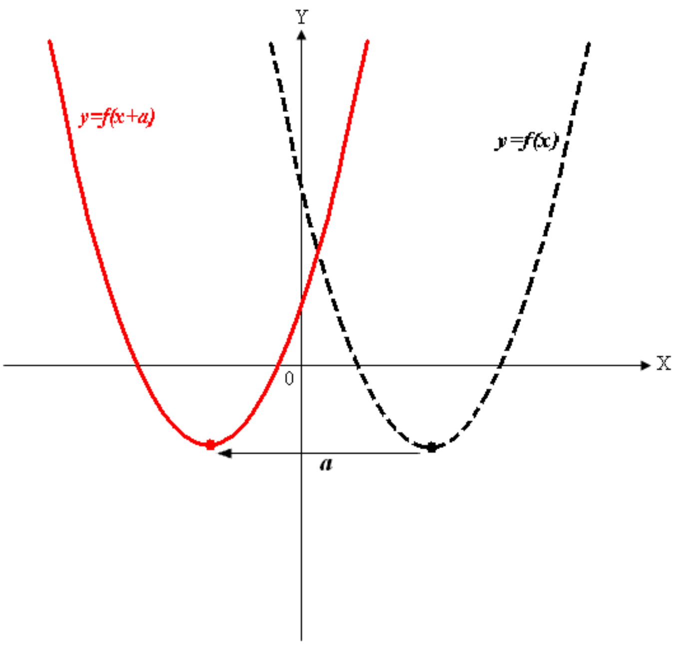
Методическая разработка
«Основные приемы построения графиков элементарных функций»
Алгебра 8-11 класс.

Учитель высшей категории
ГБОУ средней школы №229
Адмиралтейского района Санкт-Петербурга
Креславская Елена Михайловна

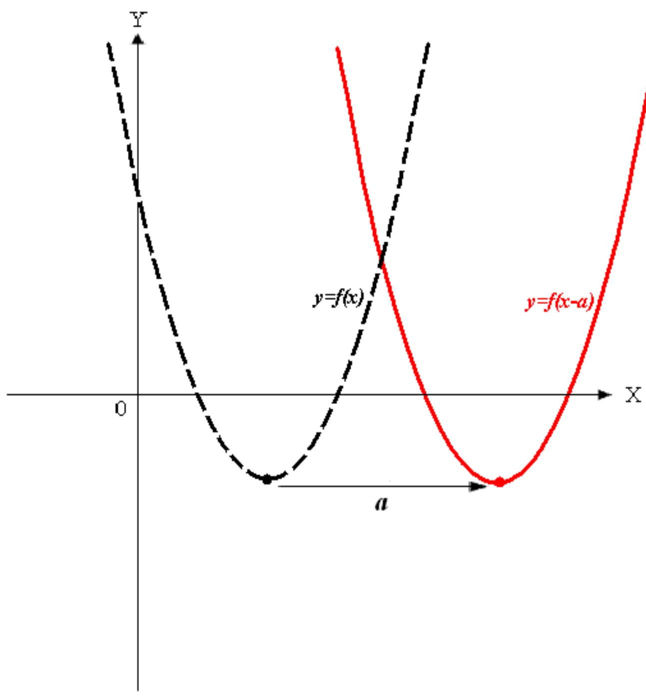
Работу над графиками я начинаю еще в средних классах. Сначала ребята учатся строить график функции ***y=kx***, затем появляется линейная функция ***y=kx+b***, затем – обратная пропорциональность и, наконец, квадратичная функция. На этом этапе формируются навыки в преобразованиях графиков.

Пусть дана функция ***y=f(x)***. Учащиеся начинают строить графики:

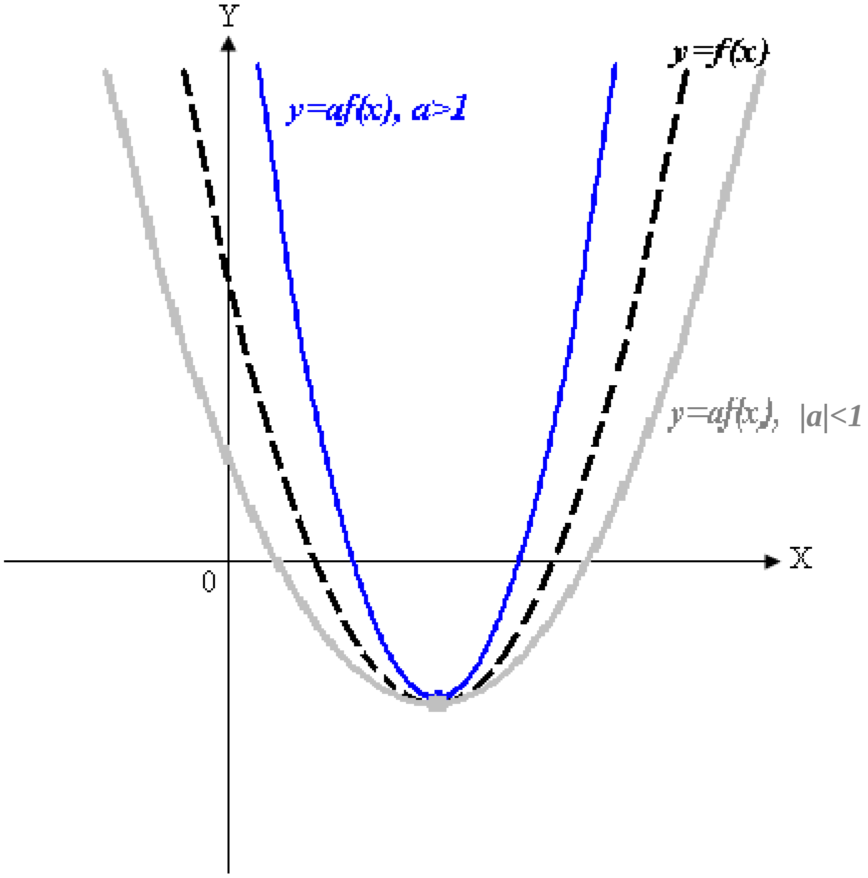
а) ***y=f(x+a)*** – сдвиг по оси OX влево на ***a*** единиц.



