***Нестандартные задачи по алгебре для 7-8 классов***

 Представленный материал может быть использован на факультативных, групповых занятиях, на заседаниях математического кружка, во внеклассной работе по математике.

 Цель данных занятий - развитие творческого мышления учащихся, а также формирование их мировоззрения; возможность углубленного изучения основного курса путем рассмотрения задач, требующих нестандартного подхода при своем решении.

 Достижению этой цели служат специально подобранные задачи. Систематические упражнения в решении таких задач помогут обеспечить действенность приобретаемых учащимися знаний по математике, развить у них творческое мышление и интерес к предмету.

Задача 1. В результате деления двузначного числа на его обратное получились равные частное и остаток. Найти это число.

Решение: Пусть *a= 10x +y* - искомое число, *q* – частное, остаток,

тогда *10 x + y = (10y + x)q +q* или (*10 – q)x – (10q – 1)q = q.*

При *q= 1*, получаем равенство *9(x – у) = 1*, которое невозможно.

При *q = 2* , имеем *8х – 19у = 2*, откуда следует, что число у – четное.

При *у = 2* получаем *х = 5*, а *при у = 4, 6, 8* правая часть не делится на 8. Другими словами , в этом случае мы имеем решение *а = 52*.

Далее, при *q = 3* из равенства *7х – 29у = 3* при *у = 2* *х* – получается дробным, а при *у* $\geq $*3 х*$ >$ *10*, то есть в этом случае решений нет.

При *q = 4* имеем *6х – 39у = 4*, что невозможно, так как 4 не делится на 3.

Наконец, если *q*$ \geq $ *5*, то *5х*$ \geq $ *( 10 – q)х =( 10q – 1)у + q* $\geq $ *49 +q*$ \geq $ *54*, откуда

*х* $\geq $ *11*. Следовательно, искомое число равно *52.*

Задача 2. Найти все целые числа *х* и *у*, для которых выполняется равенство *2ху + х + у = 83.*

Решение: Умножив обе части уравнения на 2 и прибавив к обеим частям 1, представим его в виде :

*( 2х + 1)( 2у + 1 ) = 167,* и поскольку число *167* – простое, то оно раскладывается на целые множители четырьмя способами:

*167 = 1∙167 = 167∙1= (- 1)∙(- 167) = (- 167) ∙ (- 1),* откуда находим четыре решения уравнения: *(0;83), (83;0), ( - 1; - 84), ( - 84; -1).*

Задача 3. Имеется несколько мешков с монетами, в одном из которых все монеты фальшивые , а в остальных – настоящие. Фальшивая монета на 1 г легче настоящей. Каким наименьшим числом взвешиваний на пружинных весах можно обнаружить фальшивые монеты, если в каждом мешке монет достаточно много?

Решение. Занумеруем мешки числами от 1 до *n*, из каждого мешка возьмем столько монет, каков его номер, и взвесим взятые монеты. Всего их *S = 1 +2 + 3 + ….+ n* штук. Если вес настоящей монеты равен *а* грамм, а фальшивые монеты содержатся в мешке с номером *к,* то весы покажут

 $р\_{1} $*= а +2а + …+ к( а- 1) +… + nа = Sа – к.*

Взвесим теперь S монет из первого мешка. Если все они фальшивые, то их общий вес$ р\_{2}$ окажется меньше$ р\_{1}$, если же все настоящие, то $ р\_{2}$ будет больше $р\_{1.} $ Поэтому, если $р\_{2}<р\_{1}$, то фальшивые монеты в первом мешке, в противном случае мы узнаем вес Sа настоящих монет, и разность $р\_{2}-р\_{1}$ дает число *к* фальшивых монет.

Таким образом, найти мешок с фальшивыми монетами можно двумя взвешиваниями. Ясно, что одним взвешиванием обойтись не удастся.

Задача 4.Найти все такие простые числа *р* и *q,* что числа *7р + q* и *рq + 11* также простые.

