Приложение 2.

(ок.580–ок.500 г. до н.э.)

ТЕОРЕМА ПИФАГОРА И ЕЁ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Формулировки теоремы

Приведем различные формулировки теоремы Пифагора в переводе с греческого, латинского и немецкого языков.

У **Евклида** эта теорема гласит (дословный перевод):

"В прямоугольном треугольнике квадрат стороны, натянутой над прямым углом, равен квадратам на сторонах, заключающих прямой угол".

Латинский перевод арабского текста **Аннаирици** (около 900 г. до н. э.), сделанный **Герхардом Клемонским** (начало 12 в.), в переводе на русский гласит:

"Во всяком прямоугольном треугольнике квадрат, образованный на стороне, натянутой над прямым углом, равен сумме двух квадратов, образованных на двух сторонах, заключающих прямой угол".

В **Geometria Culmonensis** (около 1400 г.) в переводе теорема читается так :

"Итак, площадь квадрата, измеренного по длинной стороне, столь же велика, как у двух квадратов, которые измерены по двум сторонам его, примыкающим к прямому углу".

В первом русском переводе евклидовых **"Начал"**, сделанном **Ф. И. Петрушевским**, теорема Пифагора изложена так:

"В прямоугольных треугольниках квадрат из стороны, противолежащей прямому углу, равен сумме квадратов из сторон, содержащих прямой угол".

В настоящее время известно, что эта теорема не была открыта Пифагором. Однако одни полагают, что Пифагор первым дал ее полноценное доказательство, а другие отказывают ему и в этой заслуге. Некоторые приписывают

Пифагору доказательство, которое Евклид приводит в первой книге своих "Начал". С другой стороны, Прокл утверждает, что доказательство в "Началах" принадлежит самому Евклиду. Как мы видим, история математики почти не сохранила достоверных данных о жизни Пифагора и его математической деятельности. Зато легенда сообщает, даже ближайшие обстоятельства, сопровождавшие открытие теоремы. Многим известен сонет Шамиссо:

Пребудет вечной истина, как скоро
Ее познает слабый человек!
И ныне теорема Пифагора
Верна, как и в его далекий век.

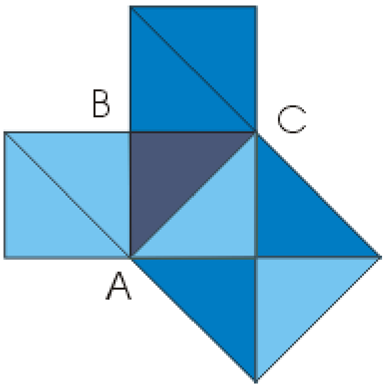
Обильно было жертвоприношенье
Богам от Пифагора. Сто быков
Он отдал на закланье и сожженье
За света луч, пришедший с облаков.

Поэтому всегда с тех самых пор,
Чуть истина рождается на свет,
Быки ревут, ее потчуя ,вслед.

Они не в силах свету помешать ,
А могут лишь закрыв глаза дрожать
От страха, что вселил в них Пифагор.

Простейшее доказательство

Простейшее доказательство теоремы получается в простейшем случае равнобедренного прямоугольного треугольника. В самом деле, достаточно просто посмотреть на мозаику равнобедренных прямоугольных треугольников , чтобы убедиться в справедливости теоремы. Например, для треугольника ABC : квадрат, построенный на гипотенузе AC, содержит 4 исходных треугольника, а квадраты, построенные на катетах,- по два.



Теорема доказана.