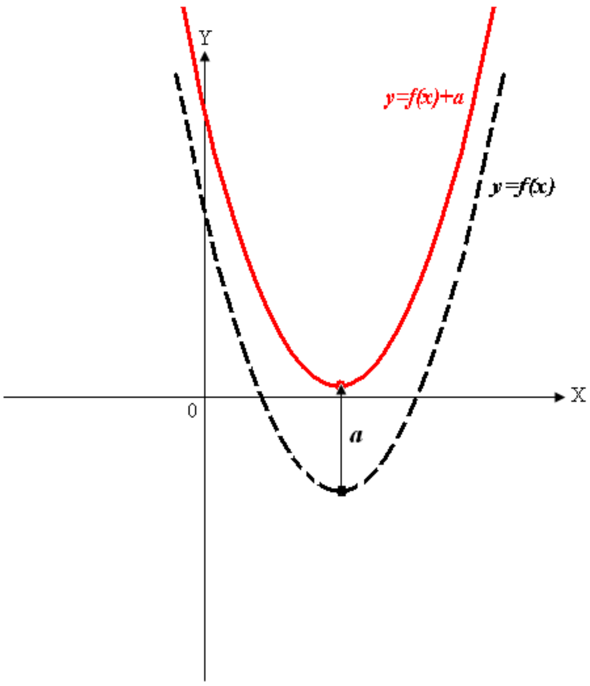
б) ***y=f(x-a)*** – сдвиг по оси OX вправо на ***a*** единиц.

