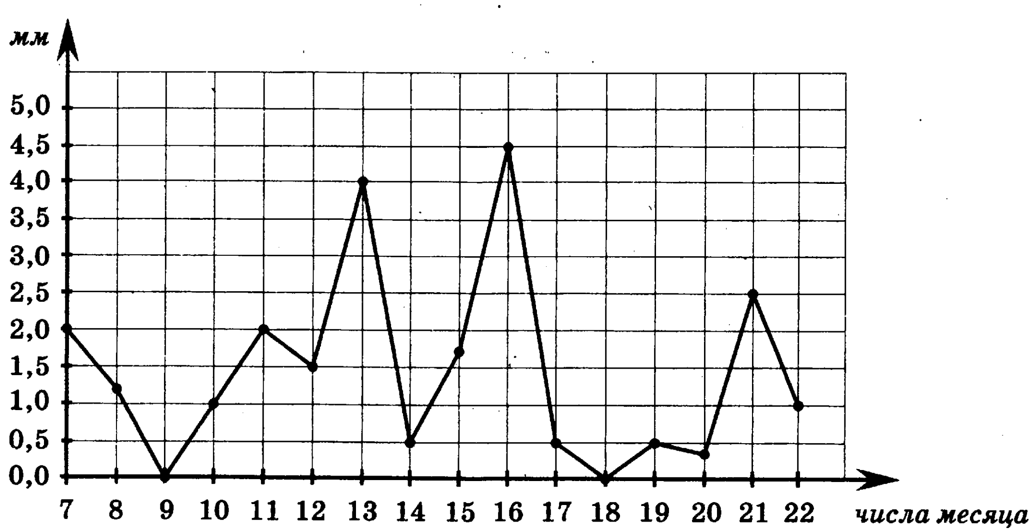


9. На рисунке жирными точками показана среднемесячная температура воздуха в Сочи за каждый месяц 1970 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Для наглядности жирные точки соединены линией. Определите по рисунку, какой была наибольшая среднемесячная температура в Сочи в 1970 году. Ответ дайте в градусах Цельсия. Вычислите среднюю температуру в Сочи за все время наблюдений, вычислите дисперсию и рассеяние, медиану и моду. Вычисления округляйте до десятых.



[1] Если значение температуры не считывается по графику однозначно, то это значение выбирается приближённо с точностью до $0{,}2\ ^\circ C$. Например, температура 17 марта равна $1{,}5\ ^\circ C$, а 23-го — $2{,}2\ ^\circ C$.

10. На рисунке жирными точками показано суточное количество осадков, выпадавших в Мурманске с 7 по 22 ноября 1995 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — количество осадков, выпавших в соответствующий день, в миллиметрах. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, какое наибольшее количество осадков выпадало в период с 7 по 14 ноября. Ответ дайте в миллиметрах. Вычислите среднее количество осадков за все время наблюдений, вычислите дисперсию и рассеяние, медиану и моду. Вычисления округляйте до десятых.



11. В среднем у каждого ученика класса, где учится Толя, есть по 7 тетрадок. У Толи 6 тетрадок. Какое из следующих утверждений верно?

1) Обязательно найдется ученик, у которого ровно 7 тетрадок.
2) Обязательно найдется человек, у которого хотя бы 9 тетрадок.
3) У Толи меньше всех тетрадок в классе.
4) Обязательно найдется ученик, у которого есть хотя бы 8 тетрадок.

12. В среднем каждый ученик класса, в котором учится Сережа, тратит на дорогу до школы 36 минут. Сережа тратит на дорогу 19 минут. Какое из следующих утверждений верно?

1) Обязательно найдется ученик класса, который тратит на дорогу более 40 минут.

2) Обязательно найдется ученик класса, который тратит на дорогу ровно 36 минут.

3) В классе каждый ученик, кроме Сережи, тратит на дорогу более 36 минут.

4) Обязательно найдется ученик, который тратит на дорогу более 36 минут.

13. Средний рост жителей города, в котором живет Даша, равен 170 см. Рост Даши — 173 см. Какое из следующих утверждений верно?

1) Даша — самая высокая девушка в городе.
2) Обязательно найдется девушка ниже 170 см.
3) Обязательно найдется человек ростом менее 171 см.
4) Обязательно найдется человек ростом 167 см.