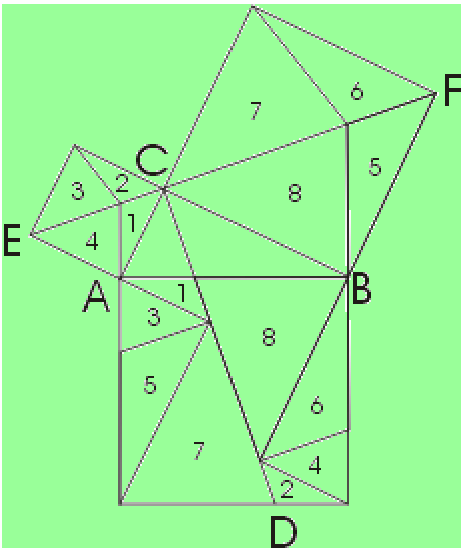
Доказательства методом разложения

Существует целый ряд доказательств теоремы Пифагора, в которых квадраты, построенные на катетах и на гипотенузе, разрезаются так, что каждой части квадрата ,построенного на гипотенузе, соответствует часть одного из квадратов, построенных на катетах. Во всех этих случаях для понимания доказательства достаточно одного взгляда на чертеж; рассуждение здесь может быть ограничено единственным словом: "Смотри!", как это делалось в сочинениях древних индусских математиков. Следует, однако, заметить, что на самом деле доказательство нельзя считать полным, пока мы не доказали равенства всех соответствующих друг другу частей. Это почти всегда довольно не трудно сделать, однако может (особенно при большом количестве частей) потребовать довольно продолжительной работы.

Доказательство Эпштейна

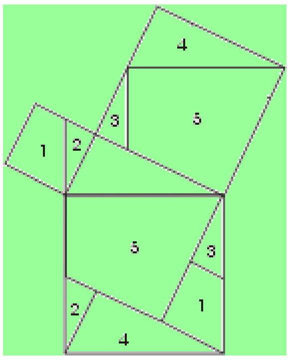
Начнем с доказательства **Эпштейна**(рис. 1) ; его преимуществом является то, что здесь в качестве составных частей разложения фигурируют исключительно треугольники. Чтобы разобраться в чертеже, заметим, что прямая CD проведена перпендикулярно прямой EF.

Разложение на треугольники можно сделать и более наглядным, чем на рисунке.



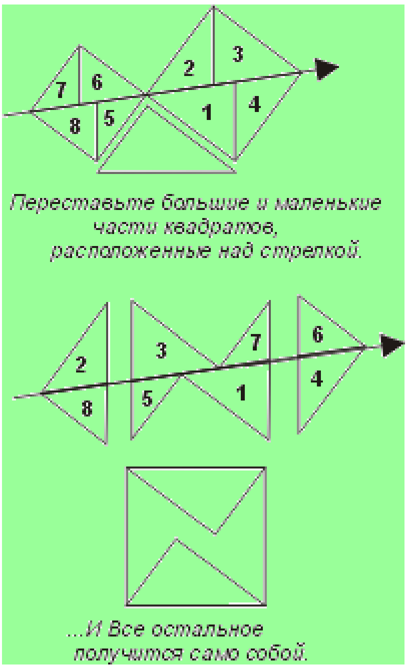
Доказательство Нильсена.

На рисунке вспомогательные линии изменены по предложению **Нильсена**.



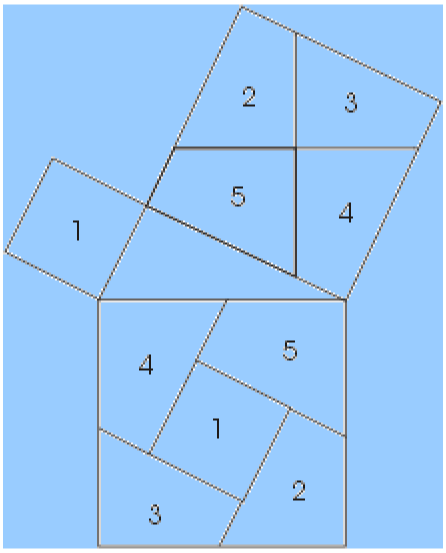
Доказательство Бетхера .

На рисунке дано весьма наглядное разложение **Бетхера**.



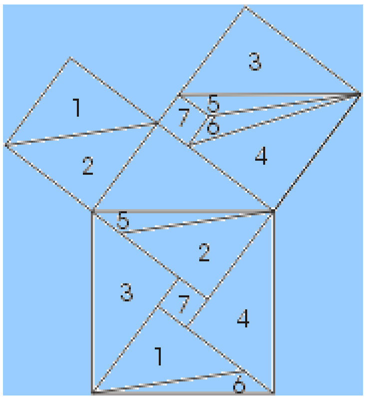
Доказательство Перигаля.