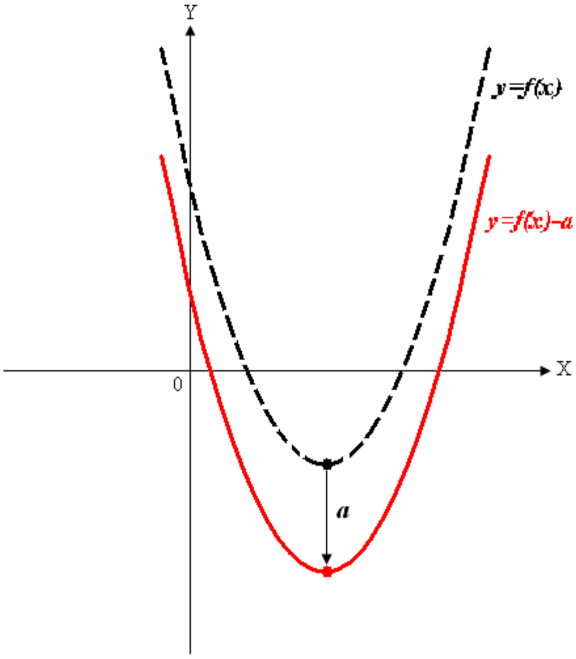


в) ***y=a∗f(x)*** **–** растяжение (сжатие) вдоль оси ОУ в ***а*** раз

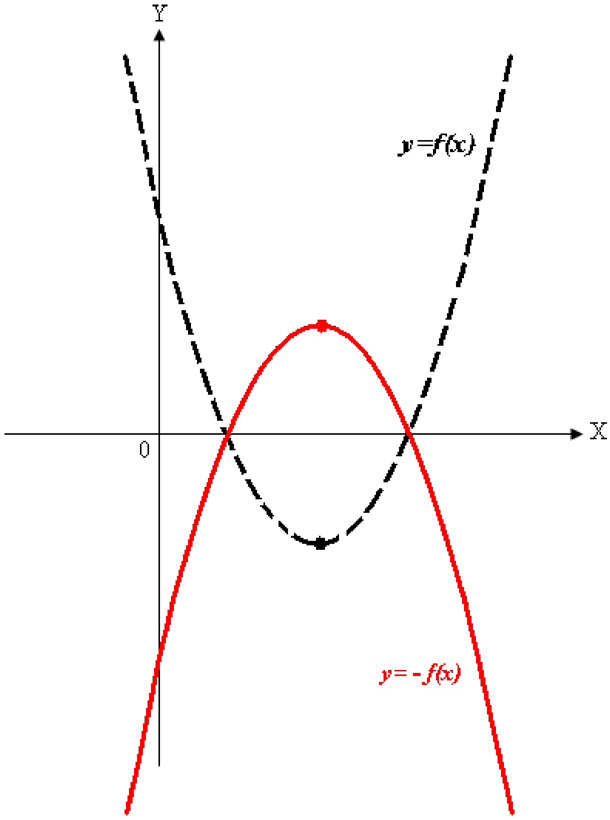


г) ***y=f(x)+a*** – сдвиг по оси ОУ вверх (вниз) на ***а*** единиц

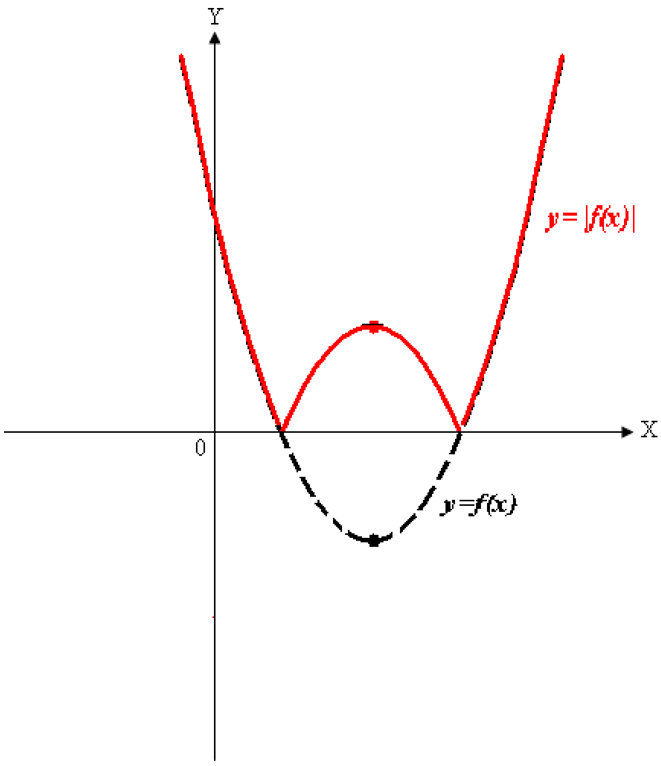




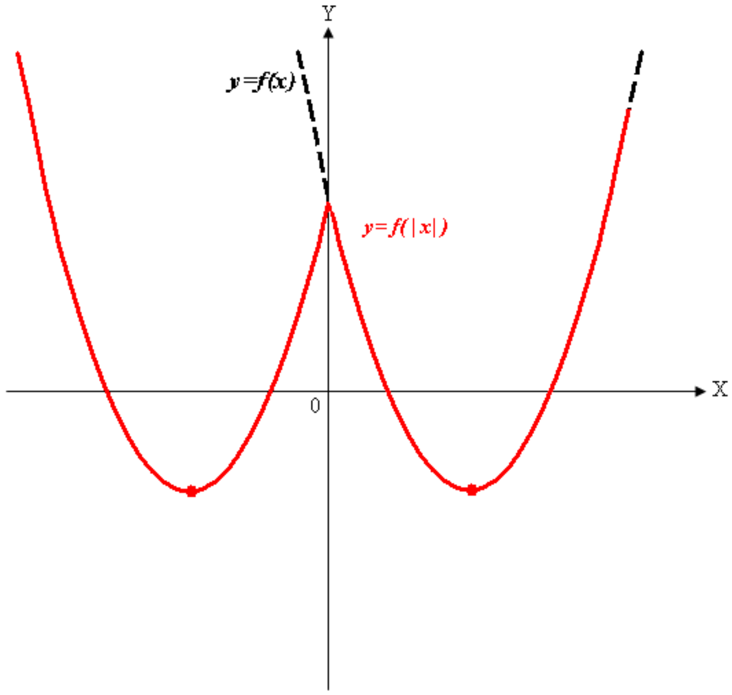
д) *y=-f(x)*



е) *y= |f(x)|*

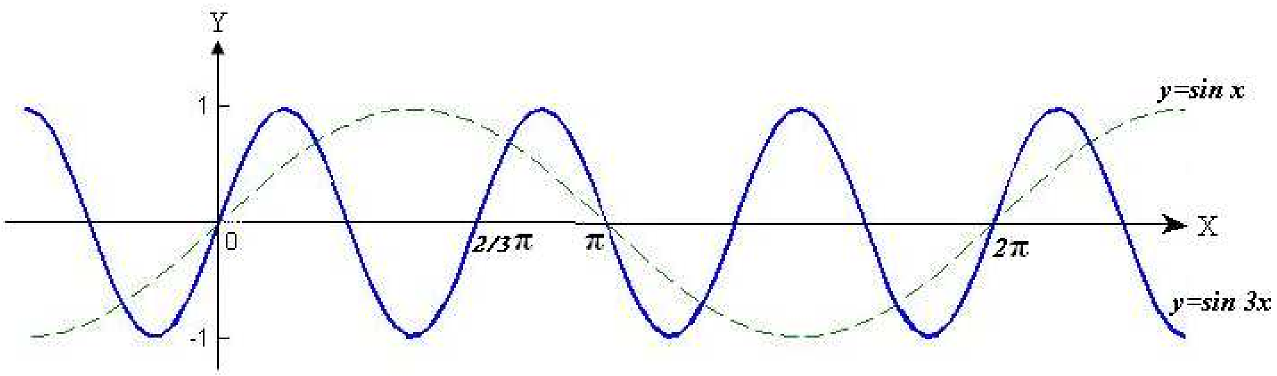


ж) *y=f(|x|)*

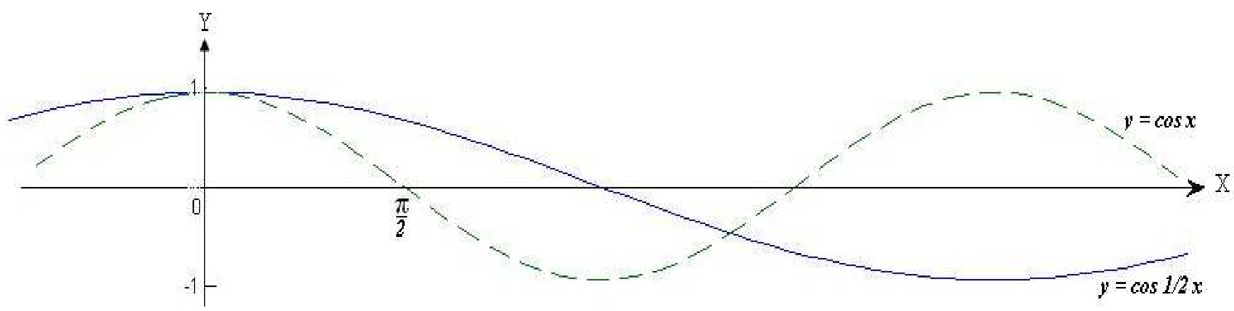


