***Нестандартные задачи по алгебре для 7-8 классов***

Представленный материал может быть использован на факультативных, групповых занятиях, на заседаниях математического кружка, во внеклассной работе по математике.

Цель данных занятий - развитие творческого мышления учащихся, а также формирование их мировоззрения; возможность углубленного изучения основного курса путем рассмотрения задач, требующих нестандартного подхода при своем решении.

Достижению этой цели служат специально подобранные задачи. Систематические упражнения в решении таких задач помогут обеспечить действенность приобретаемых учащимися знаний по математике, развить у них творческое мышление и интерес к предмету.

Задача 1. В результате деления двузначного числа на его обратное получились равные частное и остаток. Найти это число.

Решение: Пусть *a= 10x +y* - искомое число, *q* – частное, остаток,

тогда *10 x + y = (10y + x)q +q* или (*10 – q)x – (10q – 1)q = q.*

При *q= 1*, получаем равенство *9(x – у) = 1*, которое невозможно.

При *q = 2* , имеем *8х – 19у = 2*, откуда следует, что число у – четное.

При *у = 2* получаем *х = 5*, а *при у = 4, 6, 8* правая часть не делится на 8. Другими словами , в этом случае мы имеем решение *а = 52*.

Далее, при *q = 3* из равенства *7х – 29у = 3* при *у = 2* *х* – получается дробным, а при *у 3 х 10*, то есть в этом случае решений нет.

При *q = 4* имеем *6х – 39у = 4*, что невозможно, так как 4 не делится на 3.

Наконец, если *q 5*, то *5х ( 10 – q)х =( 10q – 1)у + q 49 +q 54*, откуда

*х 11*. Следовательно, искомое число равно *52.*

Задача 2. Найти все целые числа *х* и *у*, для которых выполняется равенство *2ху + х + у = 83.*

Решение: Умножив обе части уравнения на 2 и прибавив к обеим частям 1, представим его в виде :

*( 2х + 1)( 2у + 1 ) = 167,* и поскольку число *167* – простое, то оно раскладывается на целые множители четырьмя способами:

*167 = 1∙167 = 167∙1= (- 1)∙(- 167) = (- 167) ∙ (- 1),* откуда находим четыре решения уравнения: *(0;83), (83;0), ( - 1; - 84), ( - 84; -1).*

Задача 3. Имеется несколько мешков с монетами, в одном из которых все монеты фальшивые , а в остальных – настоящие. Фальшивая монета на 1 г легче настоящей. Каким наименьшим числом взвешиваний на пружинных весах можно обнаружить фальшивые монеты, если в каждом мешке монет достаточно много?

Решение. Занумеруем мешки числами от 1 до *n*, из каждого мешка возьмем столько монет, каков его номер, и взвесим взятые монеты. Всего их *S = 1 +2 + 3 + ….+ n* штук. Если вес настоящей монеты равен *а* грамм, а фальшивые монеты содержатся в мешке с номером *к,* то весы покажут

*= а +2а + …+ к( а- 1) +… + nа = Sа – к.*

Взвесим теперь S монет из первого мешка. Если все они фальшивые, то их общий вес окажется меньше, если же все настоящие, то будет больше Поэтому, если , то фальшивые монеты в первом мешке, в противном случае мы узнаем вес Sа настоящих монет, и разность дает число *к* фальшивых монет.

Таким образом, найти мешок с фальшивыми монетами можно двумя взвешиваниями. Ясно, что одним взвешиванием обойтись не удастся.

Задача 4.Найти все такие простые числа *р* и *q,* что числа *7р + q* и *рq + 11* также простые.

Решение. Если число *рq + 11* простое, то оно нечетно и, поэтому одно из чисел *q* или *р* - четное, то есть равно 2.

Пусть *р = 2*, тогда числа *q + 14* и *2 q + 11* простые. Если при делении на 3 число q дает остаток 1, то *q + 14* делится на 3, то есть *q = 3* и *р = 2* удовлетворяют условию задачи.

Аналогично можно показать, что значения *р = 3* и *q =2*, также являются решением задачи.

Задача 5. Показать, что  *+ n + 1* при натуральном *n* есть нечетное число, не являющееся квадратом никакого другого натурального числа.

Решение. Число  *+ n + 1* может быть представлено в виде *n( n + 1) + 1*, где *n* – натуральное число. Произведение *n( n + 1)* – четное число, следовательно, *n( n + 1) + 1* –нечетное.

Ближайшие к числу  *+ n + 1* квадраты натуральных чисел – это и .

Действительно,  *+ n + 1* и  *+ n + 1 + n + 1) + n = .*

Так как и - квадраты последовательных натуральных чисел, а число  *+ n + 1* находится между названными квадратами, то само оно квадратом натурального числа быть не может.

Задача 6. Доказать, что дробь является несократимой тогда и только тогда, когда *b* и *d* взаимно простые числа*.*

Доказательство. Необходимость очевидна. В самом деле, если предположить, что *b* и *d* имеют общий делитель, то этот делитель имеют числа , следовательно, и сумма Тогда дробь сократима, что противоречит условию.

Покажем, что если *b* и *d* не имеют общего делителя, отличного от единицы, то дробь несократимая.

Предположим противное. Тогда сумма имеет общий множитель либо *cd* , либо  *сb.* Примем для определенности, что имеет общий натуральный делитель *сb*. Но это невозможно, поскольку число *сb* кратно *b,* а число *-* взаимнопростое с b *(* сомножитель а- числитель несократимой дроби*d* и *b* не имеют общих множителей по условию). Аналогично показываем, что сумма не имеет общего натурального делителя *cd*. Таким образом, достаточность доказана.