В учебниках нередко встречается разложение указанное на рисунке (так называемое "колесо с лопастями"; это доказательство нашел **Перигаль**). Через центр О квадрата, построенного на большем катете, проводим прямые, параллельную и перпендикулярную гипотенузе. Соответствие частей фигуры хорошо видно из чертежа.

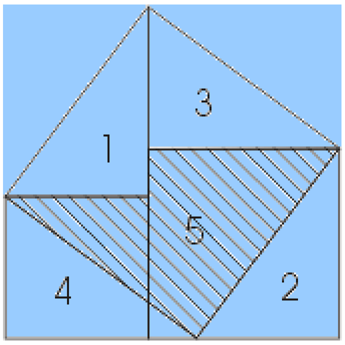


Доказательство Гутхейля.

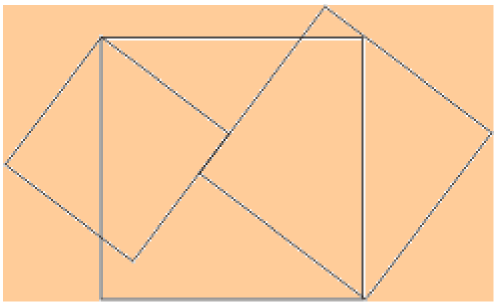
Изображенное на рисунке разложение принадлежит Гутхейлю; для него характерно наглядное расположение отдельных частей, что позволяет сразу увидеть, какие упрощения повлечет за собой случай равнобедренного прямоугольного треугольника.



Доказательство 9 века н.э.



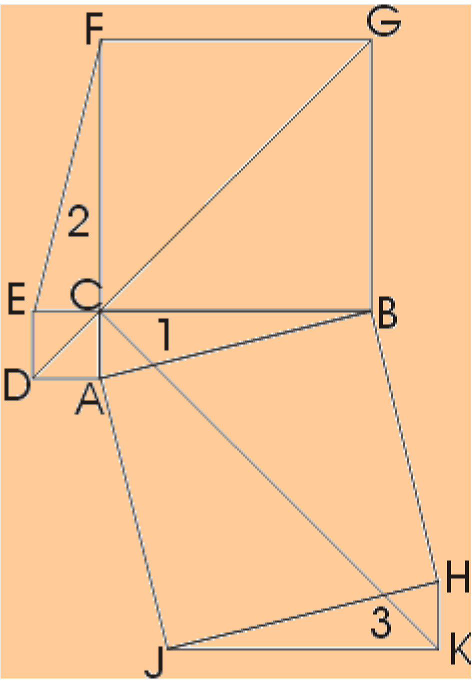
Ранее были представлены только такие доказательства, в которых квадрат, построенный на гипотенузе, с одной стороны, и квадраты, построенные на катетах, с другой, складывались из равных частей. Такие доказательства называются доказательствами при помощи сложения ("аддитивными доказательствами") или, чаще, доказательствами методом разложения. До сих пор мы исходили из обычного расположения квадратов, построенных на соответствующих сторонах треугольника, т. е. вне треугольника. Однако во многих случаях более выгодно другое расположение квадратов.



На рисунке квадраты, построенные на катетах, размещены ступенями один рядом с другим. Эту фигуру, которая встречается в доказательствах, датируемых не позднее, чем 9 столетием н. э., индусы называли **"стулом невесты"**. Способ построения квадрата со стороной, равной гипотенузе, ясен из чертежа. Общая часть двух квадратов, построенных на катетах, и квадрата, построенного на гипотенузе, - неправильный заштрихованный пятиугольник 5. Присоединив к нему треугольники 1 и 2, получим оба квадрата, построенные на катетах; если же заменить треугольники 1 и 2 равными им треугольниками 3 и 4, то получим квадрат, построенный на гипотенузе. На рисунках ниже изображены два различных расположения близких к тому, которое дается на первом рисунке.

Доказательства методом дополнения

Доказательство первое.