Далее в 10 классе мы изучали тригонометрические функции и их графики и знакомились с новыми преобразованиями, (например, сжатие или растяжение в ***k*** раз вдоль оси OX).

1) ***y = sin3x*** – сжатие вдоль оси OX в 3 раза



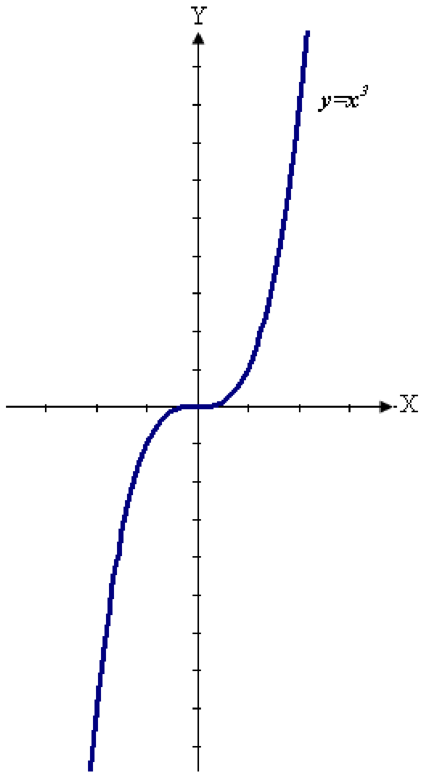
2) $\boldsymbol{y = \cos\frac{1}{2}x}$ – растяжение вдоль оси OX в 2 раза



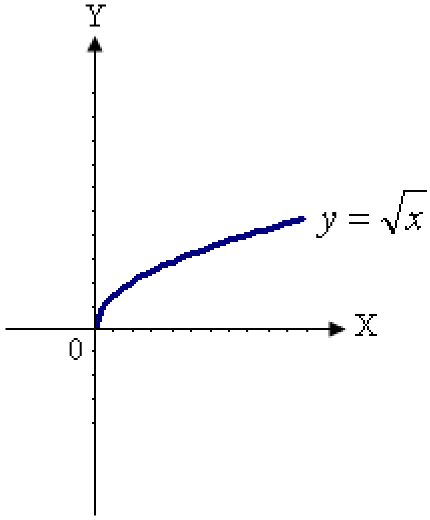
Затем идет изучение основных элементарных функций:

1) Степенная функция

а) $y = x^3$

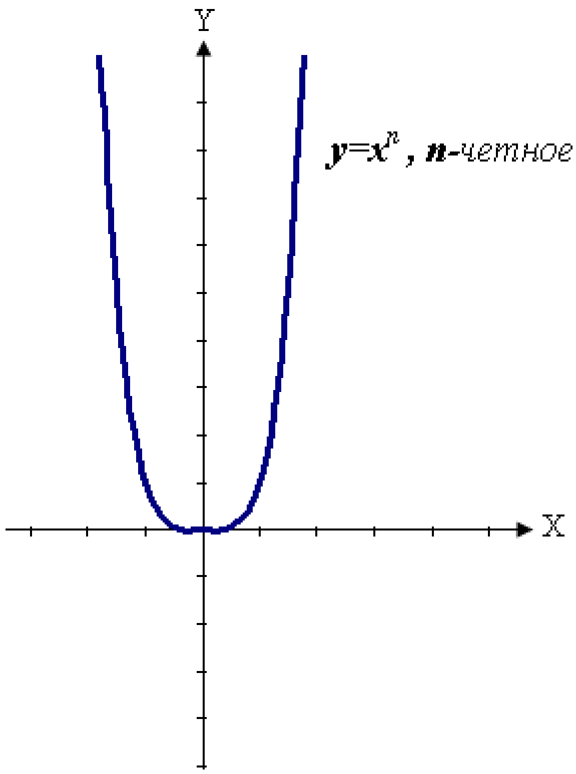


б) $y = \sqrt{x}$, $(x \geq 0)$



в) $y = x^n$ (n – четное, натуральное)

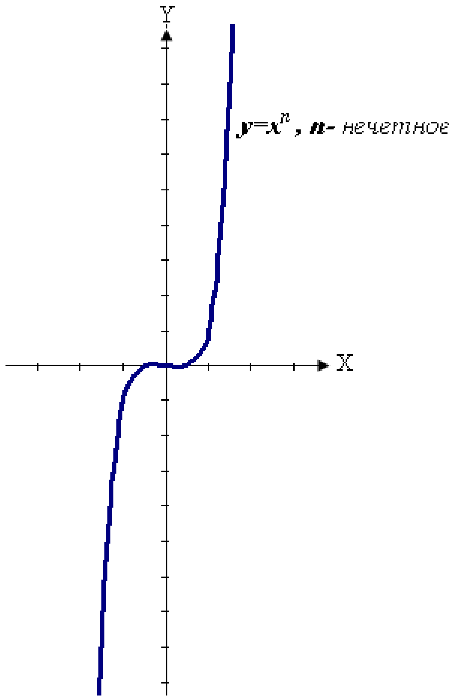
График по типу параболы



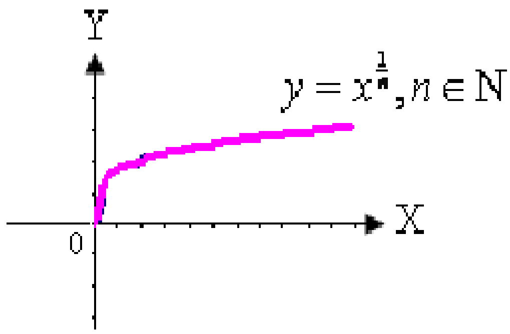
г) $y = x^n$

(n – нечетное, натуральное)

тип кубической параболы

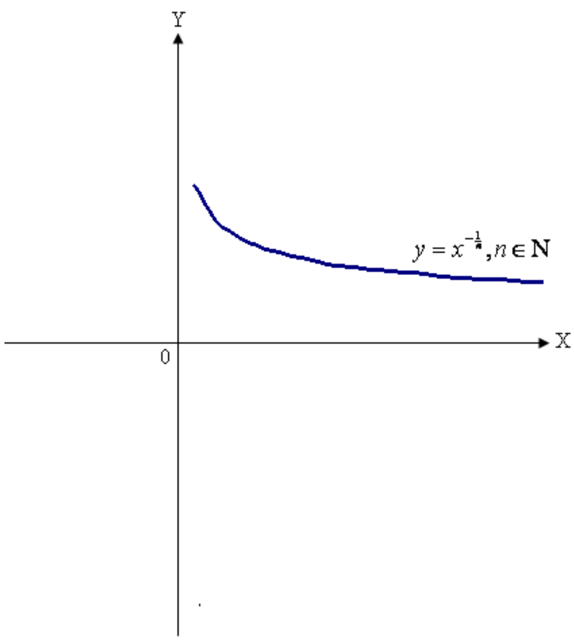


д) $y = x^{\frac{1}{n}}$, $n \in N$, $x \geq 0$



е) $y = x^{-\frac{1}{n}}$, $n \in N$, $x > 0$

(тип – гипербола, положительная ветвь)



Затем изучается показательная, логарифмическая, степенная функции и выполняются преобразование этих графиков. Затем в 11 классе после изучения темы «Производная» мы снова обращаемся к графикам функций, выполняем исследование с помощью производной и строим график функции.