14. Вася перешел из 9 класса «А» в 9 класс «Б». Могло ли так случиться, что в результате средний рост в обоих классах увеличился?

15. В школе, где учится Глеб, принята десятибалльная система оценивания.

В классе Глеба годовые оценки по геометрии: 10, 9, 4, 10, 7, 4, 4, 5, 4, 4, 4, 4, 6, 5, 4. Найдите медиану, моду и среднее арифметическое этого набора оценок. Какая из этих характеристик, на Ваш взгляд, лучше отражает среднюю оценку по геометрии в классе? Ответ обоснуйте.

16. Даны два набора чисел:

1) 3; 4; 3; 5; 6; 5; 3; 3; 6; 2
2) 0; 9; 0; 9; 0; 2; 1; 8; 7; 4.

Вычислите и сравните средние арифметические этих наборов. То же задание для дисперсий этих наборов.

17. Даны два набора чисел:

1) −4; −2; 3; 7; 8; −5; 3; −8; 0; 3
2) 0; 2; 0; 3; 0; −10; 11; 8; −7; −2.

Вычислите и сравните средние арифметические этих наборов. То же задание для дисперсий этих наборов.

18. Даны два набора чисел:

1) 2; 4; 3; 3; 2; 5; 3; 2; 4; 4; 3
2) 0; 9; 0; 9; 0; 2; 1; 8; 7; 2; 6.

Не производя вычислений, укажите, какой из наборов имеет большую дисперсию.

19. Машинистки Инна и Мария перепечатывали роман.

В таблице показано количество страниц, которое каждая из них перепечатывала каждый день в течение недели. Найдите, кто из девушек в среднем печатал в день больше страниц и на сколько.

	пн	вт	ср	чт	пт	сб	вс
Инна	30	42	18	18	16	29	15
Мария	33	27	28	25	11	24	27

20. Для работы в модельном агентстве отбирают кандидаток с ростом не менее 172 см. Есть 4 группы девушек. В какой из групп заведомо половина девушек подходит по росту? Про группы известно следующее:

1) в первой группе средний рост равен 174 см.
2) во второй группе наибольший рост равен 184 см.
3) в третьей группе минимальный рост равен 162 см.
4) в четвертой группе медиана роста равна 174 см.

21. В таблице даны результаты четырех стрелков, показанные им на тренировке. Тренер решил послать на соревнования того стрелка, у которого в среднем на один выстрел приходится больше выбитых очков. Кого из стрелков выберет тренер?

Фамилия	Число выстрелов	Число выбитых очков
Александров	30	240
Богомолов	48	210
Васильев	60	260
Григорьев	25	190

22. Игрок в боулинг сделал 5 бросков и выбил 8, 9, 7, 10, 6 кеглей.

Найдите среднее арифметическое этого ряда чисел.

23. Продажа фруктов в магазине за неделю представляет ряд 345, 229, 456, 358, 538, 649, 708 кг в день. Найдите разницу между средним арифметическим и медианой этого ряда чисел.

24. В течение четверти Костя получил следующие отметки по математике:

три «двойки», две «тройки», десять «четверок» и пять «пятерок». Найдите сумму среднего арифметического и медианы его оценок.

25. Общая масса восьми десятидневных щенков равна 4 кг 480 г. Щенок Тузик имеет массу 590 г. Какое из следующих утверждений наверняка справедливо?

1) Средняя масса щенка равна 580 г.
2) Обязательно есть щенок с массой 530 г.
3) Обязательно есть щенок с массой 560 г.
4) Обязательно есть щенок с массой менее 560 г.

ОТВЕТЫ

ЧАСТЬ I

3.3. ЗАДАЧИ НА ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0,25	0,09	0,02	0,01	0,008	0,002	0,84	0,8	0,4	0,9	0,11

12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
0,03	0,375	0,06	0,94	0,475	0,4	0,28	0,2	0,35	0,42	0,4

23	24	25
0,35	0,28	0,03

4.2. ЗАДАЧИ НА ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1	2	3	4	5	6	7
0,995	0,92	0,98	114	18	0,996	42

5.2. ЗАДАЧИ, В КОТОРЫХ ИСПОЛЬЗУЕТСЯ ФОРМУЛА ДЛЯ ЧИСЛА ПЕРЕСТАНОВОК БЕЗ ПОВТОРЕНИЙ

1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,6	0,2	0,04	0,001	$2{,}75\cdot 10^{-7} \approx 0{,}0000003$	0,08	0,01	0,625	0,33