Наряду с доказательствами методом сложения можно привести примеры доказательств при помощи вычитания, называемых также доказательствами методом дополнения. Общая идея таких доказательств заключается в следующем.

От двух равных площадей нужно отнять равновеликие части так, чтобы в одном случае остались два квадрата, построенные на катетах, а в другом- квадрат, построенный на гипотенузе. Ведь если в равенствах

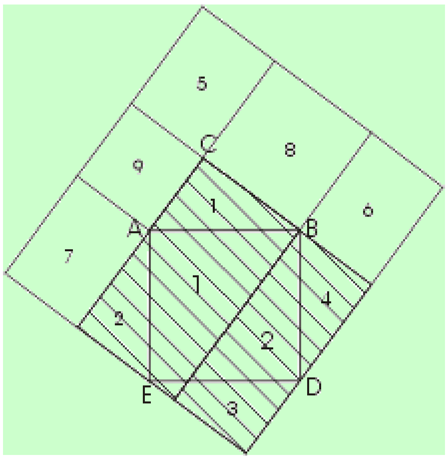
$$\mathbf{B}\text{-}\mathbf{A}=\mathbf{C} \text{ и } \mathbf{B_1}\text{-}\mathbf{A_1}=\mathbf{C_1}$$

часть **A** равновелика части $\mathbf{A_1}$, а часть **B** равновелика $\mathbf{B_1}$, то части **C** и $\mathbf{C_1}$ также равновелики.

Поясним этот метод на примере. На рис. к обычной пифагоровой фигуре приставлены сверху и снизу треугольники 2 и 3, равные исходному треугольнику 1. Прямая DG обязательно пройдет через C. Заметим теперь (далее мы это докажем), что шестиугольники DABGFE и CAJKHB равновелики. Если мы от первого из них отнимем треугольники 1 и 2, то останутся квадраты, построенные на катетах, а если от второго шестиугольника отнимем равные треугольники 1 и 3, то останется квадрат, построенный на гипотенузе. Отсюда вытекает, что квадрат, построенный на гипотенузе, равновелик сумме квадратов, построенных на катетах.

Остается доказать, что наши шестиугольники равновелики. Заметим, что прямая DG делит верхний шестиугольник на равновеликие части; то же можно сказать о прямой CK и нижнем шестиугольнике. Повернем четырехугольник DABG, составляющий половину шестиугольника DABGFE, вокруг точки A по часовой стрелке на угол 90; тогда он совпадет с четырехугольником CAJK, составляющим половину шестиугольника CAJKHB. Поэтому шестиугольники DABGFE и CAJKHB равновелики.

Другое доказательство методом вычитания.



Познакомимся с другим доказательством методом вычитания. Знакомый нам чертеж теоремы Пифагора заключим в прямоугольную рамку, направления сторон которой совпадают с направлениями катетов треугольника. Продолжим некоторые из отрезков фигуры так, как указано на рисунке, при этом прямоугольник распадается на несколько треугольников, прямоугольников и квадратов. Выбросим из прямоугольника, сначала несколько частей так, чтобы остался лишь квадрат, построенный на гипотенузе. Эти части следующие:

1. треугольники 1, 2, 3, 4;
2. прямоугольник 5;
3. прямоугольник 6 и квадрат 8;
4. прямоугольник 7 и квадрат 9;

Затем выбросим из прямоугольника части так, чтобы остались только квадраты, построенные на катетах. Этими частями будут:

1. прямоугольники 6 и 7;
2. прямоугольник 5;
3. прямоугольник 1(заштрихован);
4. прямоугольник 2(заштрихован);

Нам осталось лишь показать, что отнятые части равновелики. Это легко видеть в силу расположения фигур. Из рисунка ясно, что:

1. прямоугольник 5 равновелик самому себе;
2. четыре треугольника 1,2,3,4 равновелики двум прямоугольникам 6 и 7;
3. прямоугольник 6 и квадрат 8, взятые вместе, равновелики прямоугольнику 1 (заштрихован);;
4. прямоугольник 7 вместе с квадратом 9 равновелики прямоугольнику 2(заштрихован);

Доказательство закончено.