<u>Примеры:</u>

№1 Решить уравнение: $\sqrt{9-(4x-7)^2} = \sin^2(\frac{12\pi x}{7})+3$

Решение.

Рассмотрим уравнение в виде равенства двух функций:

$f(x) = \sqrt{9-(4x-7)^2} - 3$ (1)

$g(x) = \sin^2\frac{12\pi x}{7}$ (2)

Исследуем множества значений этих функций:

1.) Найдем множество значений функции

$$f(x) = \sqrt{9-(4x-7)^2} - 3 = \sqrt{9-16x^2+56x-49} - 3 = \sqrt{-16x^2+56x-40} - 3$$

Обозначим $y = -16x^2+56x-40$

Координаты вершины параболы:

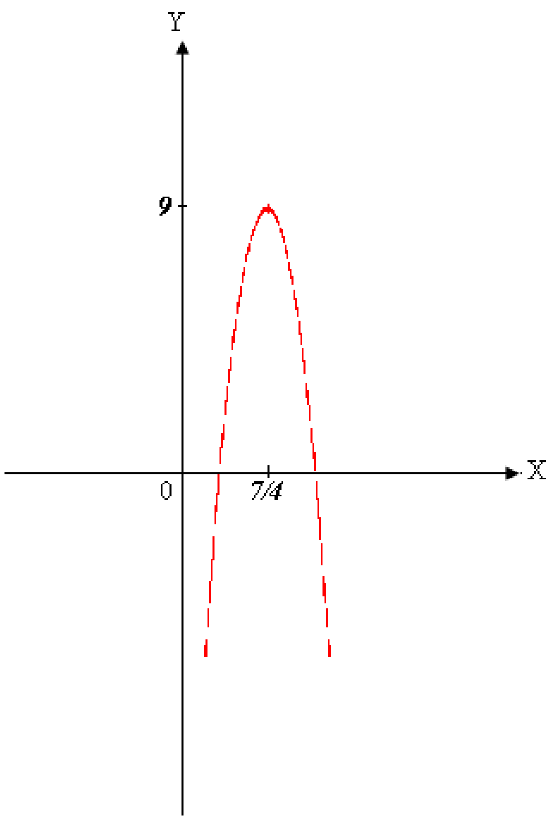
$x_0 = -\frac{b}{2a}$

$x_0 = \frac{-56}{-32} = \frac{7}{4}$

$y_0 = y(x_0) = -16\cdot(\frac{7}{4})^2 + 56\cdot\frac{7}{4} - 40 = -49-40+98 = -89+98 = 9$

Вершина $A = \left(\frac{7}{4};9\right)$

График имеет вид:



Множество значений: (-∞; 9]

Значит, f(x) в вершине:

$f(x) = \sqrt{9} - 3 = 3 - 3 = 0$

2.) Найдем множество значений функции $g(x) = \sin^2\frac{12\pi x}{7}$

$-1 \le \sin\frac{12\pi x}{7} \le 1$

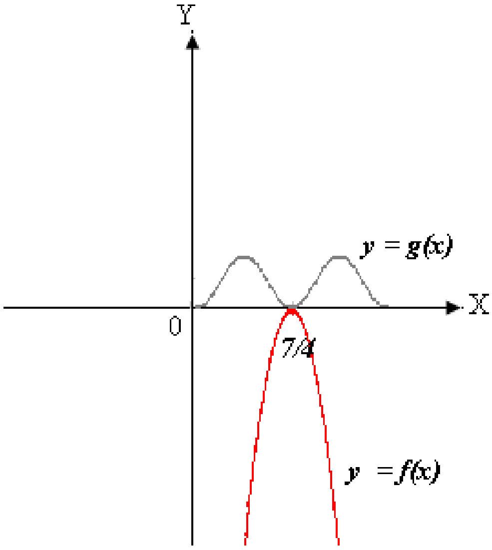
$0 \le \sin^2\frac{12\pi x}{7} \le 1$

Значит, множество значений $g(x) = [0;1]$

а $f(x) = (-\infty; 0)$

Тогда решением уравнения может быть только та точка, где значения функции совпадают, т.е. $x = \frac{7}{4}$

Имеем:



Ответ: $x = 1\frac{3}{4}$

2. Решить уравнение:

$$25x^2 - 20x + 6 = (\sqrt{2} - \cos\frac{5\pi x}{4}) \cdot (\sqrt{2} + \cos\frac{5\pi x}{4})$$

Решение.

Рассмотрим функцию $f(x) = 25x^2 - 20x + 6$ и найдем множество её значений.