5.6. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

1	2	3	4	5	6	7	8	9
4026	2012		9	12	Второе число больше	$\frac{133}{276}$	$\frac{4}{19}$	1352078

10	11	12	13	14	15	16	17	18
$\frac{1}{1352078}$	$\frac{781}{1024}$	$\frac{135}{512}$	$\frac{45}{512}$	604800	$\frac{1}{604800}$	40320	10	$\frac{6}{203}$

ЧАСТЬ II

4. ЗАДАНИЯ НА ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК

1	2	3	4	5
$\frac{40}{609} \approx 0{,}066$	$\frac{1870}{7917} \approx 0{,}236$	$\frac{803}{2639} \approx 0{,}304$	$\frac{18}{35}$ 0,51	$\frac{4}{7} \approx 0{,}57$

6	7	8
3 дня; среднее 3,8 мм; дисперсия 10,4 мм^2; рассеяние 3,2 мм; медиана $M_e = 2{,}0$; мода не определена однозначно	16 июля; среднее $\frac{282{,}5\,^\circ\mathrm{C}}{14} \approx 20{,}2\,^\circ\mathrm{C}$; дисперсия 6,0 $(^\circ\mathrm{C})^2$; рассеяние 2,4 °C; медиана $M_e = \frac{20{,}5+21}{2} = 20{,}8$ °C; мода $M_O = 21$ °C	6 °C; среднее $\frac{37{,}6\,^\circ\mathrm{C}}{14} \approx 2{,}7\,^\circ\mathrm{C}$; дисперсия 2,4 $(^\circ\mathrm{C})^2$; рассеяние 1,5 °C; медиана $M_e = \frac{2{,}2+2{,}5}{2} = 2{,}4$ °C; мода не определена однозначно

9	10	11	12	13
24 °C; среднее $\frac{162\,^\circ\mathrm{C}}{12} \approx 13{,}7\,^\circ\mathrm{C}$; дисперсия 46,4 $(^\circ\mathrm{C})^2$; рассеяние 6,8 °C; медиана $M_e = \frac{13+14}{2} = 13{,}5$ °C; мода $M_O = 6$ °C	4 мм; среднее $\frac{23{,}25}{16} \approx 1{,}5$ мм; дисперсия 1,7 мм^2; рассеяние 1,3 мм; медиана $M_e = \frac{1+1{,}25}{2} = 1{,}1$ мм; мода $M_O = 0{,}5$ мм	Четвертое	Четвертое	третье

14	15	16	17	18	19	20
могло	медиана 4, мода 4, среднее 4,9	1) M=4; D=1,8. 2) M=4; D=13,6	1) M=0,5; D=24,65. 2) M=0,5; D=34,85	второй	Мария, на одну страницу	в четвертой

21	22	23	24	25
Александрова	8	13	7,85	четвертое

Справочное издание

Рязановский Андрей Рафаилович
Мухин Дмитрий Геннадьевич

МАТЕМАТИКА

Основной государственный экзамен (ГИА-9)

9 класс

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЭЛЕМЕНТЫ СТАТИСТИКИ

Издательство ***«ЭКЗАМЕН»***

Гигиенический сертификат
№ РОСС RU. AE51. Н 16582 от 08.04.2014 г.

Главный редактор *Л. Д. Лаппо*
Редактор *И. М. Бокова*
Технический редактор *Л. В. Павлова*
Корректоры *Н. Е. Жданова, Т. И. Шитикова*
Дизайн обложки *Л. В. Демьянова*
Компьютерная верстка *А. С. Федотова, К. А. Реутова*

107045, Москва, Луков пер., д. 8.
www.examen.biz
E-mail: по общим вопросам: info@examen.biz;
по вопросам реализации: sale@examen.biz
тел./факс 641-00-30 (многоканальный)

Общероссийский классификатор продукции
ОК 005-93, том 2; 953005 — книги, брошюры, литература учебная

Отпечатано в соответствии
с предоставленными материалами
в ООО «ИПК Парето-Принт»,
г. Тверь, www.pareto-print.ru

По вопросам реализации обращаться по тел.:
641-00-30 (многоканальный).