Решение. Если число *рq + 11* простое, то оно нечетно и, поэтому одно из чисел *q* или *р* - четное, то есть равно 2.

Пусть *р = 2*, тогда числа *q + 14* и *2 q + 11* простые. Если при делении на 3 число q дает остаток 1, то *q + 14* делится на 3, то есть *q = 3* и *р = 2* удовлетворяют условию задачи.

Аналогично можно показать, что значения *р = 3* и *q =2*, также являются решением задачи.

Задача 5. Показать, что $n^{2}$ *+ n + 1* при натуральном *n* есть нечетное число, не являющееся квадратом никакого другого натурального числа.

Решение. Число $n^{2}$ *+ n + 1* может быть представлено в виде *n( n + 1) + 1*, где *n* – натуральное число. Произведение *n( n + 1)* – четное число, следовательно, *n( n + 1) + 1* –нечетное.

Ближайшие к числу $ n^{2}$ *+ n + 1* квадраты натуральных чисел – это $ n^{2}$ и $ (n+1)^{2}$.

 Действительно, $ n^{2}$ *+ n + 1*$ \geq $$ n^{2}$и $ n^{2}$ *+ n + 1*$\leq $$ (n^{2}$ *+ n + 1) + n =* $ (n+1)^{2}$*.*

Так как $ n^{2}$ и $ (n+1)^{2} $ - квадраты последовательных натуральных чисел, а число $ n^{2}$ *+ n + 1* находится между названными квадратами, то само оно квадратом натурального числа быть не может.

Задача 6. Доказать, что дробь $\frac{ad+bc}{bd}$является несократимой тогда и только тогда, когда *b* и *d* взаимно простые числа*.*

Доказательство. Необходимость очевидна. В самом деле, если предположить, что *b* и *d* имеют общий делитель, то этот делитель имеют числа $ad и bc$, следовательно, и сумма $ad+bc.$ Тогда дробь $\frac{ad+bc}{bd}$ сократима, что противоречит условию.

Покажем, что если *b* и *d* не имеют общего делителя, отличного от единицы, то дробь $\frac{ad+bc}{bd}$ несократимая.

Предположим противное. Тогда сумма $ad+bc$ имеет общий множитель либо *cd* , либо  *сb.* Примем для определенности, что $ad+bc$ имеет общий натуральный делитель *сb*. Но это невозможно, поскольку число *сb* кратно *b,* а число$ ad$ *-* взаимнопростое с b *(* сомножитель а- числитель несократимой дроби$ \frac{a}{b}, $*d* и *b* не имеют общих множителей по условию). Аналогично показываем, что сумма $ad+bc$ не имеет общего натурального делителя *cd*. Таким образом, достаточность доказана.

Задача 7. Доказать, что

 $\frac{ b+c+d+…+k+l }{a(a+b+c+…+k+l)}$ =$\frac{b}{a(a+b)}$ + $\frac{c}{\left( a+b\right)( a+b+c)}$ + …+$\frac{l}{\left(a+b+…+k\right)(a+b+..+k+l)}$ .

Доказательство. $\frac{b}{a(a+b)}$ *=* $\frac{1}{a}$ *-* $\frac{1}{a+b}$*,* $\frac{c}{\left( a+b\right)( a+b+c)}$*=* $\frac{1}{a+b}$ *-* $\frac{1}{a+b+c}$ *, … ,* $\frac{l}{\left(a+b+…+k\right)(a+b+..+k+l)}$ *=* $\frac{1}{a+b+..+k}$ *-* $\frac{1}{a+b+…+k+l}$ *.*

Сложив почленно эти равенства, получим:

$\frac{b}{a(a+b)}$ *+*$\frac{c}{\left( a+b\right)( a+b+c)}$ *+…+* $\frac{l}{\left(a+b+…+k\right)(a+b+..+k+l)}$ *=* $\frac{1}{a}$ *-* $\frac{1}{a+b+…+k+l}$ *=*

*=* $\frac{b+c+d+…+k+l}{a(a+b+…+k+l)}$*.*

Задача 8. Дано, что *mn + pq* делится без остатка на *m*$-$ *p.* Доказать, что *mq + np* тоже делится без остатка на *m* $-$ *p.*

Доказательство. Представим *mn = mn* $-$ *np + np = ( m*$-p)$*n* + *np*,

pq = = *pq* $-$ *mq + mq = ( p*$-m)$*q* + *mq.*

 Отсюда, *mn + pq* = *( m*$-p)$*n* + *( p*$-m)$*q* + (*np + mq).*

Первые два слагаемых делятся без остатка на  *m*$-p, $значит, и *np + mq* делится на *m*$-p$*.*

Задача 9. Доказать, что корень квадратный из натурального числа не может быть выражен несократимой дробью $\frac{m}{n}$ ( n$\ne $1).

Доказательство. Предположим, что $\sqrt{к}$ = $\frac{m}{n}$ - несократимая дробь, возводя обе части равенства в квадрат, получаем: к = $\frac{m^{2}}{n^{2}} $ = $\frac{m\_{1}}{n\_{1}}$ , где $m\_{1}$ и $n\_{1}$- натуральные числа ($n\_{1}\ne $ 1), не имеющие общих множителей, то есть приходим к противоречию.

Задача 10. Освободиться от иррациональности в знаменателе дроби $\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{6 }-\sqrt{3}+\sqrt{2}- 1}. $

Решение. Умножим числитель и знаменатель дроби на 2, получим: $\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{6 }-\sqrt{3}+\sqrt{2}- 1 }= \frac{4+2\sqrt{3}}{2\left(\sqrt{3 }\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{2}- 1\right)}=\frac{1+2\sqrt{3}+3}{2\left(\sqrt{3 }\left(\sqrt{2}-1\right)+\left(\sqrt{2}- 1\right)\right)}= \frac{(1+\sqrt{3)}^{2}}{2(\sqrt{3 }+1)\left(\sqrt{2}- 1\right))}=$ $=\frac{1+\sqrt{3}}{2\left(\sqrt{2}- 1\right)}=$ $\frac{1}{2}(1+\sqrt{3)}\left(\sqrt{2}- 1\right)$.

Задача 11. Какое из двух чисел больше: 2$\sqrt[3]{2}$ +$\sqrt[3]{18} $или 4?

Решение. 2$\sqrt[3]{2}$ +$\sqrt[3]{18} $= $\sqrt[3]{2}$( 2 +$\sqrt[3]{9}$) = $\sqrt[3]{2}$( $\sqrt[3]{8}$ +$\sqrt[3]{9}$) $>$ 2$\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{8}$ $>$ 2$\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{4}$ = 4.

Задача 12. Доказать, что число [ $\frac{n}{2} ]$ - 3n +$(-1)^{n}$ $–$ 1 при натуральных значениях n делится без остатка на 5.

Доказательство. Натуральное число n является четным или нечетным.

Если оно четное, то [ $\frac{n}{2} ]$ = $\frac{n}{2}$ и данное выражение можно записать так:

 $\frac{n}{2}$ - 3n +$1$ $–$ 1 = $-\frac{5n}{2}. $Полученное отрицательное число делится без остатка на 5.

Если же n – число нечетное, то [ $\frac{n}{2} ]$ = $\frac{n-1}{2}$ и тогда получим: $\frac{n-1}{2}$ - 3n $-1$ $–$ 1 = $-\frac{5(n+1)}{2}.$ И на этот раз получили целое число, делящееся без остатка на 5. Итак, данное выражение при всех натуральных значениях n делится без остатка на 5.

Задача 13. Какое надо добавить слагаемое, чтобы сумма *X+Y+Z+XY+XZ+YZ+ XYZ* разлагалась на произведение трех множителей? Какие это множители?

Решение. Добавить следовало число 1:

*(1 + X)(1 + Y)(1 + Z) = 1 + X+Y+Z+XY+XZ+YZ+ XYZ.*

Задача 14. Известно, что *d*$ >c, $ *a + b = c + d, a + d*$ <$ *b + c*. Можно ли по этим данным числа *a, b, c, d* записать в порядке возрастания?

Решение. Из неравенства *a + d*$ <$ *b + c* следует, что  *d*$-$ *b < с* $–$ *a.*

Но *с* $–$ *a = b*$- d, $ поэтому *d*$-$ *b < b*$-$ *d, d< b.* Из равенства *с* $–$ *a = b*$- d$и неравенства *d < b,* получаем*: с*$ >a.$

Итак, *b > d > c > a.*

Задача *15 .* Какая из двух дробей А = $\frac{5678901234}{6789012345}$ и В = $\frac{5678901235}{6789012347}$ больше?

Решение. Если пойти в решении этой задаче традиционным путем, то придется перемножать слишком большие числа, а затем их сравнивать. Мы же воспользуемся следующим приемом. Обозначим числитель дроби А чеез х, знаменатель – через у. Тогда А = $\frac{х}{у}$ , В =$ $ $\frac{х+1}{у+2}$ , причем х $< $у$<$ 2х. Определим знак разности: А – В = $\frac{х}{у}$ $-$ $\frac{х+1}{у+2}$ = $\frac{2х+у}{у(у+2)}$ $>$ 0.

Следовательно, А$ >$ В.

Задача 16. Показать, что выражение *8n – 3*, где n – натуральное число, не может быть квадратом никакого целого числа.

Решение. Рассмотрим выражение *х( х – 1) + 1*, где х \_ натуральное число. Его значение - нечетное число, потому что *х( х – 1) –* число четное.

Запишем заведомо противоречивое равенство: *х( х – 1) + 1= 2 n (1).*

Решим полученное квадратное уравнение $х^{2 }-$ х + 1 = 0 относительно х.

Получим, $х\_{1,2}$ = $\frac{1+\sqrt{8n-3}}{2}$.

Если теперь допустить, что $ 8n-3$ является при каком-то значении n квадратом целого числа, то получим, что при этом значении n равенство (1) справедливо. А оно, как нам известно, неверно при всех значениях n.

Следовательно, $8n-3$ не может являться квадратом целого числа.

Задача 17. Доказать, что для любого натурального числа n удастся найти такое натуральное число m, что число *mn + 1* окажется составным.

Доказательство. Проще всего в качестве m выбрать n + 2. Тогда число

*mn + 1* выражает собой квадрат натурального числа n + 1.

Задача 18. Как разделить 7 яблок поровну на 12 человек, не разрезая яблоки более, чем на 4 части ?

Решение. Каждое из трех яблок надо разделить на 4 равные части, а каждое из остальных четырех – на 3 равные части. При дележке каждому достанется по четверти и по трети яблока.

Задача 19. Найти двузначное число, равное удвоенному произведению его цифр.

Решение. Пусть *10х + у* - двузначное число. По условию *10х + у = 2ху*, откуда следует, что *10х + у*  – четно, то есть у – четно. Разделив обе части равенства на *2х*, получим: 5 + $\frac{у}{2х}$ = $у$, откуда следует, что *у* $>$ *5*. Значит, *у = 6* или *у = 8*. Если *у = 8*, то *5 +* $\frac{8}{2х}$ *= 8* , откуда х = $\frac{4}{3}$, что невозможно. При у = 6, х = 3. Искомое число: 36.

Задача 20. Доказать, что *3, 5, 7* – единственная тройка последовательных нечетных чисел, каждое из которых простое.

Доказательство. Возьмем любую тройку последовательных нечетных чисел: *n, n + 2* и *n + 4*. Пусть меньшее из них простое и не равно 3, тогда оно не делится на 3, то есть может быть представлено как 3к +1, либо 3к +2. Но тогда либо *n + 2,* либо *n + 4* делится на 3, то есть не являются простыми.