а.) Найдем координаты вершин параболы:

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

$$x_0 = \frac{20}{50} = \frac{2}{5}$$

$$y_0 = -\frac{D}{4a} = \frac{200}{100} = 2 \qquad D\text{=400-600= -200}$$

$$A\left(\frac{2}{5}; 2\right)$$

$a = 25 > 0 \Rightarrow$ ветви вверх

Множество значений функции - луч [2; +∞)

б.) Рассмотрим функцию:

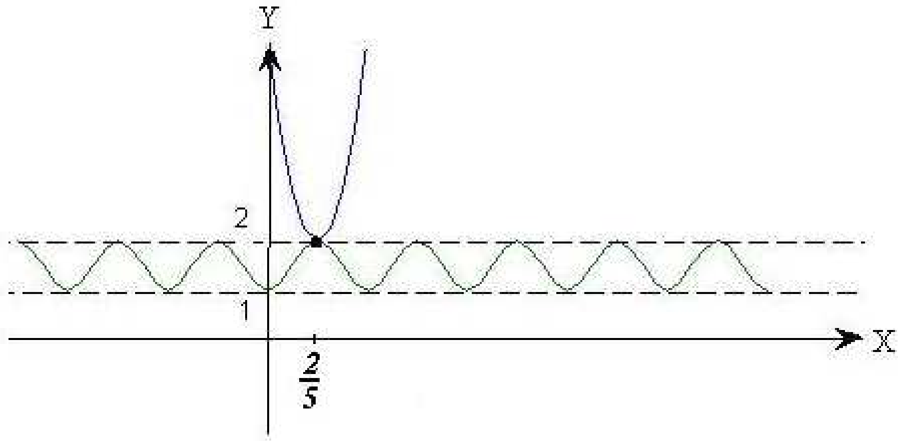
$$g(x) = (\sqrt{2} - \cos\frac{5\pi x}{4}) \cdot (\sqrt{2} + \cos\frac{5\pi x}{4}) = 2 - \cos^2\frac{5\pi x}{4} = 1 + (1 - \cos^2\frac{5\pi x}{4}) = 1 + \sin^2\frac{5\pi x}{4}$$

$$-1 \le \sin\frac{5\pi x}{4} \le 1$$

$$0 \le \sin^2\frac{5\pi x}{4} \le 1$$

$$1 \le 1 + \sin^2\frac{5\pi x}{4} \le 2$$

Итак, множество значений $g(x)$: [1; 2]
Примерный вид графиков:



Видим, что равенство только если $f(x) = g(x) = 2$

$$f(x) = 2$$

$$25x^2 - 20x + 6 = 2$$

$$25x^2 - 20x + 4 = 0$$

$$D = 400 - 400 = 0$$

$$x = \frac{20 \pm 0}{50} = \frac{2}{5}$$

$$g\left(\frac{2}{5}\right) = 1 + \sin^2 \frac{5\pi \cdot 2}{5 \cdot 4} = 1 + \sin^2 \frac{2\pi}{2} = 1 + 1 = 2$$

Ответ: $x = \frac{2}{5}$

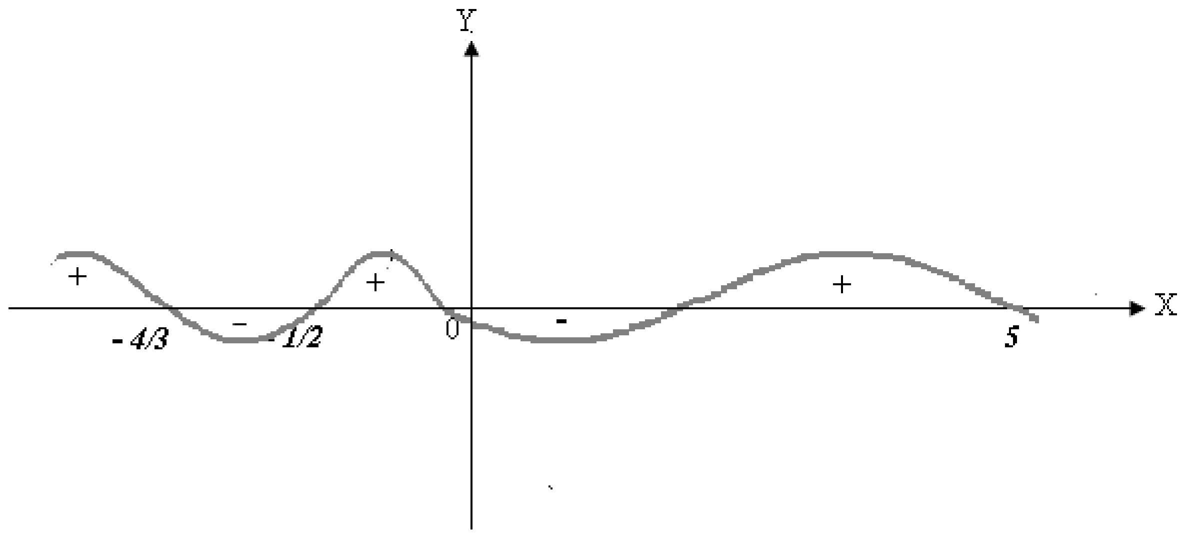
3. Нечетная функция $y = f(x)$

Определение на всей числовой прямой. При x>0 значения этой функции совпадают со значениями функции $g(x) = x(3x+4) \cdot (6+12x) \cdot (x+5)$
Сколько корней имеет уравнение $f(x) = 0$?