Задача 7. Доказать, что

= + + …+ .

Доказательство.  *= - , = - , … , = - .*

Сложив почленно эти равенства, получим:

*+ +…+ = - =*

*= .*

Задача 8. Дано, что *mn + pq* делится без остатка на *m p.* Доказать, что *mq + np* тоже делится без остатка на *m p.*

Доказательство. Представим *mn = mn np + np = ( mn* + *np*,

pq = = *pq mq + mq = ( pq* + *mq.*

Отсюда, *mn + pq* = *( mn* + *( pq* + (*np + mq).*

Первые два слагаемых делятся без остатка на  *m* значит, и *np + mq* делится на *m.*

Задача 9. Доказать, что корень квадратный из натурального числа не может быть выражен несократимой дробью ( n1).

Доказательство. Предположим, что = - несократимая дробь, возводя обе части равенства в квадрат, получаем: к = = , где и - натуральные числа ( 1), не имеющие общих множителей, то есть приходим к противоречию.

Задача 10. Освободиться от иррациональности в знаменателе дроби

Решение. Умножим числитель и знаменатель дроби на 2, получим: .

Задача 11. Какое из двух чисел больше: 2 +или 4?

Решение. 2 += ( 2 +) = ( +) 2 2 = 4.

Задача 12. Доказать, что число [ - 3n + 1 при натуральных значениях n делится без остатка на 5.

Доказательство. Натуральное число n является четным или нечетным.

Если оно четное, то [ = и данное выражение можно записать так:

- 3n + 1 = Полученное отрицательное число делится без остатка на 5.

Если же n – число нечетное, то [ = и тогда получим: - 3n 1 = И на этот раз получили целое число, делящееся без остатка на 5. Итак, данное выражение при всех натуральных значениях n делится без остатка на 5.

Задача 13. Какое надо добавить слагаемое, чтобы сумма *X+Y+Z+XY+XZ+YZ+ XYZ* разлагалась на произведение трех множителей? Какие это множители?

Решение. Добавить следовало число 1:

*(1 + X)(1 + Y)(1 + Z) = 1 + X+Y+Z+XY+XZ+YZ+ XYZ.*

Задача 14. Известно, что *d a + b = c + d, a + d b + c*. Можно ли по этим данным числа *a, b, c, d* записать в порядке возрастания?

Решение. Из неравенства *a + d b + c* следует, что  *d b < с a.*

Но *с a = b* поэтому *d b < b d, d< b.* Из равенства *с a = b* и неравенства *d < b,* получаем*: с*

Итак, *b > d > c > a.*

Задача *15 .* Какая из двух дробей А = и В = больше?

Решение. Если пойти в решении этой задаче традиционным путем, то придется перемножать слишком большие числа, а затем их сравнивать. Мы же воспользуемся следующим приемом. Обозначим числитель дроби А чеез х, знаменатель – через у. Тогда А = , В = , причем х у 2х. Определим знак разности: А – В = = 0.

Следовательно, А В.

Задача 16. Показать, что выражение *8n – 3*, где n – натуральное число, не может быть квадратом никакого целого числа.

Решение. Рассмотрим выражение *х( х – 1) + 1*, где х \_ натуральное число. Его значение - нечетное число, потому что *х( х – 1) –* число четное.

Запишем заведомо противоречивое равенство: *х( х – 1) + 1= 2 n (1).*

Решим полученное квадратное уравнение х + 1 = 0 относительно х.

Получим, = .

Если теперь допустить, что является при каком-то значении n квадратом целого числа, то получим, что при этом значении n равенство (1) справедливо. А оно, как нам известно, неверно при всех значениях n.

Следовательно, не может являться квадратом целого числа.

Задача 17. Доказать, что для любого натурального числа n удастся найти такое натуральное число m, что число *mn + 1* окажется составным.

Доказательство. Проще всего в качестве m выбрать n + 2. Тогда число

*mn + 1* выражает собой квадрат натурального числа n + 1.

Задача 18. Как разделить 7 яблок поровну на 12 человек, не разрезая яблоки более, чем на 4 части ?

Решение. Каждое из трех яблок надо разделить на 4 равные части, а каждое из остальных четырех – на 3 равные части. При дележке каждому достанется по четверти и по трети яблока.

Задача 19. Найти двузначное число, равное удвоенному произведению его цифр.

Решение. Пусть *10х + у* - двузначное число. По условию *10х + у = 2ху*, откуда следует, что *10х + у*  – четно, то есть у – четно. Разделив обе части равенства на *2х*, получим: 5 + = , откуда следует, что *у 5*. Значит, *у = 6* или *у = 8*. Если *у = 8*, то *5 + = 8* , откуда х = , что невозможно. При у = 6, х = 3. Искомое число: 36.

Задача 20. Доказать, что *3, 5, 7* – единственная тройка последовательных нечетных чисел, каждое из которых простое.

Доказательство. Возьмем любую тройку последовательных нечетных чисел: *n, n + 2* и *n + 4*. Пусть меньшее из них простое и не равно 3, тогда оно не делится на 3, то есть может быть представлено как 3к +1, либо 3к +2. Но тогда либо *n + 2,* либо *n + 4* делится на 3, то есть не являются простыми.