Решение.
Рассмотрим $g(x)$ и найдем нули этой функции:

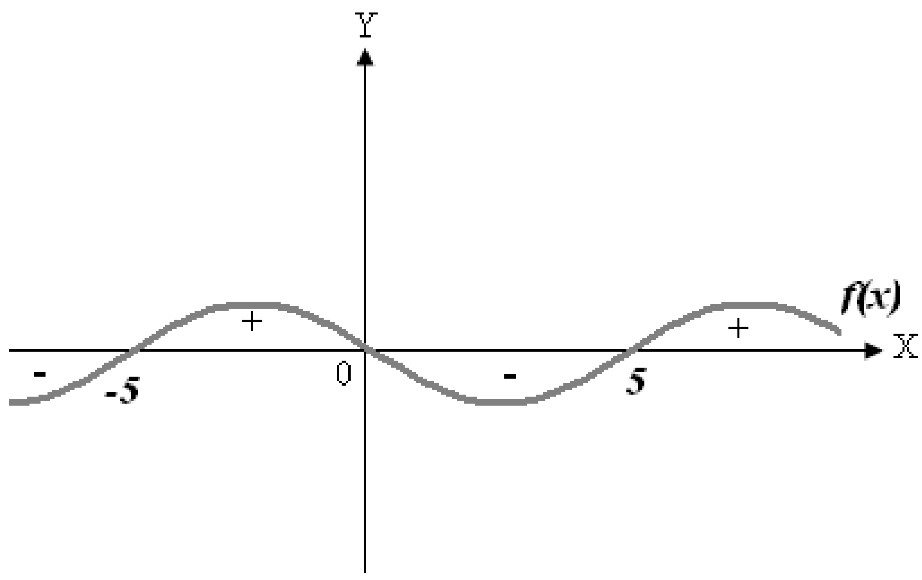
$$g(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 3x + 4 = 0 \\ 6 + 12x = 0 \\ x - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{4}{3} \\ x = -\frac{1}{2} \\ x = 5 \end{cases}$$

Её график имеет вид:



Функция $f(x)$ -нечетная и совпадает с $g(x)$ при x>0

График её имеет вид:



Следующее уравнение $f(x)=0$ имеет 3 корня:
$x_1=-5, x_2=0, x_3=5$

Ответ: 3 корня.

4. Функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой и является частной периодической функцией с периодом Т=6 на отрезке [0; 3]. $f(x)$ задана формулой $f(x) = 2 + 2x - x^2$

Определить количество нулей функции на [-5; 4].

Решение.

Построим график функции:

$f(x) = -x^2 + 2x + 2$ - это парабола.

Координаты вершин:

$x_0 = -\frac{b}{2a}; x_0 = \frac{-2}{-2} = 1$ А (1; 3)

$y_0 = -1 + 2 + 2 = 3$

Найдем нули функции:

$-x^2 + 2x + 2 = 0$

$D = b^2 - 4ac$

$D = 4 + 8 = 12$

$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{-2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{-2} = 1 \pm \sqrt{3}$

$x_1 = 1 - \sqrt{3}$

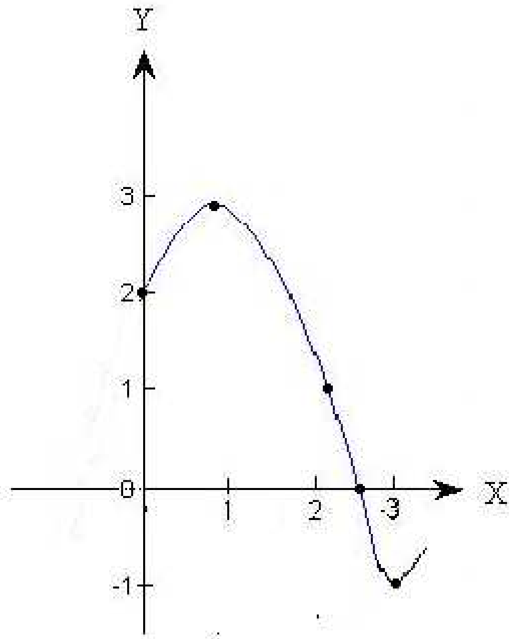
$x_2 = 1 + \sqrt{3}$

Найдем координаты точек пересечения с OY:

$x = 0, y = 2$

При $x = 3$ $f(3) = -9 + 6 + 2 = -1$

Следовательно, график функции $y = f(x)$ при $x \in [0;3]$ имеет вид:



Для построения уравнения – свойство четности:

$f(-x) = f(x)$

2.) Свойство периодичности:

$f(x) = f(x + T)$

Тогда график будет иметь вид: